

प्राथमिक कक्षाओं में गणित शिक्षण - भाग 1

अज़ीम प्रेमजी फाउंडेशन के सदस्यों के लिए हैंडबुक





Azim Premji Foundation
#134 Doddakannelli,
Next to Wipro Corporate Office,
Sarjapur Road,
Bangalore - 560035
Tel: +91-80- 6614 4900/01/02
Website: www.azimpremjifoundation.org

Handbook for the field team members of Azim Premji Foundation
Illustrations by Anjali Shekhawat

Printed at: Printed by SCPL, 2nd Flr | 2/1 JC Indl Area
Kanakapura Road, Bangalore - 560 062, India



© 2023 Azim Premji Foundation.

This publication may be reproduced by any method without fee for teaching or non-profit purposes. The publication shall not be used for commercial purposes. Rights are reserved under Creative Common Licence. Any derivative works shall also be protected under the same licence. Rights are reserved under Creative Common Licence: Attribution + Non- Commercial + Share Alike. For copying in any other circumstances, or for reuse in other publications, or for translation or adaptation, prior written permission must be obtained from the publisher.

प्राथमिक कक्षाओं में गणित शिक्षण भाग-1

Contents

हैंडबुक- संदर्भ, उद्देश्य और विषयवस्तु	x
अध्याय 1: प्रस्तावना- प्राथमिक गणित शिक्षण	1
1.1 एक परिचय	1
1.2. प्राथमिक गणित के मायने क्या हैं?	3
1.3. कक्षा-कक्ष में अपनाई जाने वाली प्रक्रियाएँ- वास्तविक स्थितियाँ	4
1.4. बच्चों के स्तर पर प्राथमिक गणित से जुड़ी चुनौतियाँ	5
1.4.1 संख्या-पूर्व अवधारणाएँ (Pre-number Concepts)	5
1.4.2 गिनना, संख्या पहचान, संख्या लेखन एवं स्थानीय मान (Counting, Number Recognition, Number Writing and Place Value)	6
1.4.3 संक्रियाएँ- जोड़, घटाव, गुणा तथा भाग (Operations- Addition, Subtraction, Multiplication and Division)	7
1.5. गणित सीखने-सिखाने की प्रक्रिया कैसी हो?	7
1.6. अवधारणा- हासिल वाली जोड़	11
1.7. गणित तथा अन्य विषयों में इंटीग्रेशन	14
1.8. प्राथमिक गणित पर शिक्षकों के साथ कैसे काम करना होगा?	19
1.9. अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)	20
1.10. गणित विषय की प्रकृति	23
1.10.1 कार्यपत्रक (Worksheets)	41
1.11 गणित शिक्षण के उद्देश्य	42
1.11.1 कार्यपत्रक (Worksheets)	53
अतिरिक्त अध्ययन सामग्री (Additional Reading Resources)	54

अध्याय 2- प्राथमिक गणित: सीखने-सिखाने की कक्षा-कक्षीय प्रक्रियाएँ	55
2.1 संख्या-पूर्व अवधारणाएँ (Pre-number Concepts)	55
सीखने के प्रतिफल (Learning Outcomes)	55
2.1.1 कक्षा-कक्ष में	56
2.1.2 शिक्षकों के साथ काम की तैयारी	57
2.1.3 पाठ्यक्रम और पाठ्यपुस्तकें	58
2.1.4 संख्या-पूर्व अवधारणाएँ (Pre-number Concepts)	59
2.1.5 उदाहरणात्मक कार्ययोजना (Illustrative Session Plan)	66
2.1.6 उदाहरणात्मक पाठ योजना (Illustrative Lesson Plan)	67
2.1.7 सार संक्षेप (Summary)	68
2.1.8 कार्यपत्रक (Worksheets)	68
अतिरिक्त अध्ययन सामग्री (Additional Reading Resources)	70
2.2 गिनना (Counting)	71
सीखने के प्रतिफल (Learning Outcomes)	71
2.2.1 कक्षा-कक्ष की चुनौतियाँ (Classroom Challenges)	71
2.2.2 गिनना (Counting)	73
2.2.3 गिनने के पाँच सिद्धांत (Five Counting Principles)	74
2.2.4 संख्या नाम, मात्रा और संख्या चिह्न में अंतर्संबंध बनाना (Number Name, Quantity and Number Symbol)	77
2.2.5 कक्षा-कक्ष के अनुभव (Classroom Experiences)	79
2.2.6 गिनने के सिद्धांतों पर काम करने के लिए गतिविधियाँ	81
2.2.7 बच्चों के साथ दोस्ती बनाने तथा गिनने के कौशलों पर काम करने के लिए कुछ सुझाव	83
2.2.8 मोतीमाला की गतिविधियाँ	84
2.2.9 उदाहरणात्मक कार्ययोजना (Illustrative Session Plan)	86
2.2.10 अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)	87

2.2.11 उदाहरणात्मक पाठ योजना (Illustrative Lesson Plan)	89
2.2.12 सार संक्षेप (Summary)	91
2.2.13 कार्यपत्रक (Worksheets)	92
अतिरिक्त अध्ययन सामग्री (Additional Reading Resources)	93
2.3 स्थानीय मान (Place Value)	94
सीखने के प्रतिफल (Learning Outcomes)	94
2.3.1 पंचायत स्तरीय कार्यशाला (PEEO Level Workshop)	94
2.3.2 आलेख: संख्याओं का इतिहास (History of Numbers)	97
2.3.3 स्थानीय मान और इससे सम्बंधित गतिविधियाँ (Activities on Place Value)	105
2.3.4 समूहीकरण और स्थानीय मान की समझ (Grouping and Place Value)	108
2.3.5 गट्टर, बण्डल और खुली तीलियाँ रखने के पीछे का सिद्धांत	110
2.3.6 बच्चों की कुछ सामान्य चुनौतियाँ (Common Challenges of Learners)	114
2.3.7 उदाहरणात्मक कार्ययोजना (Illustrative Session Plan)	116
2.3.8 अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)	116
2.3.9 उदाहरणात्मक पाठ योजना (Illustrative Lesson Plan)	118
2.3.10 सार संक्षेप (Summary)	123
2.3.11 कार्यपत्रक (Worksheets)	123
अतिरिक्त अध्ययन सामग्री (Additional Reading Resources)	125
2.4 जोड़-घटाव (Addition and Subtraction)	126
सीखने के प्रतिफल (Learning Outcomes)	126
2.4.1 पंचायत स्तरीय कार्यशाला (PEEO Level Workshop)	126
2.4.2 गिनने के कौशल से जोड़ना-घटाना (Counting as a Tool)	128
2.4.3 बच्चों की कुछ सामान्य चुनौतियाँ (Common Challenges of Learners)	130

2.4.4	मौखिक सवाल-जवाब और जोड़-घटाव के तरीके (Oral Problems)	131
2.4.5	इबारती सवाल बनाना (Word Problems)	134
2.4.6	जोड़ के मायने तथा सन्दर्भ	135
2.4.7	घटाव के मायने तथा सन्दर्भ	138
2.4.8	आड़े में लिखे जोड़-घटाव के सवाल	139
2.4.9	टीएलएम द्वारा जोड़-घटाव	140
2.4.10	स्थानीय मान की अवधारणा तथा डीन्स ब्लॉक का उपयोग (Using Dienes Block)	142
2.4.11	मानक विधि से जोड़-घटाव (Using Standard Algorithm)	143
2.4.12	उदाहरणात्मक कार्ययोजना (Illustrative Session Plan)	150
2.4.13	अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)	151
2.14.	उदाहरणात्मक पाठ योजना (Illustrative Lesson Plan)	153
2.15	सार संक्षेप (Summary)	155
2.16	कार्यपत्रक (Worksheets)	155
	अतिरिक्त अध्ययन सामग्री (Additional Reading Resources)	157
2.5	गुणा (Multiplication)	158
	सीखने के प्रतिफल (Learning Outcomes)	158
2.5.1	शिक्षक प्रशिक्षण कार्यशाला से	159
2.5.2	गुणा के सवालों में बच्चों की चुनौतियाँ	160
2.5.3	आलेख- गुणा के मायने तथा सन्दर्भ (Meaning of Multiplication)	163
2.5.4	गुणा की अवधारणा और गणितीय निरूपण	166
2.5.5	पहाड़े बनाना (Multiplication Tables)	167
2.5.6	गुणा में क्रम विनिमय का नियम (Commutative Law)	172
2.5.7	गुणा में साहचर्य का नियम (Associative Law)	173
2.5.8	गुणा का वितरण नियम (Distributive Law)	174

2.5.9	डीन्स ब्लॉक का उपयोग	174
2.5.10	गुणा करने के तरीके	175
2.5.11	गुणा की मानक कलन विधि (Standard Algorithm)	177
2.5.12	संख्या को 0 से और 0 को 0 से गुणा करना	179
2.5.13	गुणा के कुछ और रोचक तरीके	181
2.5.14	बच्चों की कुछ सामान्य चुनौतियों का सार	185
2.5.15	उदाहरणात्मक कार्ययोजना (Illustrative Session Plan)	187
2.5.16	अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)	188
2.5.17	उदाहरणात्मक पाठ योजना (Illustrative Lesson Plan)	189
2.5.18	सार संक्षेप (Summary)	191
2.5.19	कार्यपत्रक (Worksheets)	191
	अतिरिक्त अध्ययन सामग्री (Additional Reading Resources)	193
2.6	भाग (Division)	194
	सीखने के प्रतिफल (Learning Outcomes)	194
2.6.1	शिक्षक प्रशिक्षण कक्ष से	194
2.6.2	भिन्न (Fraction) की अवधारणा	199
2.6.3	इबारती सवाल और लिखकर हल करना (Words Problems)	201
2.6.4	भाग की मानक विधि से सम्बंधित मुद्दे (Standard Algorithm of Division)	202
2.6.5	टीएलएम द्वारा भाग की मानक विधि को समझना	208
2.6.6	बच्चों की सामान्य चुनौतियाँ (Common Challenges of Learners)	214
2.6.7	उदाहरणात्मक कार्ययोजना (Illustrative Session Plan)	216
2.6.8	अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)	217
2.6.9	उदाहरणात्मक पाठ योजना (Illustrative Lesson Plan)	219
2.6.10	सार-संक्षेप (Summary)	222

2.6.11	कार्यपत्रक तथा गतिविधियाँ (Worksheets and Activities)	222
	अतिरिक्त अध्ययन सामग्री (Additional Reading Resources)	225
2.7	भिन्न (Fractions)	226
	सीखने के प्रतिफल (Learning Outcomes)	226
2.7.1	कार्यपत्रक	227
2.7.2	भिन्न संख्याएँ: परिचय (Introduction)	227
2.7.3	अर्थपूर्ण सन्दर्भ (Meaningful Context)	229
2.7.4	भिन्न संख्याएँ और कक्षा-कक्षीय शिक्षण (Fractions and Classroom Teaching)	232
2.7.5	दो दिवसीय शिक्षक प्रशिक्षण- गणित (Two-Days' Teachers' Training- Mathematics)	233
2.7.6	बच्चों की सामान्य चुनौतियाँ (Common Challenges of Learners)	264
2.7.7	उदाहरणात्मक कार्ययोजना (Illustrative Session Plan)	266
2.7.8	अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)	266
2.7.9	उदाहरणात्मक पाठ योजना (Illustrative Lesson Plan)	268
2.7.10	सार संक्षेप (Summary)	269
2.7.11	कार्यपत्रक एवं गतिविधियाँ (Worksheets and Activities)	270
	अतिरिक्त अध्ययन सामग्री (Additional Reading Resources)	273
2.8	दशमलव (Decimals)	274
	सीखने के प्रतिफल (Learning Outcomes)	274
2.8.1	समूहीकरण और स्थानीय मान (Grouping and Place Value)	274
2.8.2	संख्याओं का विस्तारित रूप (Expanded Form of Numbers)	274
2.8.3	दाशमिक संख्या पद्धति में इकाइयों का टूटना	275
2.8.4	भिन्न से दशमलव की ओर (Fraction to Decimal)	276
2.8.5	पूर्ण संख्याएँ और एक पूर्ण का भाग	276

2.8.6	शिक्षण सहायक सामग्री का उपयोग (Use of TLM)	277
2.8.7	दशमलव की समझ बनाने के लिए कुछ अभ्यास (Exercises)	278
2.8.8	बच्चों की सामान्य चुनौतियाँ (Common Challenges of Learners)	280
2.8.9	उदाहरणात्मक कार्ययोजना (Illustrative Session Plan)	281
2.8.10	अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)	282
2.8.11	उदाहरणात्मक पाठ योजना (Illustrative Lesson Plan)	283
2.8.12	कार्यपत्रक (Worksheets)	285
	अतिरिक्त अध्ययन सामग्री (Additional Reading Resources)	286
	अध्याय 3- शिक्षकों के साथ काम की योजना	287
3.1	शिक्षकों के साथ काम के मार्गदर्शक सिद्धांत	287
3.2	काम का चरणबद्ध प्रवाह	288
3.2.1	ज़रूरतों की पहचान कर Need Cohort बनाना	289
3.2.2	शिक्षकों के साथ काम की रणनीति	293
3.2.3	समान ज़रूरतों वाले गतिशील Need Cohorts के साथ काम- उदाहरण के लिए	293
3.2.4	विविध ज़रूरतों वाले शिक्षकों के समूह के साथ काम- उदाहरण के लिए	301
3.3	काम के प्रभाव का पता करना	313
3.3.1	कक्षावार सीखने के प्रतिफल	319
3.3.2	अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाओं की सूची	328
	Essential Readings	342

हैंडबुक- संदर्भ, उद्देश्य और विषयवस्तु

अज़ीम प्रेमजी फाउंडेशन 7 राज्यों के 50 से अधिक जिलों और एक केंद्र-शासित प्रदेश पुदुचेरी में सार्वजनिक शिक्षा व्यवस्था को सशक्त करने और जन-सामान्य का इस व्यवस्था में पुनः विश्वास जगाने के लिए प्रयासरत है। शिक्षा की गुणवत्ता निर्धारित करने में सबसे बड़ा योगदान शिक्षकों का होता है; इसलिए फाउंडेशन मूल रूप से शिक्षकों की ज़रूरतों की पहचान कर उनके लिए अधिकांशतः स्थानीय स्तर पर ही विविध प्रकार के पेशेवर विकास कार्यक्रम आयोजित करता है, जिससे 'शिक्षक बेहतर शिक्षण कर सकें' और 'विद्यार्थी बेहतर सीख सकें'।

प्राथमिक स्तर पर बच्चों द्वारा पढ़ना-लिखना और संख्या ज्ञान हासिल करना एक बुनियादी आवश्यकता है, जिस पर आगे की कक्षाओं में होने वाली उपलब्धियाँ काफी हद तक निर्भर करती हैं। अधिकांश स्कूलों में बहुत-से बच्चे इसी स्तर पर संघर्ष करते पाए जाते हैं। इसके परिणामस्वरूप स्कूली व्यवस्था में बिताए समय का उन्हें कुछ लाभ नहीं मिल पाता और शिक्षा से उनके जीवन में जिन संभावनाओं के साकार होने की अपेक्षा की जाती है, वे कभी फलीभूत नहीं होतीं। इसलिए पिछले कुछ वर्षों में फाउंडेशन ने मुख्य रूप से अपनी ऊर्जा प्राथमिक स्तर पर शिक्षण की गुणवत्ता में सुधार पर लगाना शुरू किया है। इस स्तर पर शिक्षक भाषा और गणित विषय प्रभावी तरीकों से कैसे पढ़ा सकें, इस दिशा में हम प्रयासरत हैं।

इस उद्देश्य को पूरा करने के लिए ज़रूरी है कि हमारे सभी साथियों को यह स्पष्ट हो कि प्राथमिक स्तर पर भाषा और गणित में शिक्षकों की आवश्यकताओं की पहचान कैसे करनी है, उसके अनुरूप उन्हें किस तरह के सहयोग उपलब्ध कराने हैं और इस हेतु हमारे स्तर पर क्या तैयारी होनी चाहिए। हम जानते हैं कि हमारे साथी अलग-अलग विषयों में तो अच्छी योग्यता रखते हैं, लेकिन वे भाषा और गणित में समान रूप से एक अपेक्षित विशेषज्ञता नहीं रखते। एक सच्चाई यह भी है कि निरंतर नए साथी हमारे साथ जुड़ते रहते हैं जो शिक्षा में काम करने की प्रेरणा और अनुभव तो लेकर आते हैं, लेकिन उनमें से सभी भाषा और गणित शिक्षण में योग्यता नहीं रखते।

हैंडबुक निर्माण के विचार, उनके स्वरूप और उपयोग को इसी पृष्ठभूमि में देखे जाने की आवश्यकता है। इसके ज़रिए हम फ़्रील्ड में हमारे काम के फोकस और उस हेतु हमारी टीम की आवश्यक तैयारी के उद्देश्य को पूरा करना चाहते हैं। प्राथमिक भाषा और गणित शिक्षण में फाउंडेशन के साझे अनुभव से जनित समझ के आधार पर ये हैंडबुक तैयार की गई हैं। इनमें अन्य संस्थानों, शिक्षाविदों के अनुभवों और उपलब्ध एवं प्रकाशित सामग्री का भी उपयोग किया गया है।

सभी विद्यार्थी बेहतर सीख सकें और प्राथमिक स्तर के लिए निर्धारित सीखने के प्रतिफल (Learning Outcomes / LOs) हासिल करें, इसके लिए शिक्षकों के लिए अपेक्षित कक्षा-कक्षीय शिक्षण प्रक्रियाओं (Desired Classroom Teaching Practices) को केंद्र में रखकर हैंडबुक को रचा गया

है। हैडबुक में सम्मिलित प्रक्रियाएँ ऐसी हैं जिनके किए जाने से शिक्षण प्रभावी बनता है और बच्चे बेहतर सीखते हैं। साथ ही ये वे प्रक्रियाएँ हैं जिन्हें कक्षा में होते हुए देखा जा सकता है और इन्हीं के कक्षा में होने या नहीं होने के आधार पर शिक्षकों की आवश्यकता की पहचान की जा सकती है। साथ ही हम शिक्षकों के पेशेवर विकास के लिए जो प्रयास कर रहे हैं, उनकी प्रभाविता भी इन्हीं प्रक्रियाओं की तरफ शिक्षक के बढ़ने से जाँची जा सकती है। इस प्रकार हैडबुक में जिन 'अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाओं (Desired Teaching Practices)' की बात की जा रही है, वे हमारे काम की धुरी बन जाती हैं और हमारे काम की तैयारी और प्रभाव दोनों के लिए एक साझा संदर्भ बिंदु भी।

प्रत्येक हैडबुक में तीन खंड हैं:

- पहले भाग में शामिल है— प्राथमिक स्तर पर भाषा और गणित विषय में बच्चों से किन उपलब्धियों की अपेक्षा है? इस सन्दर्भ में सरकारी स्कूलों में हो रहे शिक्षण में हम किस प्रकार की चुनौतियाँ देखते हैं? और उनको दूर करने के लिए शिक्षकों के साथ किस तरह की अप्रोच एवं सैद्धांतिक समझ को लेकर काम कर रहे हैं?
- दूसरा भाग बच्चों के साथ कक्षा में होने वाली अपेक्षित प्रक्रियाओं पर केन्द्रित है। बच्चों के साथ जो भी काम होना है, वह प्राथमिक स्तर के लिए निर्धारित सीखने के प्रतिफलों (LOs) के सन्दर्भ में होना है। इन LOs को बच्चे हासिल कर सकें, इसके लिए शिक्षक द्वारा जो कक्षा-कक्षीय प्रक्रियाएँ (Classroom Practices) की जानी ज़रूरी होती हैं, उनका विवरण विस्तार से इस भाग में दिया गया है। यह विवरण भाषा में कुछ मूलभूत प्रक्रियाओं (जैसे कक्षा में बातचीत, कविता-कहानी शिक्षण) को केंद्र में रखकर दिया गया है और गणित में कुछ मूल अवधारणाओं (गिनना, स्थानीय मान, जोड़-घटाव आदि) के आधार पर। यहाँ विद्यार्थियों के साथ कैसे काम किया जाए, इसके उदाहरण भी दिए गए हैं; जिससे हमारे सदस्यों को स्पष्ट रूप से समझ में आए कि किसी प्रक्रिया की ज़रूरत क्यों है और उसे कैसे किया जाना चाहिए। बच्चे इस क्रम में कहाँ गलती करते हैं और उन्हें शिक्षक की ओर से कैसे दूर किया जा सकता है, इसे भी शामिल किया गया है। सामान्यतः शिक्षक पाठ्यपुस्तक की मदद से शिक्षण कार्य करते हैं तो पाठ्यपुस्तक का सन्दर्भ भी लिया गया है जिससे उससे जुड़ाव भी समझ में आए।
- तीसरा भाग शिक्षकों के साथ काम करने की अप्रोच और प्रक्रिया को रखता है। इसके लिए मूल चरण हैं— उनकी आवश्यकता पहचान और समान एवं मिश्रित/विविध/अलग-अलग आवश्यकता वाले शिक्षकों के समूहों के साथ योजनाबद्ध तरीके से काम करना और फिर काम के प्रभाव का आकलन। इन सभी चरणों के लिए दूसरे भाग में दी गई अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाओं (Desired Teaching Practices) की सूची को आधार बनाकर कैसे काम करना है, इसको व्यवस्थित रूप से बताया गया है। शिक्षकों के साथ काम करने की योजना के कुछ सैंपल उदाहरण या तो हैडबुक में ही दिए गए हैं या अलग से इन्हें संकलित करके सहायक सामग्री के रूप में दिया गया है।

यहाँ यह कहना भी ज़रूरी है कि हैंडबुक को केवल इन तीन भागों के दायरे में ही न देखें। इसके साथ ही बहुत-सी अतिरिक्त अध्ययन सामग्री (सैद्धांतिक स्पष्टता और गहराई में जाने के लिए) और शिक्षकों के साथ काम करने की सैपल सत्र योजनाएँ, कार्यशाला मॉड्युल्स, पाठ योजनाएँ, वर्कशीट्स आदि को चुनकर सहायक सामग्री के रूप में दिया जा रहा है। इस पूरे सेट को 'हैंडबुक और सहायक सामग्री' के रूप में ही देखना और प्रयोग में लाना उचित होगा।

यह हैंडबुक हमारे काम की गुणवत्ता के मानक भी तय करती है। दूसरे शब्दों में कहें तो किस गुणवत्ता का काम अपेक्षित है, इसे पढ़कर यह समझ में आना चाहिए। अपेक्षित स्तर तक अपनी योग्यता को ले जाने की जिम्मेदारी हम सभी की है; क्योंकि जिस प्रकार बच्चों के साथ काम की गुणवत्ता शिक्षकों की योग्यता पर निर्भर करती है, उसी प्रकार प्राथमिक शिक्षकों के साथ हमारे काम की गुणवत्ता भाषा और गणित पर हमारी समझ और कार्य से निर्धारित होती है। यह हैंडबुक हमारी क्षमता संवर्द्धन और शिक्षकों के साथ काम को सुनियोजित ढंग से करने— दोनों उद्देश्यों को पूरा करने का एक प्रयास है।

हैंडबुक का प्रथम संस्करण मई-जून 2020 में तैयार हुआ था। प्राथमिक स्तर पर हमारे काम के लिए यह एक बहुत उपयोगी दस्तावेज साबित हुआ। इसके उपयोग के दौरान जो अनुभव हुए और हमारे फील्ड के सदस्यों ने जो सुझाव दिए, उन सब को ध्यान में रखते हुए यह नया संस्करण तैयार किया गया है और अब से यही मान्य संदर्भ होगा इसलिए हमारे साथी इसी को उपयोग में लाएं। आगे होने वाले अनुभव के आधार पर भविष्य में हम इसका एक और संशोधित संस्करण तैयार कर रहे होंगे। उम्मीद है हम सभी इसके उपयोग और इसे समृद्ध करने की दोहरी जिम्मेदारी का निर्वहन करेंगे।

अध्याय 1: प्रस्तावना- प्राथमिक गणित शिक्षण

यह अध्याय प्राथमिक गणित में शिक्षकों के साथ हमारे कार्य से सम्बंधित जिन महत्त्वपूर्ण बिन्दुओं को समझने में सहायक है, वे हैं:

- गणित शिक्षण के सीमित व व्यापक उद्देश्यों के सन्दर्भ में प्राथमिक स्तर पर गणित शिक्षण के मायने
- गणित विषय की प्रकृति
- प्राथमिक स्तर पर गणित शिक्षण और बच्चों के अधिगम से सम्बंधित चुनौतियाँ
- गणित शिक्षण में अपेक्षित शिक्षण प्रक्रिया की सैद्धांतिक और व्यावहारिक समझ
- उपरोक्त सन्दर्भ में शिक्षकों के साथ कार्य को लेकर हमारे अप्रोच की समझ

1.1 एक परिचय

अज़ीम प्रेमजी फाउण्डेशन देश के कई राज्यों में स्थित दूर-दराज़ के जिलों में शिक्षा की बेहतरी के लिए काम कर रहा है। इन सभी राज्यों में हम सरकार के साथ मिलकर काम कर रहे हैं। सरकारी स्कूलों में पढ़ाने वाले शिक्षकों का सहयोग तथा स्कूल में सीखने-सिखाने के लिए बेहतर माहौल बनाने में सहयोग करना हमारा मुख्य काम है। विगत वर्षों के विभिन्न शैक्षिक सर्वेक्षण (survey) तथा उपलब्धि (achievement) आँकड़े (data) यह बताते हैं कि देश भर में लगातार प्रयासों के बावजूद गणित विषय में बच्चों के सीखने की उपलब्धि अपेक्षित स्तर तक प्राप्त नहीं हो पाई है। जिसके कारण आगे की कक्षाओं में गणित एवं अन्य विषयों में भी समझ विकसित करने में काफी समस्याएँ आती हैं। इसलिए संस्था की वर्तमान समझ के अनुसार हम प्राथमिक गणित (primary Maths) पर ज़्यादा केन्द्रित रहते हुए काम करेंगे और बच्चों की समझ विकसित करने में शिक्षकों की मदद करेंगे।

हमें गणित शिक्षण के व्यापक उद्देश्यों¹ (broader objectives) जैसे- तर्क करना (logical understanding), अनुमान लगाना (estimation), इष्टतमीकरण (optimization), सामान्यीकरण (generalization), सन्निकटन (approximation) आदि तथा गणित की प्रकृति² (nature of Mathematics) जिसमें कि अवधारणाओं की सर्पिलाकार क्रमबद्धता (spiraliry), सोपानक्रमिकता (hierarchy), अमूर्तता (abstract) आदि को समझना होगा। अवधारणाओं की समझ के साथ गतिविधियों को बच्चों व शिक्षकों तक ले जाने से पहले स्वयं आजमाकर देखना होगा। शिक्षण सहायक सामग्री का निर्माण तथा उपयोग के तरीकों को आपस

1 Reading_गणित शिक्षण_position paper_Page 8 (5.1) & Page 9 (5.1.1)

2 Reading_IGNOU_AMT-01_Teaching of Primary School Math_Unit-1_Page 12-18

में मिलकर समझना होगा। वर्तमान में हमारे स्कूलों में प्रचलित पारंपरिक शिक्षण विधियों की समीक्षा करनी होगी। यह देखना होगा कि बच्चों को कहाँ-कहाँ पर ज़्यादा दिक्कतें हो रही हैं और इन पर काम करने का तरीका क्या है। अतः संस्था में सभी साथियों को बुनियादी गणित शिक्षण में काम करना होगा, इसलिए हम सभी की साझी समझ (shared understanding) बननी आवश्यक है। इस प्रक्रिया में यह पुस्तक बहुत मदद करेगी।

इस पुस्तक को तैयार करने की प्रक्रिया में बुनियादी गणित की अवधारणाओं के साथ ही बच्चों तथा शिक्षकों की मुख्य चुनौतियों को भी ध्यान में रखा गया है। बतौर एक संस्था पिछले 14 वर्षों के दौरान शिक्षा विभाग के अधिकारियों, दूरस्थ इलाकों में शिक्षण कर रहे शिक्षकों व स्कूली बच्चों के बीच एक सकारात्मक शैक्षणिक माहौल बनाने के लिए हमने विविध तरीकों का विकास भी किया है। इस पुस्तक में आपको ऐसे तरीकों की झलक भी मिलेगी।

एक अच्छे शिक्षक से हमारी सबसे पहली अपेक्षा यही होती है कि वह बच्चों के साथ सहज तथा आत्मीय रिश्ते बनाए रखते हुए शिक्षण करे। बच्चों को अपनी बात कहने और सवाल पूछने की आज़ादी हो। शिक्षक अपने अन्य सहकर्मियों के साथ मिलकर नया

सीखने और करने के प्रयास करते हों। परिप्रेक्ष्य (perspective) से सम्बंधित ऐसे कुछ महत्वपूर्ण विचारों की झलक आपको इस पुस्तक में भी जगह-जगह मिलेगी। हमारे अपने साथी विभिन्न विषयों में लम्बे समय से काम करते रहे हैं। शिक्षा और परिप्रेक्ष्य के मुद्दों पर हम सभी के बीच एक किस्म की साझी सहमतियाँ (common understanding) हैं। विभिन्न विषयों के अनुभवों को समाहित करते हुए गणित शिक्षण की प्रक्रिया और भी अधिक समृद्ध हो सकेगी। इन सभी बातों का ध्यान रखते हुए इस पुस्तक को इस तरह से बनाने का प्रयास किया गया है ताकि कोई भी साथी प्राथमिक गणित में शिक्षकों के साथ योजनाबद्ध तरीके से काम कर पाए। इन सबके फलस्वरूप बच्चों का सीखना बेहतर हो पाएगा।

गणित शिक्षण के उद्देश्य

सीमित उद्देश्य (Narrow Objectives)

- संख्या ज्ञान (Number Knowledge)
- संक्रिया (जोड़, घटाव, गुणा एवं भाग) (Operations)
- मापन की समझ (Measurement)
- आकृति एवं स्थान की समझ (Shapes and Spatial Understanding)
- आँकड़ों का प्रबंधन एवं पैटर्न की समझ (Data Handling and Pattern)

व्यापक उद्देश्य

- अनुमान लगाना (Estimation)
- सन्निकटन (Approximation)
- सादृश्यीकरण / मानस चित्रण (Visualization)
- इष्टतमीकरण (Optimization)
- सामान्यीकरण (Generalization)
- गणितीय निदर्शन (Mathematical Modelling)
- गणितीय निरूपण (Mathematical Representation)
- गणितीय तर्कशीलता (Mathematical Logic)
- समस्या समाधान (Problem Solving)
- सम्प्रेषण एवं अभिव्यक्ति (Communication and Expression)
- रुझान एवं रुचि (Appreciation)

नोट: गणित की प्रकृति और उद्देश्यों को समझने के लिए गणित शिक्षण पोजीशन पेपर और लार्ज स्केल कैम्प 2016 का मॉड्यूल देखें।

इस पुस्तक के प्रत्येक पाठ में विषयवस्तु (content), शिक्षण अधिगम सामग्री (TLM) का उपयोग करने के तरीके, मुख्य शिक्षणशास्त्रीय मुद्दे (pedagogical issues), चुनौतियाँ (challenges), अभ्यास (exercises), गतिविधियाँ (activities) और आकलन (assessment) के बिन्दुओं के साथ ही एनसीईआरटी के संबंधित दस्तावेज़ पर आधारित सीखने के प्रतिफलों (Learning Outcomes) को भी शामिल किया गया है। अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ, उदाहरणात्मक कार्ययोजना (session plan) और किसी एक अवधारणा या उप-अवधारणा (sub-concept) को आधार बनाकर एक पाठ योजना (lesson plan) भी दी गई हैं। इसके अलावा हमारे अपने काम के असर को लगातार जाँचने (effect tracking) में मदद करने के लिए सहायक बिन्दुओं तथा इनके अंतर्गत कुछ स्पष्ट और मापे जा सकने योग्य अवलोकन बिन्दुओं का समावेश भी किया गया है।

इस पुस्तक को तैयार करने की प्रक्रिया में बहुत-सी स्रोत सामग्री (resource materials), शोध अध्ययनों (researches) और आलेखों (articles) का उपयोग किया गया है। इनमें राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा-2005 (NCF-2005), गणित पोजीशन पेपर, एनसीईआरटी की पाठ्यपुस्तकें, एकलव्य संस्थान द्वारा प्रकाशित पाठ्यपुस्तक खुशी-खुशी तथा सन्दर्भ पत्रिका, दिगंतर द्वारा प्रकाशित गणित बोध, राजस्थान राज्य पाठ्यपुस्तक मंडल द्वारा प्रकाशित पाठ्यपुस्तक गणित की मज़ेदार दुनिया, अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी द्वारा प्रकाशित लर्निंग कर्व (Learning Curve) तथा ऐट राईट एंगल्स (At Right Angles) पत्रिकाएँ, अज़ीम प्रेमजी फाउंडेशन गणित समूह द्वारा तैयार को-डेव (Co-Dev) सामग्री, इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय (IGNOU) द्वारा प्रकाशित पुस्तकों में से उपयुक्त सामग्री, प्रश्न, गतिविधि, आलेख, चित्र आदि का उपयोग किया गया है। हम इन सभी संस्थाओं तथा व्यक्तियों के प्रति आभार व्यक्त करते हैं। आशा है, यह पुस्तक सभी साथियों को बच्चों तथा शिक्षकों के साथ बुनियादी गणित पर काम करने के दौरान प्रत्येक चरण पर सहायक होगा।

1.2 प्राथमिक गणित के मायने क्या हैं?

प्राथमिक गणित किसे माना जाए? इस सवाल पर गौर करें तो हम पाएंगे कि कक्षा 1 से 5 के दौरान पढ़ाई जाने वाली सारी विषयवस्तु ही प्राथमिक गणित है। यह आगे की कक्षाओं में गणित अध्ययन के लिए आधार के रूप में काम करती है। इसके अंतर्गत आने वाले क्षेत्र हैं- संख्याएँ एवं संक्रियाएँ, भिन्न, मापन, आँकड़ों के साथ कार्य, पैटर्न और आकृति एवं स्थान की समझ। प्राथमिक गणित पर काम करने के लिए सहायक पुस्तकें दो भागों में तैयार की जाएगी। दो भागों में प्राथमिक गणित की विषयवस्तु के साथ-साथ विषय के परिप्रेक्ष्य को भी शामिल किया जाएगा। दोनों भागों में प्राथमिक स्तर की विषयवस्तु को निम्नानुसार रखा गया है:

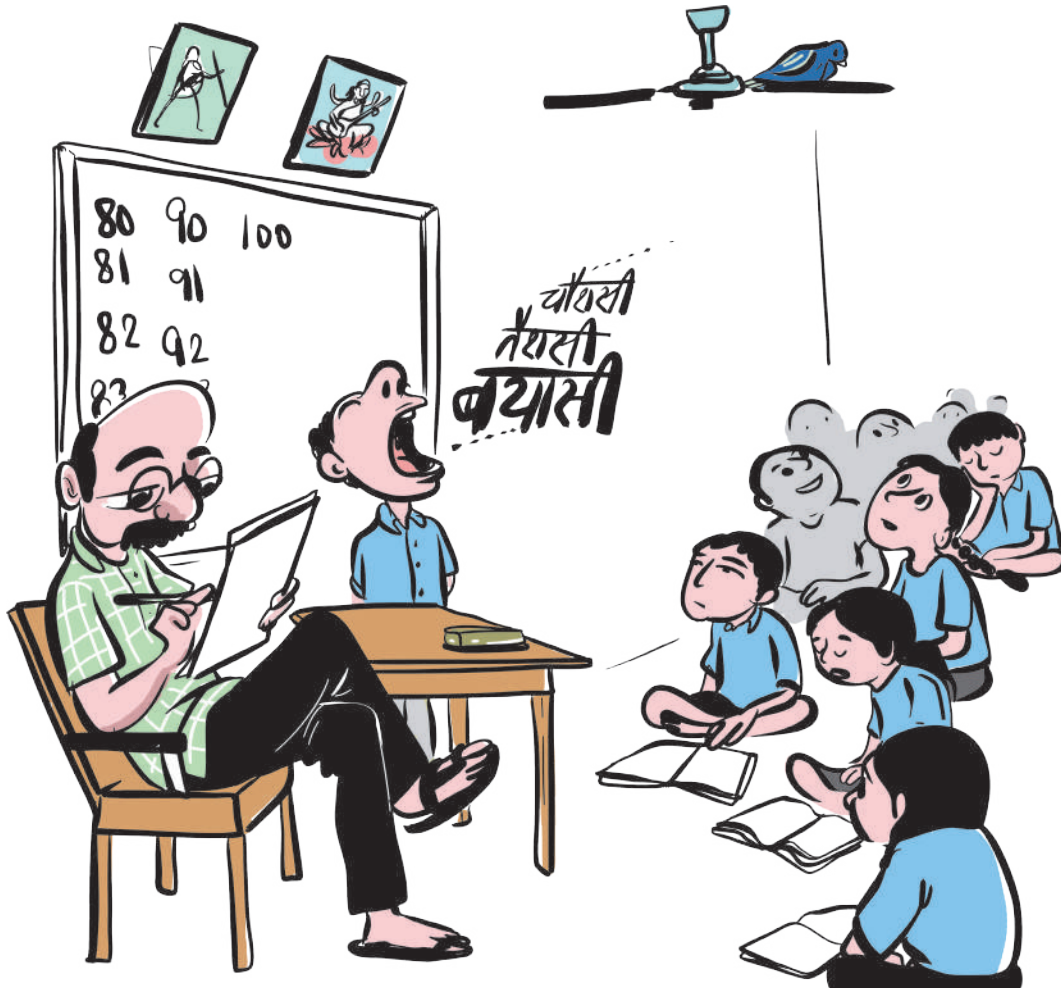
भाग 1: विषयवस्तु और परिप्रेक्ष्य की समझ बनाना, संख्या समझ- संख्या-पूर्व अवधारणाएँ, गिनना, संख्या पहचान, संख्या लेखन तथा स्थानीय मान की समझ और संक्रियाओं के अंतर्गत- जोड़, घटाव, गुणा एवं भाग, भिन्न और दशमलव संख्याओं की समझ को शामिल किया गया है।

भाग 2: विषयवस्तु और परिप्रेक्ष्य की समझ बनाना, मापन की समझ, आँकड़ों का प्रबंधन एवं पैटर्न पर कार्य और आकृति एवं स्थान की समझ को शामिल किया गया है।

1.3 कक्षा-कक्ष में अपनाई जाने वाली प्रक्रियाएँ- वास्तविक स्थितियाँ

प्राथमिक कक्षाओं में पढ़ाने वाले शिक्षकों से अपेक्षा की जाती है कि वे सभी विषय पढ़ा सकेंगे। बहुत-से शिक्षकों ने गणित विषय दसवीं कक्षा तक ही पढ़ा होता है। ऐसी स्थिति में विषय की प्रकृति क्या है? गणित विषय क्यों पढ़ाया जाना चाहिए? और इसको पढ़ाने के व्यापक उद्देश्य क्या हैं? इन सब बातों पर उनके साथ बहुत कम काम होता है। अतः इन मुद्दों पर पर्याप्त समझ का अभाव उनके द्वारा कक्षा-कक्ष में अपनाई जाने वाली शिक्षण प्रक्रियाओं में भी दिखाई देता है। जैसे-

- गणित की विषयवस्तु का परिवेश के सन्दर्भों (context) और दैनिक जीवन के अनुभवों (daily life experiences) से जुड़ाव नहीं बन पाना।
- बच्चों के साथ गणित की अवधारणाओं के मायनों (meaning) पर कोई बातचीत नहीं होना।
- बच्चों को सीधे-सीधे मानक विधि (standard algorithm) बता दिया जाना।
- मानक विधि के उपयोग से एक सवाल हल करके बताना और फिर वैसे ही और सवालों पर अभ्यास (practice) करवाना, ताकि यह विधि बच्चों को याद हो जाए।



- मानक विधि कैसे बनी है, इसके पीछे तर्क (logic) क्या है? इस पर कोई बातचीत नहीं होती है।
- गणित में अवधारणाओं में क्रमबद्धता है। कक्षा में एक अवधारणा पर पुख्ता काम किए बिना इसके आगे की अवधारणा पर काम शुरू कर देना।
- शिक्षण सहायक सामग्री (TLM) का उपयोग नहीं किया जाता या ऐसा करने के उद्देश्य स्पष्ट नहीं होते।
- आमतौर पर गतिविधियों (activities) को नहीं कराया जाता है। जहाँ होती भी हैं वहाँ वो केवल एक खेल बनकर रह जाती हैं। बच्चे उससे क्या सीखेंगे? इस पर ध्यान नहीं होता।
- गणित एक अमूर्त (abstract) विषय है। प्राथमिक कक्षाओं में अवधारणाओं को समझने के लिए ठोस सामग्री का उपयोग आवश्यक है। आमतौर पर कक्षाओं में सामग्री का उपयोग नहीं होता है।
- मानक विधि (standard algorithm) से हल करने पर बच्चे जब गलतियाँ करते हैं तब उन्हें सीधे-सीधे गलत कहकर, दोबारा उसी विधि से हल करने को कहा जाता है। बच्चों से उनकी गलतियों पर बात नहीं की जाती। उन्हें स्वयं अपनी गलती खोजने व सुधारने के लिए अपेक्षित सहयोग नहीं मिलता।

इस तरह की कक्षा-कक्षीय शिक्षण प्रक्रियाओं के कारण बच्चों में बहुत-सी अवधारणात्मक रिक्तियाँ (conceptual gaps) रह जाती हैं और भ्रान्तियाँ (misconceptions) बन जाती हैं, जो आगे चलकर उनके लिए बड़ी चुनौतियाँ बन जाती हैं। इस प्रकार कराए जाने वाले शिक्षण से बच्चे मानक विधि से सवाल को हल तो कर लेते हैं या रटी हुई बातों (rote learning) को बता देते हैं, पर समझ (understanding) के स्तर पर, अवधारणा के उपयोग/अनुप्रयोग (application) करने में पीछे रह जाते हैं। कुछ निश्चित प्रकार के इबारती सवाल (word problem) जो कि किसी खास तरह की शब्दावली (key words) को पकड़कर उन्हें कराए जाते हैं, वे केवल उन्हें ही हल कर पाते हैं। यदि सवाल को थोड़ा भी अलग तरीके से पूछा जाए या वह खास शब्दावली (key words) उसमें न दिखे तो बच्चे सवाल को हल नहीं कर पाते हैं। समेकित रूप में कहें तो इस प्रकार की शिक्षण प्रक्रियाओं से बच्चों में ज्ञान का निर्माण (construction of knowledge) नहीं हो पाता है और वो रटी हुई बातों या मानक विधि तक ही सीमित रह जाते हैं।

1.4 बच्चों के स्तर पर प्राथमिक गणित से जुड़ी चुनौतियाँ

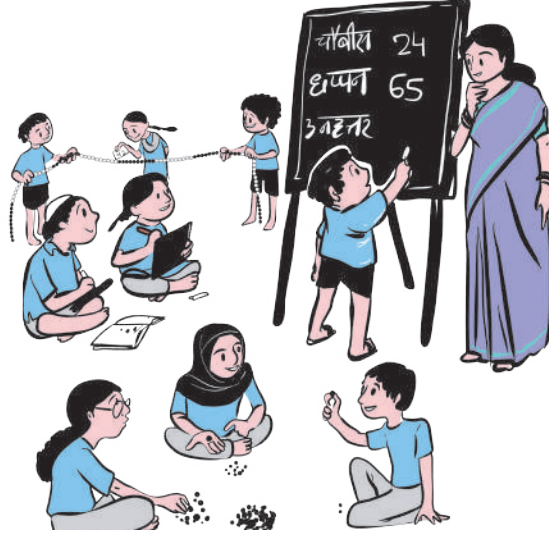
प्राथमिक कक्षाओं में गणित पढ़ाने वाले शिक्षक तथा शिक्षिकाओं के अनुसार उनकी कक्षा में पढ़ रहे बच्चों को आने वाली चुनौतियाँ इस प्रकार हैं—

1.4.1 संख्या-पूर्व अवधारणाएँ (Pre-number Concepts)

सामान्यतः देखने को मिलता है कि कक्षा में संख्या सिखाने की शुरुआत संख्या बोलने, लिखने और पहचानने से की जाती है। किन्तु इस काम को करने से पूर्व जिन संख्या-पूर्व अवधारणाओं (pre-number concepts) पर कार्य किया जाना चाहिए वह लगभग उपेक्षित (ignored) सा रहता है। इनसे जुड़ी गतिविधियाँ जो पाठ्यपुस्तक में दी गई होती हैं, उन्हें भी शिक्षक बहुत ही सतही तौर पर करा देते हैं और उनका संख्या ज्ञान (number sense) से जुड़ाव नहीं देखते हैं। संख्या-पूर्व अवधारणाओं में मुख्य रूप से एक-एक की संगति (one-to-one correspondence), वर्गीकरण (classification), तुलना करना (comparison) और अनुक्रम बनाना (seriation/order) शामिल हैं। इन चार पर और बेहतर समझ बनाने के लिए इन्हें दस छोटी-छोटी अवधारणाओं में तोड़कर पाठ में बताया गया है।

1.4.2 गिनना, संख्या पहचान, संख्या लेखन एवं स्थानीय मान (Counting, Number Recognition, Number Writing and Place Value)

इसके अंतर्गत बच्चों द्वारा गिनती बोलना, चीजों को गिनना, संख्याओं को पढ़ना-लिखना, बड़ी तथा छोटी संख्या की पहचान कर पाना, संख्याओं को बढ़ते-घटते क्रम में रख पाना आता है। आम तौर पर बच्चों को सही क्रम में गिनती बोलने में चुनौती आती है। वे कुछ संख्या नामों को भूल जाते हैं (एक, दो, तीन, पांच, छह) या उनके क्रम में गलती करते हैं (एक, दो, तीन, पांच, चार, छह, सात)। बहुत-से बच्चे ऐसे भी होते हैं जो गिनती को सही बोल जाते हैं, लेकिन यदि कुछ वस्तुओं को देकर गिनने को कहा जाए तो कई तरह की गलतियाँ करते हैं।



रोषेल गेलमन और गैलस्टील ने गिनने की प्रक्रिया पर शोध व अध्ययन करने के बाद गिनने के पाँच सिद्धांतों³ (five counting principles) को व्यवस्थित रूप में प्रस्तुत किया है। प्राथमिक कक्षाओं में पढ़ाने वाले शिक्षकों को गिनने के इन पाँच सिद्धांतों की समझ होना चाहिए। इससे वे प्रत्येक बच्चे को आने वाली अलग-अलग किस्म की चुनौतियों के लिए शिक्षण योजना (teaching plan) तैयार कर सकेंगे। उन्हें आस-पास उपलब्ध ठोस सामग्री (solid materials) का उपयोग करते हुए रोचक गतिविधियों (interesting activities) तथा अभ्यास प्रपत्रों (worksheets) के उपयोग से गिनने की अवधारणा पर काम करने में मदद मिलेगी। इसी तरह संख्या चिह्न (number symbols) की पहचान करने के दौरान भी कई तरह की चुनौतियाँ आती हैं। आम तौर पर स्कूलों में संख्याओं को लिखना सिखाने में काफी जल्दबाज़ी की जाती है। सामान्यतः यह देखा गया है कि बच्चे बोर्ड पर लिखी 1 से 100 तक की संख्याओं को अपनी कॉपी में उतारते रहते हैं या फिर सभी के पास बाज़ार से खरीदी गई एक छोटी पुस्तक होती है, जिसमें से देखकर वे संख्या लिखने का अभ्यास करते हैं।

संख्या लिखना सिखाने की इस जल्दबाज़ी के चलते संख्या नाम, मात्रा तथा संख्या चिह्न (number name, quantity and number symbol) के अंतर्संबंध (संख्या नाम- सात, मात्रा- इतनी ही वस्तु गिनना तथा संख्या चिह्न- 7) बनाने पर पुख्ता काम नहीं हो पाता। यह भी बच्चों के कुछ संख्याओं के उल्टे लिखने का एक संभव कारण है। स्थानीय मान (place value) की सही समझ नहीं होने के कारण वे दो तथा तीन अंकों की संख्याओं को लिखने में भी काफी गलतियाँ करते हैं। जैसे- छप्पन को 56 न लिख कर 65 लिखना। इसका एक कारण इस प्रकार है- बच्चे को ये पता है कि छप्पन 5 और 6 से मिलके बनता है, जबकि उन्हें किस क्रम में लिखना है, इसकी समझ नहीं होती है। मतलब कि स्थानीय मान की समझ नहीं होती है। सभी पाठ्यपुस्तकें यह सुझाती हैं कि संख्या लिखने से पहले संख्या पहचान कराया जाना चाहिए। संख्या नाम बोलना और संख्या चिह्न पहचान करने पर पुख्ता काम होना चाहिए। फिर धीरे-धीरे लिखने के अभ्यासों की तरफ बढ़ना चाहिए।

³ Chapter 2 में पाँचों सिद्धांतों पर विस्तार से बात की गई है तथा संदर्भ सामग्री में संबन्धित पठन सामग्री दी गई है।

1.4.3 संक्रियाएँ- जोड़, घटाव, गुणा तथा भाग (Operations- Addition, Subtraction, Multiplication and Division)

स्थानीय मान की बेहतर समझ न होने के कारण बहुत-से बच्चे संख्याओं को सही तरीके से लिख नहीं पाते हैं। संक्रियाओं से जुड़े ऐसे सवाल जहाँ हासिल (carry forward) लेना पड़ता है, वहाँ ज़्यादा गलतियाँ होती हैं। साथ ही इबारती सवालों की भाषा तथा सन्दर्भ (language and context) से परिचित न होने के कारण भी बच्चों को बहुत-सी चुनौतियाँ आती हैं। संख्याओं में शून्य की उपस्थिति उन्हें और भी असहज करती है। शून्य माने 'कुछ नहीं' की समझ जोड़ तथा घटाव करने के दौरान बड़ी बाधा बनती है।

भाग के सवालों में भाज्य (dividend) में किसी स्थान के अंक में भाग न जाने पर भागफल (quotient) में शून्य का आना बच्चों के लिए एक रहस्य जैसा होता है। इसी प्रकार गुणा में दहाई के अंक से गुणा करने पर इकाई के नीचे क्रॉस का चिह्न क्यों लगाते हैं, ये सब सवाल यूँ ही बने रहते हैं।

आम तौर पर देखा गया है कि संक्रियाओं को मानक विधियों से हल करना सीख चुके बच्चे भी इबारती सवाल (word problem) हल करते समय अपने शिक्षकों से सवाल करते हैं कि यहाँ कौन-सी संक्रिया (operation) की जाएगी? या क्या यह हासिल वाला सवाल है?

इस तरह की स्थिति साफ़ संकेत देती है कि बच्चों ने संक्रिया हल करने की मानक विधि को चरण-दर-चरण (step-by-step) रट लिया है, लेकिन इसे कहाँ उपयोग करना है, कहाँ नहीं करना है, यह समझ उन्हें नहीं है। संक्रियाओं से जुड़ते रहने के चलते बहुत-से शिक्षक साथी भिन्न संख्या (fraction), मापन (measurement), स्थानिक समझ (spatial understanding) आदि जैसी अवधारणाओं तक पहुँच ही नहीं पाते हैं। आम तौर पर हम चौथी और पाँचवी कक्षा में पढ़ाने वाले शिक्षकों को यह कहते सुन सकते हैं कि अभी हमारे बच्चे तो संख्या और सामान्य जोड़-घटाव, गुणा-भाग ही सीख रहे हैं। भिन्न और दशमलव को लेकर चुनौतियाँ सेक्शन 2.7 और 2.8 में दी गई हैं।

1.5 गणित सीखने-सिखाने की प्रक्रिया कैसी हो?

गणित विषय की विषयवस्तु अमूर्त (abstract) होती है। सामान्य भाषा में हम इस बात को ऐसे समझ सकते हैं कि गणित की कोई भी अवधारणा मूर्त रूप में सीधे-सीधे कहीं भी नहीं दिखती है और ना मिलती है। गणितीय अवधारणाएँ अमूर्त होती हैं। जिस वजह से प्राथमिक कक्षाओं में छोटे बच्चों को गणित के इन अमूर्त विचारों (abstract ideas) को समझने में मुश्किल होती है। इसीलिए प्राथमिक कक्षाओं में पढ़ा रहे शिक्षकों से यह अपेक्षा की जाती है कि वे अपनी कक्षा में गणित शिक्षण के दौरान ठोस वस्तुओं, जैसे कि तीली-बंडल, पत्थर इत्यादि से अर्द्ध-मूर्त, जैसे कि चित्रों इत्यादि और फिर अमूर्त, जैसे कि गणितीय प्रतीक (mathematical symbols) इत्यादि की तरफ बढ़ें।

इस प्रक्रिया में शिक्षण अधिगम सामग्री (TLMs) के साथ ही रोचक तथा परिचित सन्दर्भों (context) का उपयोग करें। अच्छे बाल गीतों, कहानियों, खेलों व पहेलियों (rhymes, stories, games and puzzles) को समाहित करते हुए रंगीन चित्रों का उपयोग करें। कक्षा में बच्चों के लिए अभिव्यक्ति की आज़ादी (freedom

of expression) का माहौल हो, जहाँ वे अपनी बात कह सकें और सवाल पूछ सकें। इस तरह वे इन अमूर्त अवधारणाओं को सहजता के साथ समझ सकेंगे। एक अच्छी गणित कक्षा व शिक्षण प्रक्रिया के लिए निम्न बिंदु महत्वपूर्ण हैं:



- बच्चों के दैनिक जीवन के अनुभवों (daily life experiences), परिवेश से जुड़ते उदाहरणों और परिचित सन्दर्भों (familiar contexts) पर आधारित इबारती सवाल (word problems) पूछे जाएँ तथा बनवाए जाएँ।
- परिचित संदर्भों व ठोस सामग्री के साथ अवधारणाओं पर समझ बनाते हुए उनके मायनों (meaning) को समझना।
- परिवेश में उपलब्ध ठोस (concrete) सामग्री का इस्तेमाल, फिर अर्द्ध-अमूर्त (semi-abstract) और फिर अमूर्त (abstract) स्तर पर अवधारणाओं को समझना।
- गणित के सामान्य नियमों को पहचानने और समझने के अवसर देना। गणितीय संकेतों (symbols) का महत्व समझना एवं उपयोग करना।
- उपयुक्त शिक्षण सहायक सामग्री का इस्तेमाल करते हुए अवधारणा पर समझ निर्माण करवाना।
- खेल तथा गतिविधियों (games and activities) का समावेश करना, जिससे बच्चों की रुचि और रुझान विषय में बना रहे।

- गतिविधि कराते समय यह ध्यान रखना कि बच्चों को मजा आए, लेकिन साथ-ही-साथ वे सहजता के साथ अवधारणा को सीख भी रहे हों।
- गतिविधि या सहायक सामग्री का इस्तेमाल करते समय संबंधित अधिगम उद्देश्यों (objectives) पर शिक्षक का ध्यान बना रहना, अन्यथा वो केवल एक खेल या सामग्री तक ही सीमित रह जाती हैं।
- सरल से कठिन की ओर (simple to complex) चरणबद्ध रूप में बढ़ना।
- बच्चों को सवालों / गतिविधियों के माध्यम से खुद से अवधारणा निर्माण करवाना और सूत्र (formulae) का निर्माण करवाना या मानक विधि (standard algorithm) तक ले जाना।
- सवाल को हल करने के अपने तरीके (different methods) खोजना तथा किसी सूत्र या मानक विधि के पीछे के तर्कों (logic) को जान और बता पाना।
- बच्चों को सवाल करने (to ask questions) के खूब सारे मौके देना और खुद से उनके जवाब खोजने के अवसर देना। रटने की बजाय तर्क के साथ समझने के अवसर देना।
- आकलन को हर गतिविधि में शामिल करना। जिससे कि आकलन के दौरान भी बच्चों का सीखना हो। (continuous and comprehensive assessment)
- कार्यपत्रक (worksheet) पर अभ्यास करवाना। कार्यपत्रक में अधिक प्रश्न ऐसे होने चाहिए जो अवधारणा की समझ (conceptual understanding) को जाँचने में मदद करें न कि तथ्यों या याद की हुई चीज़ों (rote learning) का आकलन माल रह जाए।



- सरल एवं परिचित भाषा का उपयोग करना।
- बच्चों के साथ गणित पर काम करते हुए गणित शिक्षण के व्यापक उद्देश्यों (broader objectives) / कौशलों का विकास जैसे- तर्क करना (logic), अनुमान लगाना (estimation), सामान्यीकरण करना (generalization), अमूर्त चिंतन (abstract thinking) आदि को ध्यान में रखकर काम किया जाना।
- समस्या को अपने सन्दर्भ में समझना। गणितीय निरूपण (mathematical representation) करना व उनका हल ढूँढने की क्षमता का विकास करना।

उदाहरण के लिए इस सवाल को देखते हैं। रानू 40 रुपये वाली एक गुड़िया खरीदना चाहती है। उसके पास गुल्लक में अभी 23 रुपये हैं। गुड़िया खरीदने के लिए उसे कितने रुपये और इकट्ठे करने हैं?

रानू के पास कितने रुपये हैं- 23

गुड़िया कितने रुपये में आएगी- 40

अब ये कैसे पता लगाए जाएँ कि कितने रुपये और चाहिए?

23 में कितना जोड़ने पर 40 मिलेगा?

$23 + \underline{\quad\quad} = 40$

यहाँ दो तरीके हो सकते हैं- 23 से आगे गिनकर 40 तक पहुँच सकते हैं या फिर 40 में से 23 को घटाया जा सकता है।

इसी तरह समस्या हल करने तथा विश्लेषण करने के कौशलों का विकास करना होगा। ताकि बच्चे जीवन में आने वाली विभिन्न प्रकार की समस्याओं का बेहतर रूप से सामना कर सकें। उदाहरण के लिए संख्या समझ पर काम करने का एक क्रम निम्नानुसार हो सकता है:

- ठोस वस्तुओं (कंकड़/बीज... आसानी से मिलने वाली चीज़ों) के साथ काम का अनुभव देना।
- बोलकर अनुभवों के बारे में बताना यानी भाषा का उपयोग (मात्रा के साथ संख्या नाम को जोड़ना)।
- इन्हीं प्रकार के कार्यों को फिर चित्रों के साथ करना या चित्रात्मक प्रस्तुति करना।
- प्रतीकों का प्रयोग (संख्यांक एवं संख्या नाम की पहचान और लिखना)।

E- Experience (अनुभव): ठोस वस्तुओं (कंकड़, तीलियाँ) के साथ काम करना

L- Language (भाषा): भाषा के साथ अनुभवों को व्यक्त करना (कहानी/घटना)

P- Pictures (चित्र): अनुभवों को चित्र द्वारा प्रस्तुत करना (चित्र द्वारा दर्शाना)

S- Symbols (प्रतीक): अनुभवों को प्रतीकों के माध्यम से सामान्यीकृत करना

E.L.P.S. सिद्धांत पामेला लिएबेक द्वारा 1984 में दिया गया।

इस प्रक्रिया को ELPS कहा जाता है, जहाँ E- Experience (अनुभव), L- Language (भाषा), P- Picture (चित्र), S- Symbol (प्रतीक) है। सामान्यतः एक परंपरागत कक्षा में जो प्रक्रियाएँ देखने को मिलती हैं उनमें अधिकांशतः मानक विधि (standard algorithm) या परंपरागत (traditional) प्रक्रिया केंद्र में होती है। बच्चों को नियम, सूत्र व विधि (rules, formulae and methods) को रटना पड़ता है। कोई विधि कैसे काम करती है या उसके पीछे के क्या तर्क हैं, इन सब पर ज़ोर नहीं होता है। बच्चों द्वारा की जाने वाली गलतियों के सुधार के लिए बार-बार उन्हीं यांत्रिक (mechanical) तरीकों या विधियों का दोहराव (repetition) कराया जाता है। इन बातों को ध्यान में रखते हुए इस पर विचार करें कि एक कक्षा में शिक्षण प्रक्रियाएँ ऐसी हों जिससे कि बच्चे बेहतर गणित सीख पाएँ। एक उदाहरण के माध्यम से समझते हैं कि कक्षा में आम तौर पर अपनाए जाने वाले तरीके कैसे हैं और उनके लिए सुझाव के तौर पर एक प्रक्रिया कैसी हो सकती है।⁴

4 अलग-अलग विषयवस्तु के लिए उदाहरण chapter 2 में दिए गए हैं।

1.6 अवधारणा- हासिल वाली जोड़

- कक्षा की सामान्य प्रक्रिया

एक दिन मुकेश खड़े जोड़ के सवाल हल कर रहा था। उसे ये सवाल करने थे-

$$\begin{array}{r} 53 \\ + 34 \\ \hline \end{array} \quad \text{तथा} \quad \begin{array}{r} 28 \\ + 17 \\ \hline \end{array}$$

मुकेश ने दोनों सवाल इस तरह हल किए-

$$\begin{array}{r} 53 \\ + 34 \\ \hline 87 \end{array} \quad \text{तथा} \quad \begin{array}{r} 28 \\ + 17 \\ \hline 315 \end{array}$$

मुकेश ने दोनों सवालों को एक ही प्रक्रिया से हल किया। शिक्षक ने देखा और कहा कि तुमने पहला तो सही और दूसरा गलत हल किया है। शिक्षक ने दोबारा से वही तरीका दोहराया जो वो पहले बता चुके थे। 28 में 17 जोड़ने के लिए पहले 8 और 7 को जोड़ो तो 15 आएगा, इसलिए इकाई के नीचे 5 लिखो और हासिल के 1 को 2 के ऊपर लिखो। अब दहाइयों को जोड़ो तो $1+2+1=4$ हुआ। इस प्रकार उत्तर आया- 45।

सुझावात्मक प्रक्रिया

इन्हीं दो सवालों को राधा ने भी मुकेश की तरह हल किया था और जब शिक्षक को दिखाया तो उसके शिक्षक ने उसे गलती पर टोका नहीं और उसके साथ निम्नलिखित गतिविधि की।

- गतिविधि 1: (नोट- यहाँ बच्चों से बातचीत करते हुए उन्हें ये समझने में मदद की जा रही है कि उन्होंने कहाँ गलती की है और क्या गलती हुई है।)

शिक्षक- 28 के करीबी दहाई की संख्या बताओ।

राधा- 30

शिक्षक- 17 के करीबी दहाई संख्या कौन-सी है?

राधा- 20

शिक्षक- यदि हम 30 और 20 को जोड़ें तो कितना होगा?

राधा- 50

शिक्षक- 30 और 20 मिलकर 50 होते हैं तो बताओ 28 और 17 मिलकर 50 से कम होंगे या ज़्यादा?

राधा- 28 जो है वो 30 से कम है और 17 भी 20 से कम है। इसका मतलब दोनों मिलके 50 से कम ही होंगे।

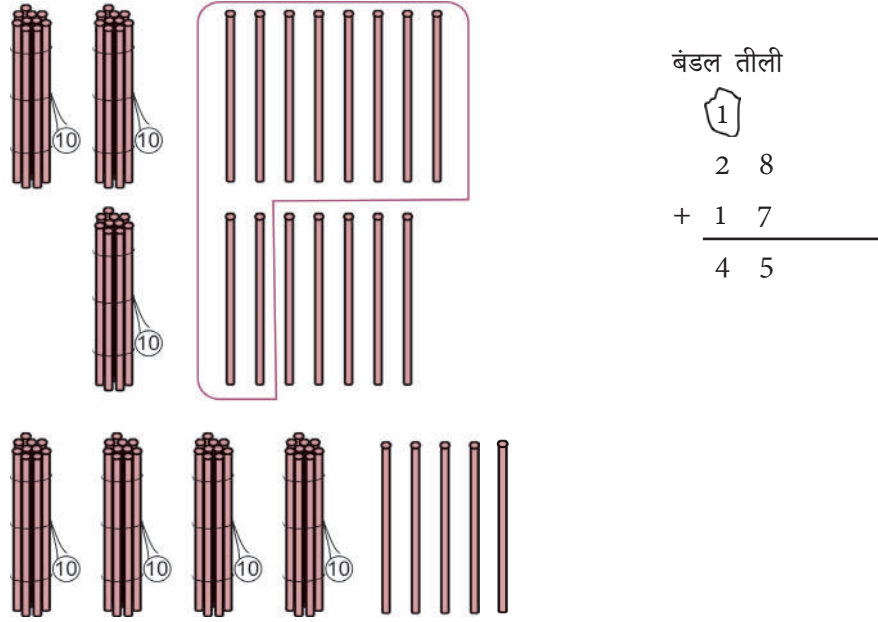
शिक्षक- अपने हल को अब दोबारा देखो।

राधा- हाँ, उत्तर तो 50 से कम आना चाहिए था जबकि मेरा उत्तर तीन सौ से भी ज़्यादा आया।

- गतिविधि 2: (नोट- यहाँ बच्चों को ठोस वस्तुओं के साथ अनुभव दिया जा रहा है और बातचीत के द्वारा बच्चे अपने अनुभवों को साझा कर रहे हैं।)
 शिक्षक- राधा को तीली-बण्डल की मदद से 28 दर्शाने को कहते हैं।
 राधा- 2 बण्डल और 8 खुली तीलियाँ उठाकर रखती है।
 इसी प्रकार शिक्षक के कहने पर 17 को दर्शाने के लिए 1 बण्डल और 7 खुली तीलियाँ रखती है।
 शिक्षक- बताओ जोड़ का मतलब क्या होता है?
 राधा- मिलाना।
 शिक्षक- तो अब 28 और 17 को मिलाओ।
 राधा- पहले खुली तीलियों को मिलाती है $8+7=15$ तीलियाँ।
 शिक्षक- बताओ 15 को खुली तीलियों और बण्डलों में कैसे बताएंगे?
 राधा- 1 बण्डल और 5 खुली तीलियाँ होंगी।
 शिक्षक- तो अब बताओ, तुम्हारे पास कुल कितने बण्डल हो गए और कितनी खुली तीलियाँ हैं?
 राधा- 4 बण्डल और 5 खुली तीलियाँ।
 शिक्षक- बताओ, क्या संख्या बनी?
 राधा- 45
 शिक्षक- 28 और 17 को जोड़ने (मिलाने) पर कितना प्राप्त हुआ?
 राधा- 45



- गतिविधि 3: (नोट- यहाँ बच्चे अपने अनुभवों को चित्र द्वारा दर्शा रहे हैं और साथ-साथ प्रतीकों द्वारा भी दर्शा रहे हैं और प्रक्रिया में क्या नियम काम कर रहे हैं और उनके पीछे के तर्कों को जान रहे हैं।)
 शिक्षक- तुमने तीली और बण्डल की सहायता से काम किया है, उसे फिर करते है और साथ-साथ लिखते हैं।
 शिक्षक- सबसे पहले हमने 28 को तीली-बण्डल से दर्शाया था, फिर 17 को भी दिखाया था। अब हम इन्हें तीली-बण्डल के साथ-साथ संख्या में भी लिखते हैं।
 शिक्षक- अब हमें 28 में 17 को जोड़ना है, इसलिए हम इन्हें मिलाएंगे।



दोनों प्रक्रियाओं में अंतर-

सामान्य प्रक्रिया में	सुझावात्मक प्रक्रिया में
<ul style="list-style-type: none"> ज्यादा जोर मानक विधि (algorithm) पर है। 	<ul style="list-style-type: none"> ठोस वस्तुओं के अनुभव के साथ प्रक्रिया को विस्तार से समझाया जा रहा है।
<ul style="list-style-type: none"> यांत्रिक (mechanical) तरीके से काम किया जा रहा। समझ के बनाए जाने में मुश्किल है। 	<ul style="list-style-type: none"> बच्चा स्वयं करके देख रहा है और शिक्षक उससे लगातार बात कर रहे हैं।
<ul style="list-style-type: none"> कारण जानने और तर्क करने के अवसरों का अभाव है। 	<ul style="list-style-type: none"> मूर्त से अमूर्त तक जाने के लिए चरणबद्ध कार्य किया जा रहा है। जिसमें पहले ठोस वस्तुओं के साथ बातचीत करते हुए कार्य किया जा रहा है और फिर ठोस के साथ-साथ संख्या चिह्न (symbols) से जोड़ते हुए भी कार्य किया जा रहा है।
<ul style="list-style-type: none"> केंद्र में उत्तर होता है और प्रक्रिया पर बहुत ध्यान नहीं दिया जाता है। शिक्षक जो चरण बताते हैं, वे चरण बच्चों को याद हो जाएँ, उसके लिए बार-बार एक जैसे अभ्यास दिए जाते हैं। 	<ul style="list-style-type: none"> यहाँ बच्चा मानक विधि के पीछे क्या तर्क काम कर रहे हैं, उन्हें समझ रहा होता है। उदाहरण के लिए किस तरह तीलियों से बण्डल बन रहा है जो कि जोड़ की प्रक्रिया में हासिल के रूप में दिखता है। इस पूरी प्रक्रिया में ELPS के क्रम का भी समावेश है। गणितीय कौशलों जैसे- अनुमान लगाना, तर्क गढ़ना आदि पर ध्यान दिया गया है।



1.7 गणित तथा अन्य विषयों में इंटीग्रेशन

क्या गणित शिक्षण में हम गणित विषय के उद्देश्यों के साथ ही अन्य विषयों के उद्देश्यों को लेकर एक साथ काम कर सकते हैं? शिक्षक शिक्षा में काम करते हुए कई बार इस तरह के सवाल आते हैं जहाँ शिक्षक साथी कहते हैं कि हमारे स्कूल में शिक्षकों की कमी है, अतः हमें एक साथ एक से अधिक कक्षाओं को पढ़ाना होता है, क्या एक साथ हम कई विषयों के उद्देश्यों पर काम कर सकते हैं? शिक्षा के व्यापक उद्देश्यों को देखें तो संवैधानिक मूल्यों पर हमें ध्यान देना होता है। यहाँ कुछ उदाहरण द्वारा हम समझने का प्रयास करेंगे कि यह कैसे संभव है?

आमतौर पर गणित को संख्याओं और आकृतियों के साथ कुछ करने के रूप में देखा-समझा जाता रहा है। लेकिन आप गौर से देखें तो पाएंगे कि गणित का हमारे दैनिक जीवन के कामकाज से बहुत गहरा जुड़ाव है। गणित की अवधारणाओं पर काम करने के लिए हम अपने परिवेश और दैनिक जीवन से ऐसे बहुमूल्य सन्दर्भों का चुनाव कर सकते हैं। इस तरह हम भाषा (स्थानीय भाषा भी), पर्यावरण, विज्ञान और सामाजिक विज्ञान, कला, खेलकूद और मूल्यों की शिक्षा से जुड़े मुद्दों को बहुत खूबसूरती से शामिल कर सकते हैं। इस नज़रिए को ध्यान में रखकर यदि पाठ्यपुस्तकें तैयार की गई हैं तो वो भी काफी मददगार हो सकती हैं। जैसा की खुशी-खुशी (एकलव्य द्वारा प्रकाशित) और गणित का जादू (NCERT द्वारा प्रकाशित) किताबों में इस विचार को बहुत खूबसूरती से समाहित करने का प्रयास किया गया है। अवधारणाओं पर काम करते समय इन पाठ्यपुस्तकों की मदद ले सकते हैं। इसके अलावा हम स्वयं भी अपने स्तर पर कई तरह के नवाचार कर सकते हैं।

कुछ उदाहरण

1. यह पहली कक्षा, गणित की पाठ्यपुस्तक का एक अभ्यास है। बच्चों को 'पहले-बाद' की समझ का उपयोग करते हुए इन चित्रों को 'क्रम में जमाना' है। प्रत्येक चित्र के नीचे खाली गोले में उन्हें क्रमवार संख्याएँ लिखनी हैं। क्या आप बता सकते हैं कि इस अभ्यास में गणित की अवधारणाओं व उद्देश्यों के साथ ही और किस तरह के उद्देश्य जोड़े जा सकते हैं? इन्हें हम विषयों में बाँटकर समझना चाहें तो कौन-से विषयों पर एक साथ काम की संभावना बनाई जा सकती है?



2. यह चित्र भी देखिए। यह भी पहली कक्षा से ही लिया गया है। इस चित्र द्वारा पहले-बाद की अवधारणा से परिचय कराया गया है। क्या आप इसे देखकर बता सकते हैं कि इस पाठ पर काम करते हुए हम 'पहले-बाद' की अवधारणा के साथ ही और कौन-कौन-सी अवधारणा पर काम कर सकते हैं? साथ ही यह भी सोचिए कि गणित शिक्षण के उद्देश्यों के साथ ही हम दूसरे विषयों के उद्देश्यों पर भी काम करने के अवसर कैसे बना सकते हैं? क्या हम विषयों के उद्देश्यों तक ही सीमित न रहकर व्यापक संवैधानिक मूल्यों या संस्कारों पर भी बच्चों के साथ कुछ काम कर सकते हैं?



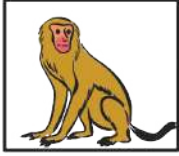
बच्चे कैसे सीखते हैं? बच्चों का स्वभाव जिज्ञासु होता है। वे अपने परिवेश से प्राप्त अनुभवों से बहुत-सी बातें पहले से ही जानते हैं और नई चीज़ों को सीखना चाहते हैं। यहाँ बच्चों को स्वयं करते हुए सीखना है तथा अपनी समझ को व्यक्त करना है। उन्हें अपनी बात को अभिव्यक्त करने, तर्क गढ़ने, दूसरों के तर्कों को समझकर उन पर अपनी राय को व्यक्त करने, नए तरीके खोजने का प्रयास करना है। आपको सिर्फ नियमों व तयशुदा तरीकों पर आधारित सवाल ही नहीं पूछने हैं, बल्कि ऐसे सवाल भी पूछने होंगे जिनके हल पाने के लिए उन्हें सोचना पड़े। इन सब के लिए उन्हें अपने तरीके, समझ, कल्पना व नए सवाल अभिव्यक्त कर पाने के पर्याप्त अवसर मिलने चाहिए। एक अच्छा गणित शिक्षक अपनी कक्षा के बच्चों के साथ काम करते हुए ये सब बातें ध्यान में रखता है।

कुछ उदाहरण

1. कार्यपत्रक

यहाँ दिए गए सवालों और चित्रों को ध्यान से देखिए। इन पर काम करते हुए बच्चों को कौन-कौन से विषयों के मुद्दों पर सोचने, सीखने और समझने का अवसर मिलेगा? क्या ये कार्यपत्रक हल करते समय बच्चों को गणित विषय की कुछ अवधारणाओं को समझने के अवसर भी मिल पा रहे हैं?

कौन किसके साथ ?



2. **इबारती सवाल:** उत्तराखंड में बाढ़ आई थी। मदद के लिए सलीमा ने अपनी कक्षा में चंदा इकट्ठा किया। शिक्षक ने 25 रुपये दिए। सलीमा ने अपने 10 रुपये उसमें मिला दिए। अब सलीमा के पास कितने रुपये हो गए?



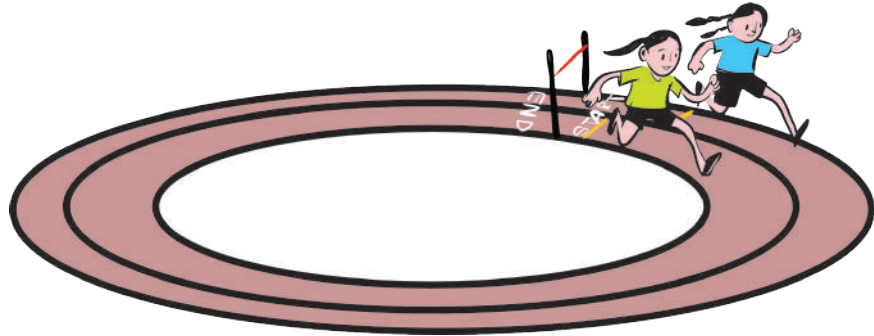
एक और बच्चे ने 10 रुपये दिए, अब कितने हो गए?

दो और बच्चों ने 10-10 रुपये दिए, अब कितने हो गए?

(गणित की मज़ेदार दुनिया, कक्षा 2)

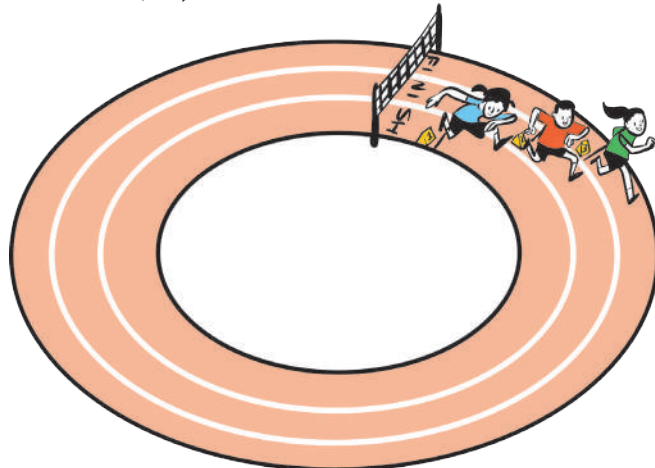
इस प्रश्न में उपयोग किए गए सन्दर्भ को हम सामाजिक विज्ञान शिक्षण के व्यापक उद्देश्यों तथा संवैधानिक मूल्यों के साथ जोड़कर देख सकते हैं। सामाजिक विज्ञान की एक महत्वपूर्ण भूमिका बच्चों में करुणा, समानुभूति, विश्वास, शांति, सहयोग, सामाजिक न्याय, पर्यावरण संरक्षण जैसे अन्य मानवीय मूल्यों के प्रति संवेदना जगाना है। यह अपने-अपने परिवार, अपने सामाजिक वातावरण के विभिन्न भौगोलिक, ऐतिहासिक, सामाजिक, आर्थिक और राजनीतिक कारकों के साथ अंतःक्रिया द्वारा विकसित होता है।

3. **इबारती सवाल:** उषा और वालसम्मा दौड़ लगा रही हैं। उषा भीतरी गोले में दौड़ रही है। वालसम्मा बाहरी गोले में दौड़ रही है। वालसम्मा उषा से तेज दौड़ती है पर फिर भी दौड़ हार जाती है। क्या तुम बता सकते हो, क्यों?



1. क्या तुमने कोई ऐसी रेस देखी है जहाँ दौड़ने वाले अलग-अलग जगह से शुरू करते हों— जैसा इस चित्र में दिखाया गया है? सोचो, ऐसा क्यों होता है?

(गणित का जादू, NCERT कक्षा 4)



प्राथमिक कक्षाओं में विभिन्न विषयों के अंतर्संबंधों को समझने में सहायक सीखने के प्रतिफल

गणित	पर्यावरण अध्ययन	भाषा
<p>विभिन्न वस्तुओं/आकृतियों के भौतिक गुणों का अपनी भाषा में वर्णन करते हैं, जैसे- एक गेंद लुढ़कती है, एक बॉक्स खिसकता है आदि।</p> <p>छोटी लंबाइयों का अनुमान लगाते हैं, अमानक इकाइयों, जैसे उंगली, बिन्ता, भुजा, कदम आदि की सहायता से मापते हैं।</p> <p>अमानक इकाइयों का प्रयोग कर विभिन्न बर्तनों की धारिता की तुलना करते हैं।</p>	<p>सामान्य रूप से अवलोकन द्वारा पहचाने जाने वाले लक्षणों (आकार, रंग, बनावट, गंध) के आधार पर अपने परिवेश में उपलब्ध पेड़ों की पत्तियों, तनों एवं छाल को पहचानते हैं।</p> <p>विभिन्न आयु वर्ग के व्यक्तियों, जीव-जंतुओं और पेड़-पौधों के लिए पानी तथा भोजन की उपलब्धता एवं घर तथा परिवेश में पानी के उपयोग का वर्णन करते हैं।</p> <p>मौखिक / लिखित / अन्य तरीकों से परिवार के सदस्यों की भूमिका, परिवार का प्रभाव, अवलोकनों, अनुभवों तथा जानकारियों को एक व्यवस्थित क्रम में रिकॉर्ड करते हैं (उदाहरण के लिए सारणी, आकृतियों, बारग्राफ़, पाई चार्ट आदि के रूप में) और कारण तथा प्रभाव में संबंध स्थापित करने हेतु गतिविधियों, परिघटनाओं में पैटर्नों का अनुमान लगाते हैं (उदाहरण के लिए तैरना, डूबना, मिश्रित होना, वाष्पन, अंकुरण, नष्ट होना, खराब हो जाना)।</p>	<p>Identifies characters, and sequence of events in a story.</p> <p>Uses simple adjectives related to size, shape, colour, weight, texture such as 'big', 'small', 'round', 'pink', 'red', 'heavy', 'light', 'soft' etc.</p> <p>चित्र के सूक्ष्म और प्रत्यक्ष पहलुओं पर बारीक अवलोकन करते हैं।</p> <p>चित्र में या क्रमवार सजाए चित्रों में घट रही अलग-अलग घटनाओं, गतिविधियों और पात्रों को एक संदर्भ या कहानी के रूप में देखकर समझते हैं और सराहना करते हैं।</p> <p>आस-पास होने वाली गतिविधियों/ घटनाओं और विभिन्न स्थितियों में हुए अपने अनुभवों के बारे में बताते, बातचीत करते और प्रश्न पूछते हैं।</p>

4. गतिविधि: जोड़ का खेल

इस चौकोर में 0 से 10 तक अंक लिखे हैं। इस पर तुम कई तरह के खेल खेल सकते हो। दो, तीन या चार दोस्त इसे खेल सकते हैं।

कुछ खेल पासे से

0	8	2	5	3	1
4	3	10	7	6	9
6	5	1	7	2	10
1	4	8	5	10	3
7	5	9	0	6	4
8	0	7	2	9	6

1. दो पासे लो। देखो, इनकी कितनी सतह है? इनकी हर सतह पर 0 से 5 करके एक-एक अंक लिखो।
2. कोई एक खिलाड़ी दोनों पासों को एक साथ फेंके।
3. कौन-कौन से अंक आए? दोनों को जोड़ लो। जोड़ वाली संख्या को चार्ट पर ढूँढकर उस पर कंकड़ रख दो।
4. बारी-बारी से सबको पासे फेंकने और चार्ट पर जोड़ की संख्या पर कंकड़ रखने का मौका मिलेगा।
5. जो कोई भी गलत संख्या पर कंकड़ रख दे, उसकी बारी बेकार चली जाएगी, क्योंकि उसे गलत संख्या पर से कंकड़ हटाना पड़ेगा।
6. जिसका चार्ट पहले भर जाएगा उसकी जीत होगी।
7. बाकी लोग दूसरे और तीसरे नंबर पर आने के लिए अपने-अपने चार्ट भरने तक खेल को आगे बढ़ा सकते हैं।

(खुशी खुशी, एकलव्य)

1.8 प्राथमिक गणित पर शिक्षकों के साथ कैसे काम करना होगा?

शिक्षकों के साथ काम करने से पूर्व ये समझना होगा कि हमारा सारा काम अक्सर मिश्रित समूह (mixed group) के साथ ही होता है। उन में कार्यानुभव, उम्र, शिक्षण प्रक्रियाओं एवं बच्चों के संबंध में पूर्वाग्रह (prejudice), विषयवस्तु की समझ के स्तर पर काफी विविधता होती है। साथ ही नए तरीकों की स्वीकार्यता एवं सीखने के प्रति इच्छा के स्तर पर भी विविधता होती है। कुछ शिक्षकों की उच्च शिक्षा का विषय गणित होता है और कुछ का नहीं होता है, इसलिए विषय में रुचि पर भी अंतर दिखता है। अतः शिक्षकों के साथ काम करते हुए निम्नलिखित बातों को ध्यान में रखा जा सकता है:

- शिक्षक जब स्वेच्छा से अपनी रुचि के आधार पर क्षमतावर्द्धन (capacity building) के कार्यक्रम में भागीदारी करते हैं तो बेहतर परिणाम मिलते हैं।
- शिक्षकों की शैक्षणिक आवश्यकता पहचान ज़रूरी है, जिससे उन्हें उनकी आवश्यकता अनुरूप (need based) सहयोग (संवाद / प्रशिक्षण / प्रेरणा आदि) दिया जा सके।
- शिक्षकों को स्थानीय स्तर (स्कूल, क्लस्टर, ब्लॉक) पर नियमित रूप से सहयोग उपलब्ध होना चाहिए।
- शिक्षकों की क्षमतावर्द्धन के लिए लम्बी अवधि (long term) तक विभिन्न माध्यमों से उनके साथ संवाद (communication) बनाए रखने की आवश्यकता होती है।
- शिक्षकों के प्रति सम्मान रखना तथा उनके साथ सहज सम्बन्ध स्थापित करना आवश्यक है। उनकी अपनी जिम्मेदारियों के प्रति समझ, प्रतिबद्धता और प्रभावी शिक्षण कार्य करने में जो कमियाँ नज़र आती हैं, उनके पीछे कई ऐतिहासिक, समाजशास्त्रीय और पेशेवर-विकास की प्रक्रिया से जुड़े कारण हैं। ये सभी कारण समझना ज़रूरी है।

इन सभी बातों को ध्यान में रखते हुए शिक्षकों के साथ काम करना होगा। शिक्षकों के साथ किए जा रहे प्रयासों को विषय की प्रकृति तथा उद्देश्यों की समझ, शिक्षाशास्त्र (pedagogy), सीखने के प्रतिफल तथा परिप्रेक्ष्य के मुद्दों पर केन्द्रित रखना होगा। प्राथमिक गणित से संबन्धित अवधारणाओं पर समझ बनानी होगी। पाठ्यपुस्तक में दिए गए क्रियाकलापों के मूल उद्देश्य को समझकर कार्य करना होगा। विभिन्न स्तर के बच्चों के अनुरूप शिक्षण योजना बनाने में निम्न बातों का ध्यान रखना होगा:

- मुख्य उद्देश्य एवं सीखने के प्रतिफल (objectives and learning outcomes)
- आवश्यक पूर्व-ज्ञान (pre-knowledge)
- क्रमबद्ध रूप से गतिविधियों का चयन (activities)
- आवश्यक शिक्षण सहायक सामग्री (teaching learning materials)
- सतत आकलन योजना (continuous assessment plan)



1.9 अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)

शिक्षकों के साथ काम के हमारे अनुभव बताते हैं कि जिन कक्षाओं में बेहतर शिक्षण प्रक्रियाएँ होती हैं उनके बच्चों का सीखना भी बेहतर होता है और उस कक्षा शिक्षण को हम एक प्रभावी शिक्षण कह सकते हैं। फील्ड के हमारे अनुभव जिसमें शिक्षकों की कक्षा का अवलोकन, शिक्षकों से बातचीत और उनकी कक्षा के बच्चों से बातचीत के आधार पर हमने गणित की कक्षा से क्या अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ हैं, उन्हें सूचीबद्ध किया है, जो कि नीचे सारणी में दी गई हैं। इन शिक्षण प्रक्रियाओं को सात बड़े अवलोकन क्षेत्रों में रखा गया है, वो भी सारणी में दिए गए हैं।

नोट: इन सात अवलोकन क्षेत्रों और 20 शिक्षण प्रक्रियाओं को ध्यान में रखते हुए अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाओं को प्रत्येक अवधारणा के लिए आगे के पाठों में लिखा गया है।

अवधारणा (Concept)	अवलोकन क्षेत्र (Observable Areas)	शिक्षण प्रक्रियाएँ (Teaching Practices)
कक्षा 1 से 5 तक की प्रत्येक गणितीय अवधारणा के लिए	1. अवधारणा का अर्थ और उसका संदर्भ (Meaning of concept and its context)– शिक्षण प्रक्रिया में ठोस वस्तुओं व बच्चों के सन्दर्भों को शामिल करना। संदर्भों और दैनिक जीवन की स्थितियों से अवधारणा के मायने/मायनों पर समझ बनाने का काम करना।	1. अवधारणा की समझ बनाने के लिए बच्चों के परिवेश के उदाहरणों एवं स्थितियों से जोड़कर काम करते हैं। 2. अवधारणा के विभिन्न मायनों को उदाहरणों और स्थितियों के माध्यम से बच्चों के साथ बातचीत करते हुए निकलवाते हैं। 3. बच्चों की मायनों पर बेहतर समझ के लिए उनसे वैसी ही स्थितियाँ और उदाहरण गढ़ने को कहते हैं। 4. अवधारणा की व्यापक समझ बनाने के लिए बच्चों के दैनिक जीवन के संदर्भों को शामिल करते हैं।

अवधारणा (Concept)	अवलोकन क्षेत्र (Observable Areas)	शिक्षण प्रक्रियाएँ (Teaching Practices)
<p>कक्षा 1 से 5 तक की प्रत्येक गणितीय अवधारणा के लिए</p>	<p>2. अवधारणा की क्रमबद्धता (Hierarchy of concepts)– एक अवधारणा की समझ दूसरी अवधारणा/ओं की समझ के माध्यम से बनाने की प्रक्रिया को अपने शिक्षण में शामिल करना।</p>	<p>5. किसी भी अवधारणा पर काम करने से पूर्व यह जानने-समझने का प्रयास करते हैं कि बच्चों को पहले से क्या-क्या जानकारी या समझ है जो कि नई अवधारणा को समझने में मदद करेगी।</p> <p>6. बच्चों की वर्तमान समझ को आधार बनाते हुए नई समझ को विकसित करने पर काम करते हैं।</p> <p>7. एक अवधारणा कैसे दूसरी अवधारणा या अवधारणाओं से जुड़ी है, ये समझते हुए बच्चों के साथ उनके एक-दूसरे से संबंध को उदाहरण से समझने पर काम करते हैं।</p>
	<p>3. शिक्षण अधिगम सामग्री/ मॉडल / निरूपण (Teaching learning material / Models / Representation)– शिक्षण अधिगम सामग्री (TLM) के महत्त्व को समझना, उसका उपयोग किसी अवधारणा को बेहतर समझने या अभ्यास में कैसे मदद करता है, यह समझना। किस अवधारणा के लिए स्तर अनुसार क्या उचित सामग्री होगी इसका चयन ठीक से हो। यह भी समझना कि सामग्री केवल साधन मात्र है और उसे बच्चों को इसके माध्यम से अवधारणा का ज्ञान या अभ्यास कराते हुए अमूर्त तक ले जाना होगा।</p>	<p>8. शिक्षक ELPS के सिद्धांत के अनुसार कक्षा-कक्ष में काम करते हैं। जैसे कि-</p> <ul style="list-style-type: none"> • ठोस वस्तुओं (कंकड़/बीज... आसानी से मिलने वाली चीजों) के साथ अनुभव • बोलकर अनुभवों के बारे में बताना यानी भाषा का उपयोग (जैसे मात्रा के साथ संख्या नाम को जोड़ना) • इन्हीं प्रकार के कार्यों को फिर चित्रों के साथ करना या चित्रात्मक प्रस्तुति करना • प्रतीकों का प्रयोग (संख्यांक एवं संख्या नाम की पहचान और लिखना) • इस प्रक्रिया को ELPS कहा जाता है जहाँ E- Experience (अनुभव), L- Language (भाषा), P- Picture (चित्र), S- Symbol (प्रतीक) <p>9. अवधारणा की बेहतर समझ के लिए उचित शिक्षण सहायक सामग्री का उपयोग करते हैं।</p>
	<p>4. स्तर अनुसार सीखने के प्रतिफल (Grade appropriate learning outcomes)– गणित के उच्च लक्ष्यों को प्राप्त करने हेतु सीखने के प्रतिफलों पर केन्द्रित शिक्षण प्रक्रियाएँ करना।</p>	<p>10. शिक्षक कक्षा अनुसार प्रत्येक अवधारणा के लिए सीखने के प्रतिफलों को ध्यान में रखकर शिक्षण करवाते हैं।</p> <p>11. अपनी योजना एवं प्रक्रियाओं में खेल गतिविधियों को शामिल करते हैं, जिससे बच्चों का रुझान बढ़े।</p> <p>12. बच्चों को सवाल करने और अपने विचार रखने के मौके देते हैं।</p> <p>13. बच्चों के स्तर को ध्यान में रखकर शिक्षण योजना बनाते हैं।</p>

अवधारणा (Concept)	अवलोकन क्षेत्र (Observable Areas)	शिक्षण प्रक्रियाएँ (Teaching Practices)
<p>कक्षा 1 से 5 तक की प्रत्येक गणितीय अवधारणा के लिए</p>	<p>5. गणित पढ़ाने के उच्चतर लक्ष्य और उद्देश्य (Higher aims and objectives of teaching Mathematics)– बच्चों में कौशलों का विकास करना है जैसे कि अनुमान लगाना, पैटर्न को समझकर सामान्यीकरण करना, तर्क गढ़ना, मानस चित्रण (visualization) आदि। इस समझ को शिक्षण प्रक्रिया में शामिल करना।</p>	<p>14. गणित शिक्षण के उच्चतर उद्देश्यों व गणितीय कौशलों को बच्चों में विकसित करने को शिक्षण प्रक्रियाओं में शामिल करते हैं और उसी के अनुरूप अपनी योजना बनाते हैं।</p>
	<p>6. गणित विषय की प्रकृति को समझते हुए अपनी शिक्षण प्रक्रियाओं का चयन करते हैं (Understands the nature of Mathematics and designs the pedagogy accordingly)– शिक्षणशास्त्रीय सिद्धांतों की समझ एवं उनका गतिविधियों के बनाने और चयन में उपयोग कर पाना। ये समझना कि प्राथमिक स्तर पर ठोस (concrete) से शुरू करते हुए फिर अर्द्ध-मूर्त (semi-concrete) और फिर अमूर्त (abstract) तक बच्चों को ले जाना होता है।</p>	<p>15. गणित की प्रकृति को ध्यान में रखकर शिक्षण योजना बनाते हैं।</p> <p>16. शिक्षक किसी भी अवधारणा पर काम की शुरुआत ठोस (concrete) अनुभवों / सामग्री से करते हैं और फिर धीरे-धीरे चित्रों (semi-concrete) और फिर अमूर्त-चिह्नों (abstract-symbols) के साथ काम करते हैं।</p>
	<p>7. आकलन (Assessment)– आकलन के विभिन्न तरीकों, जैसे गृहकार्य, वर्कशीट, प्रोजेक्ट आदि का प्रयोग शिक्षण प्रक्रिया के हिस्से के तौर पर करना। साथ ही किए गए आकलन की समीक्षा कर अपनी सीखने-सिखाने की प्रक्रियाओं में यथोचित बदलाव करना।</p>	<p>17. आकलन को सीखने की ही एक प्रक्रिया के रूप में देखते हैं और उसकी मदद से अपनी शिक्षण प्रक्रियाओं में यथोचित बदलाव करते हैं।</p> <p>18. बच्चों के जवाबों का विश्लेषण करते हैं और कहाँ बच्चे नहीं समझ रहे हैं, उस अनुसार अपनी योजना में बदलाव करते हुए पुनः कार्य करते हैं।</p> <p>19. सीखने की प्रक्रिया के साथ-साथ ही आकलन करते हैं, अपनी योजना को और समृद्ध करते हैं।</p> <p>20. आकलन के लिए कार्य-पत्रक, प्रोजेक्ट कार्य जैसे माध्यम का इस्तेमाल करते हैं।</p>

1.10 गणित विषय की प्रकृति

आम तौर पर ऐसी धारणाएँ रही हैं कि गणित एक कठिन विषय है। लेकिन कक्षा-कक्ष की गतिविधियों तथा पुस्तक के संदर्भों को बच्चों के दैनिक जीवन के अनुभवों तथा परिवेश से जोड़कर इसे रोचक व आसान बनाया जा सकता है। गणित सीखने का मतलब यांत्रिक तरीके से मानक विधियों का प्रयोग करते हुए सवाल हल करना नहीं है, बल्कि उसे तर्क और चिंतन में उपयोग करना तथा नई विधियाँ खोजना है। गणित विषय की अवधारणाएँ अमूर्त हैं। इन गणितीय अवधारणाओं या विचारों में निहित अमूर्तता का स्तर ऊपर की तरफ बढ़ने के साथ ही बढ़ता जाता है।

प्राथमिक कक्षाओं में पढ़ाए जाने वाला गणित इंसान के दैनिक जीवन के कामकाज से उपजे ठोस अनुभवों पर आधारित है, लेकिन आगे चलकर इसमें आदर्श, स्पष्ट, सुगठित परिभाषाओं तथा मान्यताओं पर आधारित नियमों का उपयोग करना होता है। शुरू में इसका ठोस अनुभवों से जुड़ा रहना ज़रूरी है। ये प्रारंभिक परिभाषाएँ तथा मान्यताएँ आगे चलकर गढ़े जा सकने वाले तर्क तथा क्रियाविधियों का आधार बनेंगी। गणित के मायने सिर्फ गणनाओं, कलन विधियों तथा नियमों को रटना नहीं है, बल्कि किन्हीं घटनाओं में आपसी संबंध खोजकर, उनके विश्लेषण से नए रास्ते को खोजना है।

गणित विषय की प्रकृति पर आधारित एक कार्यशाला का आँखों देखा हाल



थानू कुमार साहू छत्तीसगढ़ के बिलासपुर जिले के रहने वाले हैं। उन्होंने गणित विषय में एमएससी तक पढ़ाई की है। इसके बाद उन्होंने पाँच साल तक बिलासपुर के ही एक निजी विद्यालय में कक्षा 5 से 10 तक के बच्चों को गणित और विज्ञान विषय पढ़ाया है। इसी साल उनका चयन शिक्षा में काम करने वाली एक संस्था में हो गया है। थानू कुमार को बेमेतरा जिले के नवागढ़ ब्लॉक में स्थित 'शिक्षण सन्दर्भ केंद्र' पर नियुक्ति मिली है। यहाँ उन्हें सरकारी स्कूलों के शिक्षकों की क्षमता संवर्द्धन के लिए ज़ारी विभिन्न कार्यक्रमों में अपना योगदान देना है।

इस संस्था में आने के बाद से ही थानू को आए दिन नए-नए शब्द सुनने को मिल रहे हैं। ये शब्द उसकी संस्था में काम कर रहे साथियों या शिक्षकों द्वारा उपयोग किए जाते हैं। थानू को इनमें से कई शब्दों का सन्दर्भ और अर्थ दोनों ही समझ पाने में अक्सर मुश्किल होती है। अपनी सारी स्कूली और कॉलेज की पढ़ाई के दौरान थानू कुमार ने गणित विषय पढ़ते हुए तमाम सवाल हल किए थे। कुछ सरल लगे, जबकि कुछ कठिन भी लगते थे। फिर भी वह संतोषजनक नंबरों के साथ अपनी परीक्षा पास कर लेता था। थानू ने अपनी स्वयं की स्कूली शिक्षा और निजी स्कूल में शिक्षण के दौरान भी कभी 'गणित की प्रकृति' के बारे में कुछ नहीं सुना था। हाँ, गणित विषय क्यों पढ़ाया जाता है? गणित विषय पढ़ाए जाने के उद्देश्य क्या हैं? इस तरह के सवालों पर अवश्य उसने कुछ सुना था। यहाँ आने से पहले थानू जिस निजी स्कूल में पढ़ाता था, वहाँ पर ही एक स्टाफ मीटिंग के दौरान 'गणित शिक्षण के उद्देश्य' नाम का एक आलेख बाँटा गया था। जिसमें कुछ उदाहरण के साथ यह बात की गई थी कि आखिर गणित विषय के द्वारा हम अपने बच्चों को कौन-से कौशल अर्जित करने या निखारने के अवसर देना चाहते हैं। यह आलेख थानू को अच्छा लगा था।

इस नई संस्था में थानू कुमार को अब अच्छा लगने लगा था। सबसे खास बात यह थी कि लोग मिलनसार थे, एक दूसरे का ख्याल रखते थे और नए साथियों को सीखने-समझने में काफी मदद करते थे। थानू को गणित विषय बहुत अच्छा लगता है। यहाँ काम करते हुए अभी कुछ ही महीने बीते हैं, लेकिन थानू ने नवागढ़ ब्लॉक में काम कर रहे कई गणित विषय के शिक्षकों से अच्छी दोस्ती बना ली है। वह इन शिक्षकों के स्कूल जाकर बच्चों के शिक्षण में भी मदद करता है। इन कुछ महीनों में ही थानू को यह महसूस होने लगा था कि उसे 'गणित विषय की प्रकृति' और 'गणित शिक्षण के उद्देश्यों' पर और बेहतर समझ के साथ शिक्षकों के बीच जाना चाहिए। इन मुद्दों से सम्बंधित कुछ पठन सामग्री सन्दर्भ केंद्र के पुस्तकालय में उपलब्ध थी। जब भी समय मिलता, थानू इन्हें पढ़कर समझने का प्रयास करता था। उसके एक सहकर्मी ने किसी शिक्षक प्रशिक्षण मॉड्यूल से फोटोकॉपी कर चार पेज पढ़ने को दिए थे। लेकिन अपनी अन्य व्यस्तताओं के चलते थानू अभी इसे पढ़ नहीं सका था।

इसी दौरान जिला शिक्षण प्रशिक्षण संस्थान, बेमेतरा द्वारा 'गणित विषय की प्रकृति' शीर्षक से दो दिवसीय कार्यशाला का आयोजन किया गया। अपनी संस्था के प्रतिनिधि के रूप में थानू कुमार और उसकी एक साथी पूनम देवगन भी इस कार्यशाला में शामिल हुए। यहाँ पर पूरे बेमेतरा जिले से गणित विषय के शिक्षक-शिक्षिकाएँ आमंत्रित किए गए हैं। गणित विषय के दो वरिष्ठ शिक्षक- मोहनलाल वर्मा और राधेश्याम साहू यहाँ दक्ष प्रशिक्षक यानी MT के रूप में उपस्थित हैं। दोनों ही बहुत अनुभवी शिक्षक हैं तथा पिछले कई वर्षों से शिक्षक प्रशिक्षण करते आ रहे हैं। कार्यशाला का समय सुबह 10 बजे से शाम 4 बजे तक रखा गया है। दोपहर में भोजन अवकाश भी होना तय है। अतः प्रतिदिन दो-दो घंटे के दो सत्र पूरे किए जाने की योजना बनाई गई है। इस तरह इस दो दिवसीय कार्यशाला में कुल चार सत्रों के माध्यम से काम किया जाना है।

कार्यशाला का पहला दिन

सत्र एक: आपसी परिचय तथा गणित विषय की प्रकृति के बारे में लोगों की समझ **समय: 2 घंटे**
आज पहले दिन का पहला सत्र है। डाईट बेमेतरा के प्रधानाचार्य जी ने सभी का स्वागत किया और इस दो दिवसीय कार्यशाला की उपयोगिता के बारे में बताया। इसके बाद सभी लोगों ने मिलकर एक प्रेरणा गीत गाया। कार्यशाला में शामिल सभी संभागियों ने अपना परिचय दिया और उपस्थिति रजिस्टर में हस्ताक्षर किया। एमटी महोदय यानी राधेश्याम साहू जी ने अपना पहला सत्र शुरू किया। सबसे पहले उन्होंने बोर्ड पर जाकर बड़े-बड़े अक्षरों में लिख दिया- गणित विषय की प्रकृति। इसके बाद उन्होंने सभी संभागियों की तरफ घूमकर सवाल किया।

‘गणित विषय की प्रकृति से आप क्या समझते हैं?’- राधेश्याम साहू जी

‘सर हमारे आस-पास के परिवेश और प्रकृति में बहुत सारा गणित छिपा हुआ है। जैसे बर्तन की बनावट देखकर हम छोटा, बड़ा, घनाभाकार और बेलनाकार आदि से परिचय करा सकते हैं।’- शिक्षक गोपाल जी ने कहा।

‘गोपाल जी, आप जो बात कह रहे हैं वह अपनी जगह ठीक है, लेकिन अभी मैं ‘प्रकृति या परिवेश में स्थित गणित’ के बारे में नहीं बल्कि ‘गणित विषय की प्रकृति’ के बारे में सवाल कर रहा हूँ।’- राधेश्याम जी ने कहा।

‘सर, प्रत्येक मनुष्य का एक स्वभाव या प्रकृति होती है। इसी तरह गणित की प्रकृति भी होगी। जैसे किसी को वह कठिन लगती है, जबकि किसी को सरल लगती है।- तीजबाई मैडम ने कहा।

राधेश्याम जी ने अलग-अलग ढंग से अपनी बात कही, लेकिन सदन से घूम-फिर कर कुछ इसी तरह की बातें आ रही थीं। अब उन्होंने अपने प्रोजेक्टर द्वारा दीवार पर एक पीपीटी दिखाई। इस पीपीटी में गणित विषय की प्रकृति के बारे में कुछ महत्वपूर्ण बातें लिखी हैं। साथ ही एक बवंडर जैसी तस्वीर भी है। जिसका दायारा ऊपर की तरफ बढ़ने पर बड़ा होता जा रहा है।

गणित विषय की प्रकृति

1. गणित की अवधारणाएँ अमूर्त हैं।
2. गणित की अवधारणाओं में सर्पिलाकार सोपानक्रमिकता है।
3. गणित की अवधारणाएँ सार्वभौमिक हैं।
4. गणित की अवधारणाएँ तार्किक हैं। इनमें सामान्यीकरण किया जा सकता है।
5. गणित की अवधारणाएँ स्वयंसिद्ध मान्यताओं पर आधारित हैं।



सभी संभागी इन बिन्दुओं को अपनी कॉपी में लिखने लगे। सुगमकर्ता ने कहा कि इन बातों को सिर्फ लिखने भर से कोई फायदा नहीं है, इन्हें समझना भी ज़रूरी है। आप लोग बताइए, यहाँ लिखे इन बिन्दुओं से आप क्या समझ रहे हैं? क्या कुछ ऐसी बातें हैं जो आप नहीं समझ पा रहे हैं?

संभागी अपनी बात कहते जा रहे थे और सुगमकर्ता इनमें से महत्त्वपूर्ण बातों को बोर्ड पर लिखते जा रहे थे। इन बिन्दुओं पर आगे विस्तार से बात करने में आसानी होगी।
‘सर, स्प्रिंग जैसी तस्वीर क्या है?’ – दूजराम सर ने सवाल किया।

‘यह चित्र हमारे प्रशिक्षण मॉड्यूल में बना है। कई लोग गणित विषय की प्रकृति को समझने के लिए इस चित्र की मदद लेते हैं। जैसे गणित शुरू तो होता है हमारे रोज़मर्रा के कामकाज से, लेकिन जैसे-जैसे हम ऊपर बढ़ते हैं तो गणित की अवधारणाएँ अमूर्त होती जाती हैं। कई ऐसे सन्दर्भ और अवधारणा आने लगते हैं जिनका सीधा-सीधा हमारे रोज़ के कामकाज से जुड़े अनुभव से कोई जुड़ाव नहीं होता है। यह चित्र यही सब दर्शाता है। इस पर हम आगे और बात करेंगे, अभी कुछ और लोगों के विचार सुनते हैं।’ – प्रशिक्षक राधेश्याम जी ने कहा।

‘इश्वर सब जगह है। कण-कण में है। हम सभी के हृदय में है। अतः इश्वर अमूर्त है। इसी तरह गणित भी अमूर्त है। गणित भी प्रकृति के कण-कण में है।’ – राजाराम जी ने कहा।

‘सर, सर्पिलाकार, सोपानक्रमिकता और स्वयंसिद्ध मान्यताओं के बारे में बताइए। हमने इनके बारे में कभी कुछ नहीं पढ़ा है।’ – भोलाराम जी ने कहा।

‘सोपानक्रमिकता का मतलब जैसे एक सीढ़ी से दूसरी सीढ़ी चढ़ते हुए आगे बढ़ते हैं। सर्पिलाकार क्रमिकता का मतलब स्प्रिंग जैसा और स्वयंसिद्ध का मतलब जिसे सिद्ध करने की ज़रूरत नहीं है।’ – रेणुबाला मैडम ने कहा
‘क्या आप इनके कुछ उदाहरण देना चाहेंगे?’ – सुगमकर्ता ने कहा।

‘गणित अमूर्त है, इसीलिए बच्चों को बहुत मुश्किल आती है। अमूर्त मतलब जिसे हम देख नहीं सकते हैं। सार्वभौमिक मतलब जो सब जगह एक जैसा ही है। मतलब गणित पूरी दुनिया में एक जैसा है। इसमें कोई बदलाव नहीं होता है। जैसे दो और दो मिलकर चार होते हैं। तो हम कहीं भी चले जाएँ, सभी जगह हमें दो और दो मिलाने पर चार ही प्राप्त होगा।’ – मुकेश जी ने बताया।

‘देख तो सकते हैं, घन, घनाभ, आयत, वृत्त सब कुछ देख सकते हैं, यह भी देख सकते हैं कि दो और दो मिलकर चार होता है।’ – कमला मैडम बोली।

‘गणित विषय तार्किक चिंतन को बढ़ावा देता है। बच्चों की तर्कशक्ति का विकास होता है। आगमन और निगमन विधि से हम सामान्यीकरण कर सकते हैं। पैटर्न देख कर हम फॉर्मूला भी बना लेते हैं। जैसे 2, 4, 6, 8, 10, को देखकर हम बता सकते हैं कि खाली स्थान में 12 आएगा। यह आगमन विधि है।’ – शिक्षिका फातिमा ने कहा।

‘... और निगमन विधि का भी एक उदाहरण बताइए।’ – सुगमकर्ता ने कहा।

‘सर, याद नहीं आ रहा। आप बता दीजिए।’ – शिक्षिका फातिमा जी ने कहा।

‘ठीक है। आप लोगों की तरफ से कई विचार आ गए हैं। हमने इन सवालों को लिख लिया है। अभी कुछ देर का ब्रेक है। अगले सत्र में हम लोग इन्हीं बिन्दुओं पर और गहराई में जाकर बात करेंगे।

इस तरह पहला सत्र समाप्त हुआ। सभी लोगों ने डाईट द्वारा उपलब्ध कराया गया अल्पाहार लिया। आपस में बातचीत की। सदन में उठे कुछ सवालियों पर लोग अभी भी सोच-विचार कर रहे थे। कुछ देर के इस विराम के बाद दूसरा सत्र शुरू हुआ।

सत्र दो: अमूर्त तथा सर्पिलाकार सोपानक्रमिकता को समझना

समय 2 घंटे

दूसरे सत्र में अब तक की गई बातचीत और लोगों के सवाल-जवाब से निकले कुछ महत्वपूर्ण बिन्दुओं पर कुछ और गहराई में जाकर काम करने की शुरुआत हुई। इस सत्र की बागडोर मोहनलाल जी के हाथों में है। राधेश्याम जी अब सहयोगी की भूमिका में हैं। वे बातचीत से निकल रहे मुख्य मुद्दों को बोर्ड पर लिख रहे हैं, साथ ही जहाँ आवश्यकता हो, अपनी बात भी जोड़ देते हैं।

मोहनलाल जी ने अपनी बात शुरू की। उन्होंने सभी संभागियों से कहा— ‘आप लोगों ने कई महत्वपूर्ण सवाल पूछे हैं। कई महत्वपूर्ण विचार भी आए हैं। अब इस सत्र की बातचीत में हम सब आपस में मिलकर कुछ और भी बेहतर उदाहरण खोजने की कोशिश करेंगे। सबसे पहले तो यह समझ लीजिए कि हम गणितीय अवधारणाओं की बात कर रहे हैं। पीपीटी में दिखाए गए ये सारे बिंदु गणित की अवधारणाओं के बारे में हैं। हम एक-एक कर इन सभी पर विस्तार से बात करते हैं।’

यह कहते हुए मोहनलाल जी ने सभी का ध्यान प्रोजेक्टर द्वारा दीवार पर दिखाई जा रही इस पीपीटी की तरफ आकर्षित किया। यहाँ गणित विषय की प्रकृति से सम्बंधित कुछ बातों को उदाहरण के साथ प्रस्तुत किया गया है। इन्हें देखकर पढ़ते हुए और आपस में विचार-विमर्श करते हुए बातचीत आगे बढ़ी।

1. गणित की अवधारणाएँ अमूर्त हैं।

सुगमकर्ता की भूमिका में सत्र संचालन कर रहे मोहनलाल जी ने बोर्ड पर एक रेखा बना दी और सभी से इसके बारे में पूछा— यह क्या है?



‘रेखा है, यह अनंत से अनंत की ओर जाती है और इसकी कोई चौड़ाई नहीं होती।’— एक शिक्षक ने कहा। ‘आप सभी लोग बताइए, क्या यह ठीक है? या इसमें कुछ सुधार करने की आवश्यकता है?’— सुगमकर्ता ने कहा।

फातिमा जी ने अपने स्मार्टफोन की मदद से एनसीईआरटी की गणित पाठ्यपुस्तक में दी गई युक्लिड के अनुसार रेखा की परिभाषा खोज ली थी। सुगमकर्ता से अनुमति लेकर उन्होंने यह बोर्ड पर लिख दिया। ‘रेखा— रेखा (Line) चौड़ाई रहित लम्बाई होती है।’

अब सुगमकर्ता ने एक बार फिर सभी से पूछा— ‘क्या आपको बोर्ड पर बनाई गई रेखा और यहाँ लिखी रेखा की परिभाषा में कोई समानता या कोई फ़र्क दिख रहा है?’

‘नहीं सर, दोनों एक ही है’— सभी ने कहा।

‘ध्यान से देखकर बताइए। क्या यहाँ बनाई गई रेखा में वास्तव में कोई चौड़ाई नहीं है?’ – सुगमकर्ता ने पूछा।
‘है तो सर, पर उसे नगण्य मानते हैं’ – तीजबाई मैडम ने कहा।

‘जी हाँ, लेकिन इस कथन में कही गई शर्त के अनुसार, यदि हम कोई रेखा बनाना चाहें तो क्या बना सकते हैं?’ – सुगमकर्ता ने पूछा।

‘नहीं सर, कितनी भी पतली-से-पतली रेखा बनाई जाए, उसकी कुछ-न-कुछ चौड़ाई तो होगी ही। बिना चौड़ाई वाली रेखा तो कोई भी नहीं बना सकता। – मुकेश जी ने कहा।

‘जी, सही कहा आपने। रेखा की अवधारणा असल में एक गणितीय विचार है। इसे हम समझ सकते हैं, लेकिन हूबहू बनाना संभव नहीं है। जैसे ही हम इसे बनाएंगे, यह अपनी मूल परिभाषा से दूर हो जाएगी। यह एक उदाहरण है अमूर्तता का। इस तरह हम कई अन्य उदाहरण देख सकते हैं। जैसे यदि मैं आपसे कहूँ- मुझे दो दीजिए।’

सुगमकर्ता यह कहते हुए हाथ फैलाकर एक शिक्षक के पास चले गए और उन्हें संबोधित करते हुए एक बार फिर कहा- ‘मुझे दो दीजिए’।

सामने बैठे शिक्षक पहले तो हड़बड़ा गए, फिर उन्होंने अपने सामने रखे दो पेन उठाकर उनके हाथों में रख दिया।

‘अरे ये तो आपने मुझे पेन दिया है। मैंने तो आपसे दो माँगा था। आप मुझे दो दीजिए।’

पास बैठे एक अन्य शिक्षक ने जल्दी से एक कागज़ की चिट फाड़कर उस पर 2 लिखा और सुगमकर्ता के हाथों में रख दिया।

‘यह तो कागज़ की चिट है, जिसमें कोई चिह्न बना है। मैंने तो आपसे दो माँगा है।’ – सुगमकर्ता ने हँसते हुए कहा।

‘बिना कोई वस्तु उठाए, भला ‘दो’ कैसे दिया जा सकता है? आप ही बताइए। हमें तो समझ में नहीं आ रहा है। – एक शिक्षिका ने खीझते हुए कहा।

सुगमकर्ता ने मुस्कराते हुए सबकी तरफ देखा।

‘यही तो मैं आपको समझाना चाहता हूँ। दो पेन, दो चिड़िया या दो रुपये में कुछ भी समान

प्रकार	शून्य	एक	दो	तीन	चार
तमिल संख्यांक	0	௧	௨	௩	௪
तेलुगु संख्यांक	౦	౧	౨	౩	౪
लेपचा संख्यांक	०	१	२	३	४
हिंदू अरबिक संख्यांक	0	1	2	3	4
देवनागरी संख्यांक	०	१	२	३	४

नहीं है, सिवाय इस विचार के कि ये सब 'दो' हैं। असल में 'दो' एक अमूर्त विचार है, जिसे हम मातात्मक रूप से किन्हीं भी वस्तुओं पर आरोपित कर सकते हैं। इसे बोलने के लिए शब्द और लिखने के संकेत अलग-अलग भाषा में अलग-अलग हो सकते हैं, लेकिन 'दो' का विचार समान रहेगा।

अब जब हम किन्हीं भी दो चीजों को 'दो' कहते हैं तब हम प्रत्येक को एक इकाई के रूप में मानते हैं। भले ही वे आकार आदि नज़रिए से ठीक बराबर न भी हों तो भी हम उन्हें दो ही कहते हैं। उदाहरण के लिए जब आप यह कहते हैं कि मेरे पास दो बकरी है तब यह ज़रूरी नहीं कि ये बकरियाँ आकार और वज़न से भी बराबर हों। इस तरह देखें तो हमारी सारी संख्याएँ और उनके साथ की जाने वाली संक्रियाएँ भी अमूर्त हैं।

एक बार मैंने अपनी कक्षा में पढ़ाते हुए एक बच्चे से पूछा— 'बताओ, तुम्हारे बगीचे में कितने आम के पेड़ हैं?' उसने कहा— 'चार'।

अब देखिए, वह बच्चा अभी स्कूल में मौजूद था, अपने घर से दूर। आम के पेड़ अभी उसके पास मौजूद नहीं थे। लेकिन फिर भी उसने गिनकर बता दिया कि उसके घर पर चार आम के पेड़ हैं। इस तरह देखें तो हम कह सकते हैं कि वस्तुओं को हम अमूर्त रूप में भी गिन सकते हैं। वे भले ठोस रूप में अभी मौजूद नहीं हैं, लेकिन हम उनकी माता के बारे में कुछ कह पाने की स्थिति में हैं।

एक शिक्षक ने सवाल किया— 'मैंने कहीं पर मूर्त, अर्द्ध-अमूर्त और अमूर्त के बारे में पढ़ा था। यह अर्द्ध-अमूर्त क्या है?'

'आपने मेरे हाथों में दो पेन रखे हैं। यहाँ तो मूर्त (concrete) रूप में दो पेन मौजूद हैं। लेकिन हम दो पेन का चित्र बनाकर भी इन्हें दर्शा सकते हैं। यह चित्र अर्द्ध-अमूर्त (semi-abstract) का एक उदाहरण है। हमारी पाठ्यपुस्तकों में कई ऐसी वस्तुओं के चित्र बने होते हैं जो हमारे दैनिक जीवन में मूर्त रूप से मौजूद हैं, जैसे- लोटा, गेंद, फूल, लड़का आदि। लेकिन पुस्तक में बने इन्हीं वस्तुओं के चित्र असल में अर्द्ध-अमूर्त कहे जाते हैं। कक्षाओं में ऊपर बढ़ते हुए एक ऐसा समय भी आ जाता है, जहाँ हम ठोस या चित्र का उपयोग किए बिना भी माता से सम्बंधित विचारों का आदान-प्रदान करते हैं। जैसे यह कथन कि रमेश के पास दो पेन हैं। यहाँ न तो ठोस रूप में दो पेन लाने की आवश्यकता हुई और न ही इनका चित्र बनाकर समझाना पड़ा। और तो और, यदि आप देखें तो संख्या नामों या संख्या चिह्नों के साथ आरोपित इन अमूर्त विचारों की ही सहायता से हम कह पाते हैं कि दो और तीन मिलकर पाँच बनते हैं। या फिर $2+3=5$ कह पाते हैं। इस तरह हम मूर्त से अर्द्ध-अमूर्त और फिर अमूर्त की तरफ बढ़ते हैं।'— मोहनलाल जी ने कहा।

अब हम अगले बिंदु की तरफ बढ़ते हैं, लेकिन आपके सोचने के लिए एक सवाल दे रहा हूँ। आप अपने आस-पास देख कर बताइए, कहाँ-कहाँ आपको वृत्त, आयत और वर्ग दिखता है? यह भी सोचिए कि ये अवधारणाएँ मूर्त हैं या अमूर्त? अपने जवाब के समर्थन में आपको अपना तर्क भी रखना होगा।

गणित की अवधारणाओं में सर्पिलाकार सोपानक्रमिकता है।

'अब जो बात मैं आपसे साझा करने जा रहा हूँ वह बहुत महत्वपूर्ण है। यहाँ हमें सर्पिलाकार और सोपानक्रमिकता

को समझना है। ज़रा सोचिए, आखिर क्यों यह कहा जाता है कि ऊपर कक्षाओं में बढ़ते हुए गणित की अवधारणाओं में निहित अमूर्तता का स्तर भी बढ़ता जाता है।’

उन्होंने सभी से एक सवाल पूछा- कृपया कोई बताइए कि सर्पिलाकार और सोपानक्रमिकता का क्या अर्थ है? ‘साँप जैसा जैसे साँप कुंडली मारकर बैठा रहता है, वैसे ही’- एक शिक्षक ने कहा। ‘हाँ, लेकिन साँप का गणित की अवधारणाओं से भला क्या वास्ता?— सुगमकर्ता ने कहा।

‘सर, मैं एक चित्र बनाकर बताना चाहता हूँ।’- एक शिक्षिका ने कहा।

शिक्षिका ने बोर्ड पर कुंडलीनुमा चित्र बना दिया। साथ ही बताया की यह चित्र उन्होंने एक प्रशिक्षण मॉड्यूल में देखा था।

‘इस चित्र का मतलब भी बताइए ... कुछ उदाहरणों के साथ अच्छा रहेगा’- सुगमकर्ता ने कहा। ‘जैसे हम लोग छोटे बच्चों के साथ ‘संख्या-पूर्व अवधारणाओं जैसे- छोटा, बड़ा, कम, ज़्यादा’ पर काम करते हैं। किसी ढेर में रखी वस्तुओं को देखकर कम-ज़्यादा के बारे में बात करते हैं। फिर कुछ चीज़ों को गिनना सिखाते हैं। यहाँ हमें संख्या नाम- जैसे एक, दो, तीन, चार आदि शब्दों की आवश्यकता पड़ती है। फिर हम मात्रा और संख्या नाम के माध्यम से और काम करते हैं। इसके साथ ही हम कुछ चिह्नों का उपयोग करते हैं। इन चिह्नों की सहायता से बच्चे संख्याओं को लिख सकते हैं, जैसे 1, 2, 3, 4 या 5 इस तरह हम दस या बीस तक गिनना और संख्याओं को पहचानना सिखाते हैं। फिर इन्हीं वस्तुओं और संख्याओं का उपयोग करते हुए हम बच्चों को जोड़ना और घटाना सिखाते हैं। यहाँ हमें कुछ और नए चिह्नों जैसे + और - के साथ ही = के चिह्नों का उपयोग भी सिखाना होता है। इबारती सवाल बनाते समय बच्चों के अनुभव और परिवेश पर आधारित उनके परिचित सन्दर्भ का इस्तेमाल करते हैं। आगे चलकर हम बार-बार जोड़ करते हुए गुणा की अवधारणा और बार-बार घटाव करते हुए भाग की अवधारणा पर भी काम करते हैं। इस तरह अगर हम देखें तो जैसे एक-एक सीढ़ी चढ़कर हम ऊपर पहुँचते हैं, उसी तरह गणित सीखते समय भी हमें अवधारणाओं की इस क्रमवार सीढ़ी का पालन करना पड़ता है। इसे ही हम गणित की अवधारणाओं की सोपानक्रमिकता कहते हैं।’- शिक्षिका ने अपनी बात को समझाते हुए कहा।

‘अपनी अभी तक की बात के समर्थन में कुछ और उदाहरण प्रस्तुत करते हुए उन्होंने कहा- ‘इस सवाल $47 \div 3$ को देखिए। इसे दो तरीकों से हल किया गया है। पहले तरीके को हम प्राथमिक कक्षा में उपयोग करते हैं। यहाँ संख्या ज्ञान, स्थानीय मान, घटाव, गुणा आदि की अवधारणाओं का उपयोग किया गया है। जबकि दूसरे हल पर तब ही जाया जा सकता है, जब बच्चों को स्थानीय मान की समझ एक और स्तर तक बन गई हो। जहाँ हम भिन्न की अवधारणा के बाद दशमलव की अवधारणा पर पहुँचते हैं। इसी दशमलव की अवधारणा का उपयोग करते हुए हम भाग के इस सवाल को हल करते हैं।

$47 \div 3$ $3 \overline{) 47} \quad 15$ $\begin{array}{r} 3 \overline{) 47} \\ \underline{-3} \\ 17 \\ \underline{-15} \\ 2 \end{array}$ <p>भागफल 15 शेषफल 2</p>	$47 \div 3$ $3 \overline{) 47} \quad 15.66...$ $\begin{array}{r} 3 \overline{) 47} \\ \underline{-3} \\ 17 \\ \underline{-15} \\ 20 \\ \underline{-18} \\ 20 \\ \underline{-18} \\ 2 \end{array}$
---	---

आगे चलकर दशमलव के भी कई रूप प्राप्त होंगे, जिसे हम

शांत, अशांत दशमलव के नाम से जानते हैं। फिलहाल अभी हम वहाँ तक नहीं जा रहे हैं, लेकिन यह उदाहरण आपको यह समझने में मदद करेगा कि गणित की इस सोपानक्रमिकता में ऊपर की तरफ बढ़ने पर और नई अवधारणाओं को समझने की आवश्यकता पड़ती है और कई बार पीछे सीखी-समझी गई अवधारणाओं को भी नए सन्दर्भों में एक बार फिर समझना होता है। एक और उदाहरण देखें तो किसी रस्सी की लम्बाई मापने के दौरान हमें संख्याओं और मापन की समझ का एक साथ उपयोग करना होता है।

‘सर, सर्पिलाकार के बारे में भी कुछ बताइए।’- एक शिक्षक ने कहा।

‘यह अच्छा सवाल है। सर्पिलाकार को समझने के लिए हम कुछ और उदाहरण देखते हैं। आप सभी लोग प्राकृत संख्या, पूर्ण संख्या और पूर्णांक के बारे में जानते हैं। हम जोड़ की अवधारणा को इन संख्याओं के सन्दर्भ में देखेंगे।’

प्राकृत संख्या- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11

इन जोड़ को देखिए और समझने का प्रयास कीजिए।

$$1+2= 3$$

$$2+3= 5$$

$$4+4= 8$$

क्या आप प्राकृत संख्याओं के जोड़ के बारे में कुछ खास बात कह सकते हैं?

‘शायद अभी तक लिए गए उदाहरणों को देख आप यह समझ बना लें कि दो प्राकृत संख्याओं का जोड़ हमेशा उन दोनों ही प्राकृत संख्याओं से ज़्यादा होता है। सारे उदाहरण इस कथन की पुष्टि भी करते हुए मिलेंगे। तो फिलहाल अभी के लिए हम यह सामान्य कथन बना सकते हैं कि ‘किन्हीं दो प्राकृत संख्याओं का जोड़ हमेशा उन दोनों ही प्राकृत संख्याओं से ज़्यादा होगा।’

अब हम पूर्ण संख्याओं के समुच्चय को लेते हैं। इनके कुछ जोड़ के सवाल हल करते हैं।

पूर्ण संख्या- 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13

$$2+3= 5$$

$$5+9= 14$$

$$7+7= 14$$

अभी तक के उदाहरणों को देखने पर आपको ऊपर बनाया गया सामान्य कथन सही ही लगेगा। तो हम लोग फिलहाल अपने सामान्य कथन पर टिके रहना चाहेंगे। लेकिन अब इससे आगे बढ़ने पर कुछ इस तरह के जोड़ भी करने पड़ सकते हैं।

जैसे-

$$0+4= 4$$

$$7+0= 7$$

$$0+0= 0$$

अब हम यह नहीं कह सकते कि 'किन्हीं दो पूर्ण संख्याओं का जोड़ सदैव उन दोनों ही पूर्ण संख्याओं से ज़्यादा होगा।' हमें इस कथन में कुछ परिवर्तन करना होगा। अब शायद यह कहना बेहतर होगा कि 'किन्हीं दो पूर्ण संख्याओं का जोड़ उन पूर्ण संख्याओं के बराबर या उनसे ज़्यादा भी हो सकता है।'

'यहाँ तक आपने देखा कि जो बात प्राकृत संख्याओं के सन्दर्भ में ठीक लगती थी, वह बात अब पूर्ण संख्याओं के सन्दर्भ में ठीक वैसी ही नहीं रह पाएगी। हमें अपने कथन को और परिष्कृत करना पड़ेगा। हमारी पुरानी समझ भी गलत नहीं थी। वह सही थी, लेकिन एक सीमा तक। नई परिस्थिति के अनुसार हमें नए ज्ञान को भी जगह देना पड़ेगा। नई समझ को आत्मसात करना होगा।'

अब एक बार फिर से हम एक नए संख्या समुच्चय में प्रवेश करते हैं। इसे पूर्णांक संख्याएँ कहते हैं।

पूर्णांक- -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5

पूर्णांक संख्याओं के जोड़ में किस तरह की संभावनाएँ हैं?

$$(+2) + (+4) = +6$$

$$(+7) + (+7) = +14$$

$$+ (+8) = +8$$

$$+ (-4) = -4$$

$$(-3) + (-5) = -8$$

इन उदाहरणों को ध्यान से देखिए। क्या आपको एक बार फिर से संख्याओं के जोड़ की अपनी समझ को बदलने और उसे नए ढंग से किसी सामान्य कथन में व्यक्त करने की आवश्यकता महसूस हो रही है?

अब इस नए सवाल के सन्दर्भ में हम यह सामान्य कथन नहीं कह सकेंगे। अब हमें जोड़ को इस नई परिस्थिति और सन्दर्भ में दोबारा समझना होगा। पूर्णांक संख्याओं का जोड़ उन दोनों पूर्णांक संख्याओं से कम, ज़्यादा या बराबर भी हो सकता है।

उदाहरण के लिए:

$$(-3) + (-5) = -8$$

$$(+3) + (+5) = +8$$

$$+ (+1) = +1$$

$$0 + 0 = 0$$

इन उदाहरणों से हम समझ सकते हैं कि गणित विषय में ऊपर की तरफ बढ़ने के साथ-साथ ही कोई अवधारणा बार-बार घूमकर नए सन्दर्भों में आती है। उस अवधारणा को और उसके अर्थों को हम इन नई परिस्थितियों के सन्दर्भ में नए ढंग से समझते हैं। आमतौर पर सर्पिलाकार शब्द का उपयोग इसी सन्दर्भ में कर लिया जाता है। लेकिन यह एक अच्छा शब्द नहीं है। इसे अंग्रेजी में Spirality कहते हैं। यह शब्द गणित के spiral nature को ज़्यादा बेहतर तरीके से अभिव्यक्त करता है।

यहाँ हमने देखा कि जोड़ की अवधारणा बार-बार आ रही है। हर बार हमें जोड़ की अवधारणा को नए नज़रिए से देखने-समझने की आवश्यकता महसूस हो रही है। हम कह सकते हैं कि गणित विषय में ऊपर की तरफ बढ़ते हुए बार-बार वही अवधारणा घूम-घूम कर नए स्वरूप में हमारे सामने आती है। हमें उसे नए सन्दर्भों में समझना और उपयोग करना होता है। यही अवधारणाएँ आगे चलकर नई अवधारणाओं के जन्म लेने और उनके विकसित होने का आधार बनाती हैं।

एक और उदाहरण में हम देख सकते हैं कि कक्षा 1 से 3 में हम बच्चों को संख्याओं के साथ संक्रिया करते हुए खाली स्थान (या खाली डिब्बे) भरने के अभ्यास देते हैं। लेकिन, प्राथमिक कक्षाओं से ऊपर जाते ही हम बीजगणितीय संकेतों का उपयोग करते हैं। निर्देशांक ज्यामिति में हम पूर्णांक संख्याओं, बीजगणितीय संकेतों, ज्यामितीय अवधारणाओं के साथ ही जोड़-घटाव की संक्रियाओं का भी उपयोग करते हैं। इस तरह हम देख सकते हैं कि गणित विषय में अवधारणाएँ एक-दूसरे के ऊपर आधारित हैं और बार-बार घूम-घुमाकर वापिस आती हैं। इसे हम यँ भी कह सकते हैं कि गणित की अवधारणाओं में सर्पिलाकार सोपानक्रमिकता है।

$$8 - 3 = \square$$

$$8 - \square =$$

$$\square - 3 = 5$$

$$8 - 3 = x$$

$$8 - y = 5$$

$$m - 3 = 5$$

$$(-3) + (-5) = -8$$

आज यहीं तक काम किया जा सका। समय हो गया था, अतः आज के दिन के लिए कार्यशाला का समापन किया गया। सुगमकर्ता ने सभी को कल समय पर उपस्थित होने के लिए निवेदन किया। साथ ही आज हुई बातचीत पर संक्षेप में डायरी लिखने को भी कहा।

कार्यशाला का दूसरा दिन

सत्र तीन: सार्वभौमिकता और सामान्यीकरण को समझना

समय: 2 घंटे

सुबह सभी ने मिलकर प्रेरणा गीत गाया और उपस्थिति रजिस्टर पर अपने-अपने हस्ताक्षर किए। इस तरह आज के सत्र शुरू किए गए। आज सुबह का पहला सत्र राधेश्याम सर को संचालित करना है। उन्होंने कुछ देर कल किए गए काम का दोहरान किया। साथ ही आज के सत्रों की योजना के बारे में संक्षेप में बताया। यह अच्छी बात थी कि इस सत्र की तैयारी करते समय उन्होंने बहुत ही व्यवस्थित तरीके से एक पीपीटी बना लिया था। इसमें महत्वपूर्ण बातों को बिन्दुवार लिख लिया था और उसके समर्थन में कुछ सवालों और चित्तों को भी शामिल कर लिया था।

प्रोजेक्टर की सहायता से बोर्ड के बगल की खाली दीवार पर यह पीपीटी साथ-साथ ही दर्शाए जा रहे थे। जहाँ ज़रूरत होती, वे श्यामपट्ट का उपयोग भी कर रहे थे। खास तौर से संभागियों की तरफ से आने वाले महत्वपूर्ण सवाल और उनकी तरफ से जोड़े गए बिन्दुओं को वे बोर्ड पर ही लिखते जा रहे थे।

‘सर, अभी सार्वभौमिक और स्वयंसिद्ध मान्यताओं पर बात करनी बाकी है। कृपया हमें इनके बारे में भी कुछ बताइए।’ – थानू कुमार ने एमटी सर को ध्यान दिलाने हुए कहा।

‘हाँ, बिल्कुल, मैं इन पर ही बात करने वाला था। आप लोग भी बताइए, आपके अनुसार सार्वभौमिक और स्वयंसिद्ध मान्यताओं का क्या मतलब है?’ – एमटी राधेश्याम जी ने कहा।

‘सार्वभौमिक का अर्थ तो यह हुआ कि सब जगह है और स्वयंसिद्ध मतलब जिसे सिद्ध करने की आवश्यकता न हो।’ – शिक्षक मोहन साहू ने कहा।

‘हाँ, आप काफी हद तक सही कह रहे हैं। क्या अपनी बात के समर्थन में कुछ उदाहरण भी रखना चाहेंगे?’ – एमटी राधेश्याम जी ने कहा।

‘सर, जैसे मेरे लिए भी $2+2=4$ है और आप के लिए भी $2+2=4$ ही होगा। दुनिया में कोई भी यह नहीं कह सकता कि उसके लिए $2+2=5$ होगा। यह गणित के सार्वभौमिक होने का एक उदाहरण है। इसी तरह स्वयंसिद्ध के भी कुछ उदाहरण होंगे, लेकिन फिलहाल अभी मुझे ध्यान नहीं आ रहे हैं। स्कूल में गणित करते समय हम लोगों ने स्वयंसिद्ध का उपयोग किया था।’ – मनोज साहू ने जवाब देते हुए बताया।

‘ठीक है, मैं इन दोनों मुद्दों पर आपके सामने कुछ और बातें रख रहा हूँ।’ – एमटी महोदय ने कहा।

1. गणित की अवधारणाएँ सार्वभौमिक हैं

‘सार्वभौमिकता को समझने के लिए हम मोहन सर द्वारा प्रस्तुत किए गए उदाहरण $2+2=4$ को ही देखें। यह सवाल हम भारत में हल कर रहे हों या चीन में, सर्दी में कर रहे हों या गर्मी में, कम तापमान पर कर रहे हों या अधिक तापमान पर ... जोड़ की अवधारणा में या इस सवाल में कोई परिवर्तन नहीं होगा। हाँ, संकेत चिह्न और सन्दर्भ अवश्य बदल सकते हैं। स्थान, परिस्थिति और काल बदल जाने से गणित की इन अवधारणाओं में कोई परिवर्तन नहीं होगा।

विज्ञान विषय में यदि देखें तो पानी (H_2O) पृथ्वी पर है, लेकिन अन्य कई ग्रहों पर यह उपलब्ध नहीं है। इसी तरह पानी बनने की रासायनिक अभिक्रिया (chemical reaction) को भी कुछ विशेष परिस्थितियों की आवश्यकता होगी। यह सब जगह एक जैसी नहीं हो सकती है। इसी तरह समाजशास्त्र विषय को लें तो वहाँ भी ‘लोकतंत्र’, ‘शादी’ या ‘सरकार’ का अर्थ अलग-अलग देशों में काफी विविध पाया जाएगा। लेकिन गणित विषय में यदि यहाँ पर ‘दो और दो मिलकर चार’ ($2+2=4$) है तो अन्य सभी जगहों पर भी ‘दो और दो चार’ ही है। त्रिभुज और चतुर्भुज को जैसे भारत में समझा जाएगा वैसे ही दुनिया के अन्य देशों में भी त्रिभुज और चतुर्भुज की अवधारणा के सभी गुणधर्म समान होंगे। इस तरह हम यह कह सकते हैं कि गणित की अवधारणाएँ सार्वभौमिक होती हैं।’

2. गणित की अवधारणाएँ तार्किक हैं और सामान्यीकरण किया जा सकता है।

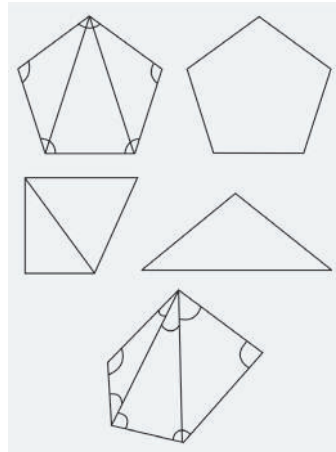
इस पंचभुज के सभी आंतरिक कोणों का योग ज्ञात कीजिए।

त्रिभुज के तीनों आंतरिक कोणों का योग 180° होता है।

चतुर्भुज के चारों कोणों का योग = $2 \times$ त्रिभुज के तीनों कोणों का योग।

इस बात का उपयोग करते हुए हम आगे बढ़ सकते हैं। हम इस पंचभुज को तीन त्रिभुजों के रूप में भी देख सकते हैं।

इस तरह, $3 \times 180^\circ = 540^\circ$



हम कह सकते हैं कि पंचभुज के सभी आंतरिक कोणों का योग 540° है।

आगमन विधि- इसी काम को और गहराई से देखने की कोशिश करें तो हम पाएंगे कि,

त्रिभुज में 3 भुजाएँ हैं, और आंतरिक कोणों का योग = $1 \times 180^\circ = 180^\circ$

चतुर्भुज में 4 भुजाएँ हैं, और आंतरिक कोणों का योग = $2 \times 180^\circ = 360^\circ$

पंचभुज में 5 भुजाएँ हैं, और आंतरिक कोणों का योग = $3 \times 180^\circ = 540^\circ$

किसी षट्भुज में 6 भुजाएँ हैं, तो इसके आंतरिक कोणों का योग क्या होगा?

ऊपर के उदाहरण में हम एक पैटर्न देख सकते हैं। इस पैटर्न की सहायता से हम सामान्यीकरण कर सकते हैं। बहुभुज में जितनी भुजाएँ हैं, उसमें से दो कम करना है। प्राप्त उत्तर को 180 से गुणा करना है।

तो इस तरह षट्भुज में 6 भुजाएँ हैं। अतः $(6-2) \times 180^\circ = 4 \times 180^\circ = 720^\circ$ हम इस सामान्यीकरण को आगे बढ़ा सकते हैं। हम 7 भुजा, 8 भुजा, 9 भुजा ... या इससे भी कहीं बहुत ज़्यादा भुजाओं वाले (मान लेते हैं अनंत भुजा, यानी n भुजा वाले) बहुभुज के आंतरिक कोणों के बारे में कल्पना कर सकते हैं।

किसी बहुभुज में n भुजाएँ हैं, तो उसके आंतरिक कोणों का योग होगा, $(n-2) \times 180^\circ$ ।

इस तरह हम आगमन विधि से आगे बढ़ते हुए एक सामान्यीकरण पर पहुँचे और बहुभुज के आंतरिक कोणों का योग निकालने का सूत्र प्राप्त कर सकते हैं।

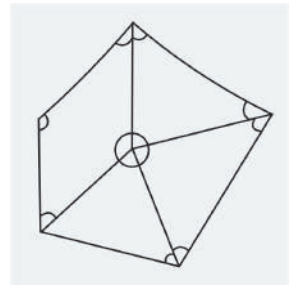
$$(n-2) \times 180^\circ$$

निगमन विधि- एक बार फिर हम पंचभुज के आंतरिक कोणों का योग ज्ञात करने का प्रयास करेंगे। इस बार हम अलग तरीका इस्तेमाल करेंगे। इस पंचभुज के केंद्र में कोई एक बिंदु मान लिया जाए। अब इस बिंदु को प्रत्येक कोने से जोड़ दिया जाए। इस तरह पंचभुज के भीतर 5 त्रिभुज बन जाएंगे।

हम जानते हैं कि एक त्रिभुज के आंतरिक कोणों का योग 180° होता है।

अतः पाँच त्रिभुजों के आंतरिक कोणों का योग $5 \times 180^\circ = 900^\circ$ होगा।

लेकिन हमें तो पंचभुज के आंतरिक कोणों का योग ज्ञात करना था। इस गणना में हमने केंद्र पर बन रहे सभी कोणों को भी शामिल कर लिया है।



केंद्र पर बन रहे सभी कोणों को जोड़ने पर हम पाएंगे कि एक वृत्त की परिधि-सी बन रही है। यह 360° है।

तो $900^\circ - 360^\circ = 540^\circ$ ।

अब सवाल बनता है कि यह कैसे तय किया जाए कि वृत्त की यह परिधि 360 डिग्री का कोण ही बनाती है। यह हमारे पूर्वजों ने मान लिया था (इसका ऐतिहासिक सन्दर्भ भी है) और इसे ही मानते हुए हम भी आगे बढ़ रहे हैं। आज यदि कोई यह कहे कि नहीं जी, मैं तो यह मानता हूँ कि एक चक्र 200 डिग्री होता है, तो हमें अपनी सारी ज्यामिति को बदलना पड़ जाएगा। इस रूप में देखें तो आगमन और निगमन, दोनों ही तरह की

विधियों में हम तर्कों की शृंखला बना रहे हैं और उसके सहारे 5, 6, 7, 8... या अनंत भुजाओं वाले किसी भी बहुभुज के आंतरिक कोणों के योग की गणना कर पा रहे हैं। इसके मूल में ज्ञान की सबसे आधारभूत इकाई है। 'त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180 डिग्री होता है', इस बात को साबित करने के लिए हम इस कथन का सहारा लेते हैं कि सरल रेखा पर 180 डिग्री का कोण बनता है।

कोई कह सकता है कि यह कैसे तय होगा कि सरल रेखा 180 डिग्री का कोण ही बनाती है। इसके कारण खोजने के लिए हमें इस कथन का सहारा लेना होगा कि एक चक्कर 360 डिग्री का कोण बनाता है।

हमारे पूर्वजों का यह मानना कि एक चक्कर 360 डिग्री का होता है, इन सभी तर्कों की शृंखला का मूल आधार है। यदि इस बात को खारिज कर दिया जाए तो हमारे आगे के तर्क भी धराशायी हो जाएंगे। इस उदाहरण से हम समझ सकते हैं कि गणित विषय में तर्क का महत्त्व है। यह तर्क आगमन या निगमन दोनों ही विधियों से आगे बढ़ता है, लेकिन मूल में निगमन तर्क ही छिपा है।

सभी संभागी सक्रिय भागीदारी कर रहे थे। वे अपने सवाल पूछने के साथ-साथ ही अपनी कॉपी में कुछ बातों को लिखते भी जा रहे थे। थानू कुमार भी बहुत ध्यान से ये सब बातें सुन रहे थे और अपनी डायरी में नोट कर रहे थे। उन्होंने कहीं पढ़ा था कि प्रत्येक शिक्षक प्रशिक्षक के पास उसकी एक डायरी होनी चाहिए। यह डायरी उसे आवश्यकता पड़ने पर बहुत मदद करती है।

सत्र चार: स्वयंसिद्ध मान्यताएँ- अभिगृहीत (axioms) और अभिधारणा (postulates) समय: 2 घंटे

4. गणित की अवधारणाएँ स्वयंसिद्ध मान्यताओं पर आधारित हैं।

'स्वयंसिद्ध मान्यताओं की बात आम तौर पर लोगों को बहुत मुश्किल लगती है, लेकिन यदि आप इसे गौर से देखें तो पाएंगे की इन्हें समझना बहुत आसान है।' - एमटी सर ने कहा।

'हम प्रत्येक कक्षा में इनका उपयोग कर रहे होते हैं, हमारी ज्यामिति, अंकगणित और बीजगणित इन स्वयंसिद्ध मान्यताओं पर ही टिकी हुई हैं। ये बातें इतनी सामान्य हैं कि इन पर काम करते हुए या इन्हें इस्तेमाल करते हुए अक्सर हमारा ध्यान इस तरफ नहीं जाता है। उदाहरण के लिए मैं आपके सामने बोर्ड पर कुछ सवाल लिख रहा हूँ। आपमें से कोई भी आकर इन्हें हल कीजिए।'

सर ने बोर्ड पर ये तीन सवाल लिख दिए। अलग-अलग शिक्षक-शिक्षिका बारी-बारी से बोर्ड पर आकर सवाल हल करते हुए अपनी बात रखते गए। जहाँ आवश्यकता पड़ी, सर ने कुछ पूरक सवाल भी पूछे।

सवाल 1: यदि $a=b$ है, और $b=c$ है, तो हम कह सकते हैं कि होगा। बताइए, इस खाली स्थान में क्या लिखा जा सकता है?

'हम कह सकते हैं कि $a=c$ है' - कई लोगों ने एक साथ कहा।

ठीक है, अब यदि मैं आपसे कहूँ कि इसे सिद्ध कीजिए। तो आप कैसे सिद्ध करेंगे?

‘सर, इसे सिद्ध करने की क्या ज़रूरत है! यह तो स्पष्ट दिख ही रहा है। देखिए, यदि $a=b$ है और $b=c$ है तो अपने आप ही $a=c$ हो जाएगा।’ – गीता करमा मैडम ने बोर्ड पर लिखकर इसे समझाया।

सवाल 2:+4= 15 और $x-5= 9$ को हल कीजिए।

आफ़ताब हुसैन सर बोर्ड पर आए और ज़रा-सी देर में दोनों ही सवालों को हल करके वापिस अपनी जगह जाकर बैठ गए।

$$\text{.....}+4= 15$$

$$\text{.....}= 15-4$$

$$\text{.....}= 11$$

अतः,11.....+4= 15 होगा।

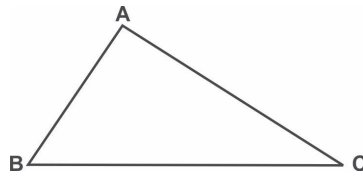
इसी तरह, $x-5= 9$ को भी हल करेंगे।

$$x-5= 9$$

$$x= 9+5$$

$$x= 14$$

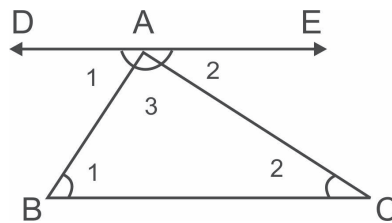
सवाल 3: एक त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180 डिग्री होता है। इसे सिद्ध कीजिए।



इस बार एक साथ दो लोग बोर्ड पर पहुँच गए। राधा मैडम और भानू प्रताप सर, दोनों ने इस सवाल को अपने-अपने तरीके से बोर्ड पर हल कर दिया था।

राधा मैडम का तरीका– उन्होंने त्रिभुज ABC के शीर्ष बिंदु A से होकर जाती हुई और BC के समानांतर एक नई रेखा DE बना दिया। त्रिभुज के तीनों आंतरिक कोणों को 1, 2 और 3 नाम दे दिया और इस चित्र की सहायता से प्राप्त हो रही कुछ जानकारी को इस तरह बोर्ड पर लिख दिया।

यहाँ, DE समानांतर है BC के, अतः हम कह सकते हैं:



$$\angle CBA = \angle DAB$$

$$\angle BCA = \angle CAE$$

$$\angle 3 = \angle 3$$

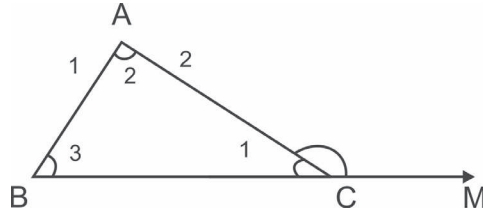
$$\text{अतः, } \angle CBA + \angle BCA + \angle 3 = \angle DAB + \angle CAE + \angle 3$$

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3$$

यदि $\angle DAB + \angle CAE + \angle 3$ को देखें तो यह एक सरल रेखा है। सरल रेखा 180 डिग्री का कोण बनाती है।

अतः, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180$ डिग्री

भानू प्रताप सर का तरीका: भानू सर ने त्रिभुज के आधार BC को आगे बढ़ाते हुए M तक पहुँचा दिया। इस तरह त्रिभुज ABC के लिए एक बाह्य कोण ACM बन गया था।



BM एक सरल रेखा है। अतः $\angle ACM = \angle 2 + \angle 3$

और $\angle BCA + \angle ACM = 180$ डिग्री

तो $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180$ डिग्री

अतः त्रिभुज के तीनों कोणों का योग होगा 180 डिग्री।

सदन में सभी लोग इन दोनों ही हल को सही कह रहे थे। लेकिन एमटी महोदय यह कहते थे कि प्रत्येक चरण पर जो भी काम किया जा रहा है, साथ-साथ ही उसका कारण भी लिखना चाहिए। इस मुद्दे को और ज़्यादा न उलझाते हुए उन्होंने अभी तक अलग-अलग लोगों द्वारा हल किए तरीके से जुड़े कुछ बारीक सवाल लोगों के सामने रखे। साथ ही इन पर सबकी राय और विचार भी आमंत्रित किया।

सवाल 1: यदि $a=b$ है और $b=c$ है, तो हम कह सकते हैं कि होगा। बताइए, इस खाली स्थान में क्या लिखा जा सकता है?

इसे हल करते हुए आप सभी ने कहा कि यदि $a=b$ है और $b=c$ है तो अपने आप ही $a=c$ हो जाएगा। इस बात को कैसे सिद्ध करेंगे? या यह कहने के पीछे गणितीय आधार क्या है?

सवाल 2:+4= 15 और $x-5= 9$ को हल कीजिए।

इन सवालों को हल करते हुए आप सभी बराबर के निशान के बाईं तरफ की संख्याओं को दाहिनी तरफ ले जाकर उनका चिह्न बदल रहे हैं।

.....+4= 15 को हल करते हुए= 15-4

या $x-5= 9$ को हल करते हुए आपने लिखा $x-5= 9$

अतः, $x= 9+5$

$x= 14$

यहाँ भी सवाल पूछा जा सकता है, आखिर संख्याएँ बाएँ से दाहिने और दाहिने से बाएँ क्यों भेजी जा रही हैं? इस तरह पक्षांतर करने पर आखिर संख्याओं के चिह्न क्यों बदल रहे हैं?

सवाल 3: एक त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180 डिग्री होता है। इसे सिद्ध कीजिए।

सुगमकर्ता ने कहा- 'राधा मैडम, आपने त्रिभुज ABC के शीर्ष से एक सरल रेखा DE बनाई है। और भानू सर आपने उसी त्रिभुज ABC के आधार BC को आगे तक ले जाकर सरल रेखा BM बना दिया है। आप दोनों ने ऐसा क्यों किया है? और ऐसा करने का आधार क्या है? भाई मैंने तो एक त्रिभुज बनाकर दिया था। आपने उसमें और नई रचनाएँ किस आधार पर कर ली हैं? यह करने की अनुमति कहाँ से मिलती है?'

राधा मैडम ने कहा- 'सर, स्कूल में यही बताया गया था कि हम किसी त्रिभुज के ऊपर से कोई नई रेखा बना सकते हैं। उसके आधार को भी आगे बढ़ा सकते हैं। स्कूल में सिखाया गया था कि किसी भी सरल रेखा को दोनों ही दिशाओं में अनंत तक बढ़ाया जा सकता है। इसीलिए मैंने त्रिभुज ABC के आधार के समानांतर एक नई सरल रेखा DE को बना लिया।'

इसी तरह प्रत्येक सवालियों पर लोगों ने अपनी जानकारी साझा की। मुख्य रूप से यह बात निकलकर आ रही थी कि क्योंकि स्कूल में हमें ऐसा ही करना सिखाया गया था अतः आज भी हम ऐसा ही कर रहे हैं। प्रायः बहुत सारे लोग ऐसा करने का कारण या आधार के बारे में विचार ही नहीं करते हैं।

सर ने सभी का ध्यान पीपीटी में लिखी कुछ बातों की तरफ दिलाया। यहाँ स्वयंसिद्ध मान्यताओं के बारे में कुछ बातें लिखी हुई थी। सभी ने गौर से इसे पढ़ लिया।

स्वयंसिद्ध मान्यताएँ: लगभग 300 B.C. में यूक्लिड ने उस समय तक ज्ञात गणित क्षेत्र के संपूर्ण ज्ञान को एकत्रित किया तथा उसे एलीमेंट्स नामक अपनी प्रसिद्ध कृति के रूप में व्यवस्थित किया। यूक्लिड ने कुछ गुणों को बिना सिद्ध किए सत्य मान लिया। ये सत्य मान ली गई कल्पनाएँ वास्तव में स्पष्टतः सर्वव्यापी सत्य हैं। उन्होंने उन्हें दो वर्गों में बाँटा।

अभिगृहीत (axioms)

1. वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु के बराबर हों, परस्पर बराबर होती हैं।
2. यदि बराबरों को बराबरों में जोड़ा जाए, तो पूर्ण भी बराबर होते हैं।
3. यदि बराबरों को बराबरों में से घटाया जाए, तो शेषफल भी बराबर होते हैं।
4. वे वस्तुएँ जो परस्पर संपाती हों, परस्पर बराबर होती हैं।
5. पूर्ण अपने भाग से बड़ा होता है।
6. वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु की दोगुनी हों, परस्पर बराबर होती हैं।
7. वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु की आधी हों, परस्पर बराबर होती हैं।

अभिधारणाएँ (postulates)

1. एक बिंदु से एक अन्य बिंदु तक एक सरल रेखा खींची जा सकती है।
2. एक सांत रेखा (रेखाखंड) को अनिश्चित रूप से विस्तृत किया जा सकता है।
3. किसी केंद्र और किसी त्रिज्या को लेकर एक वृत्त खींचा जा सकता है।
4. सभी समकोण एक दूसरे के बराबर होते हैं।
5. यदि एक सीधी रेखा दो सीधी रेखाओं पर गिरकर अपने एक ही ओर दो अंतःकोण इस प्रकार बनाए कि इन दोनों कोणों का योग मिलकर दो समकोणों से कम हो, तो वे दोनों सीधी रेखाएँ अनिश्चित रूप से बढ़ाने पर उसी ओर मिलती हैं जिस ओर यह योग दो समकोणों से कम होता है।

‘यूक्लिड ने उन कल्पनाओं के लिए अभिधारणा (postulate) शब्द का प्रयोग किया है जो विशिष्ट रूप से ज्यामिति से संबद्ध थे तथा अन्य कल्पनाओं को उन्होंने अभिगृहीत (axiom) कहा। एक प्रमेय (Theorem) वह गणितीय कथन होता है जिसकी सत्यता तार्किक रूप से स्थापित कर ली जाती है।’ सर ने एक-एक उदाहरण लेकर उस पर विस्तार से बात करते हुए यह बताया कि गणित की कक्षा में जो काम हम बहुत सहजता से कर रहे होते हैं, उनके पीछे भी कुछ आधार हैं। इन अभिगृहीत और अभिधारणाओं पर हमारा गणित टिका हुआ है।

जैसे, ऊपर आप सभी ने कहा कि यदि $a=b$ है और $b=c$ है, तो $a=c$ होगा। अब ज़रा इसे ध्यान में रखते हुए अभिगृहीत 1 को पढ़िए।

अभिगृहीत 1: वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु के बराबर हों, परस्पर बराबर होती हैं।

आप पाएंगे कि इस सवाल को हल करते हुए हम असल में जो काम कर रहे थे, उसका आधार हमें इसी अभिगृहीत से मिल रहा है। गणित में इन्हें स्वयंसिद्ध माना गया है। अतः इसे सिद्ध करने की आवश्यकता नहीं है। हम इस जानकारी का उपयोग गणित में (और दैनिक जीवन में भी) अनेक जगहों पर करते हैं।

इसी तरह सवाल+4= 15 और $x-5= 9$ को हल करते हुए हम जब पक्षांतर करते हैं, उसका भी आधार हमें इन्हीं अभिगृहीत में मिल जाएगा।

$$\text{.....}+4= 15$$

$$\text{.....}+4-4= 15-4$$

$$\text{.....}= 15-4$$

$$\text{.....}= 11$$

अतः $11+4= 15$ होगा।

असल में संख्याएँ कभी उड़कर इधर से उधर नहीं जाती हैं। यह तो लोगों ने कुछ चरणों को छोड़कर लिखते हुए अपनी समझ ऐसी बना ली है। अन्यथा इस तरह के सवालों को हल करने का सही तरीका तो इस प्रकार होगा।

‘आप सभी लोग इन दोनों हल को देखिए और फिर पीपीटी में लिखे बिन्दुओं को देखकर पता लगाइए, यहाँ पर हम कौन-से अभिगृहीत या अभिधारणा का उपयोग कर रहे हैं?’

$$x-5= 9$$

$$x-5+5= 9+5$$

$$x= 14$$

अतः, $14-5= 9$ होगा।

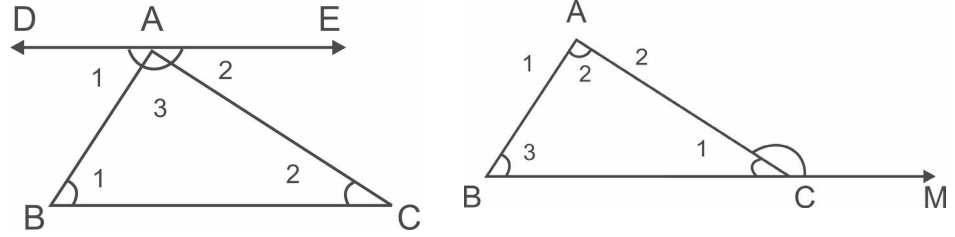
सर, यहाँ पर हम अभिगृहीत 2 और 3 का उपयोग कर रहे हैं।— भानू सर ने कहा।

2. यदि बराबरों को बराबरों में जोड़ा जाए, तो पूर्ण भी बराबर होते हैं।

3. यदि बराबरों को बराबरों में से घटाया जाए, तो शेषफल भी बराबर होते हैं।

इसी तरह एक त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180 डिग्री होता है। इस सवाल को हल करते हुए किसी ने त्रिभुज के शीर्ष से एक नई रेखा बनाई तो किसी ने उसी त्रिभुज के आधार को आगे बढ़ाकर रेखा को और

ज़्यादा लम्बा कर दिया है। अब एक बार फिर आप सभी लोग इस पीपीटी पर नज़र डालिए और मुझे बताइए कि कौन-से अभिगृहीत या अभिधारणा का यहाँ पर उपयोग किया जा रहा है?



इस सवाल का हल खोजने में संभागियों को ज़्यादा समय नहीं लगा। उन्होंने पीपीटी को एक बार पुनः देखकर जल्द ही बता दिया। सभी की सहमति थी कि इन दोनों ही तरीकों में पहली और दूसरी अभिधारणाओं का उपयोग किया जा रहा है।

1. एक बिंदु से एक अन्य बिंदु तक एक सरल रेखा खींची जा सकती है।
2. एक सांत रेखा (रेखाखंड) को अनिश्चित रूप से विस्तृत किया जा सकता है।

‘राधा मैडम ने जब त्रिभुज के शीर्ष से सरल रेखा बनाई थी तब असल में वो एक बिंदु से एक अन्य बिंदु तक एक सरल रेखा खींच रही थीं। इस तरह उन्होंने पहली अभिधारणा का उपयोग किया है। जबकि भानू सर ने त्रिभुज के आधार BC को आगे बढ़ाते हुए सरल रेखा BM की रचना की है। भानू सर ने यहाँ पर दूसरी अभिधारणा का उपयोग किया है। यह अभिधारणा कहती है कि एक सांत रेखा (रेखाखंड) को अनिश्चित रूप से विस्तृत किया जा सकता है।’

सभी शिक्षक-शिक्षिकाओं को ये बातें बहुत रोचक लग रही थीं। गणित को इस रूप में उन्होंने पहले नहीं समझा था। गणित विषय की प्रकृति को अब वे काफी हद तक समझ पा रहे थे। कम-से-कम इस सन्दर्भ में उपयोग किए जाने वाले जटिल शब्दों को समझने के लिए अब उनके सामने कुछ उदाहरण मौजूद थे। थानू कुमार ने ये सारी बातें और कुछ महत्वपूर्ण उदाहरणों को अपनी डायरी में नोट कर लिया था। गणित विषय की प्रकृति पर आयोजित होने वाली किसी कार्यशाला या प्रशिक्षण में शामिल होकर अब वह भी कुछ योगदान दे सकने में सहज महसूस कर रहा था। सभी लोगों ने दोनों दक्ष प्रशिक्षकों को धन्यवाद कहा। इस तरह गणित विषय की प्रकृति पर आधारित इस दो दिवसीय कार्यशाला का समापन हुआ।



1.10.1 कार्यपत्रक (Worksheets)

ये प्रश्न विभिन्न विषयों में ज्ञान निर्माण की प्रक्रिया को समझने में सहायक हैं। प्रश्नों को हल करने के बाद सामूहिक चर्चा करें और यह समझने का प्रयास करें कि गणित विषय के प्रश्न अन्य विषयों के सवालों से अलग कैसे हैं।

प्रश्न 1: बहुभुजों के आंतरिक कोणों का योग कैसे ज्ञात करेंगे। उदाहरण के लिए त्रिभुज के तीनों अंतःकोणों का योग 180 डिग्री होता है, चतुर्भुजों के अंतःकोणों का योग 360 डिग्री इत्यादि। क्या इसमें कोई पैटर्न है? यदि हाँ तो पैटर्न की सहायता से सामान्य नियम / सूत्र ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 2: शहर में किसी भवन का निर्माण सन् 1965 में हुआ था, इस कथन की सत्यता की जाँच कैसे करेंगे?

प्रश्न 3: त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180 डिग्री होता है। चांदे की सहायता से क्या इस कथन की सत्यता को सिद्ध किया जा सकता है? विभिन्न त्रिभुज बनाते हुए इसे करके देखिए।

प्रश्न 4: पानी 100 डिग्री सेल्सियस पर उबलता है, यह कथन सत्य है या असत्य, इसकी जाँच कैसे करेंगे?

प्रश्न 5: भाग की अवधारणा पर काम करने से पहले बच्चों के साथ किस-किस अवधारणा पर काम किया जाना चाहिए, जिससे कि बच्चा भाग की अवधारणा को ठीक से समझ सके? भाग की अवधारणा सीखने-सिखाने के क्या चरण होंगे? भाग की अवधारणा की समझ बच्चे को आगे कौन-कौन-सी गणितीय अवधारणाओं को समझने में मदद करती है?

प्रश्न 6: दो विषम संख्याओं का योग सम संख्या होता है। सिद्ध कीजिए। (सामान्यीकरण)

1.11 गणित शिक्षण के उद्देश्य

गणित हमारे आस-पास हर पहलू में दिखता है। हमारे रोज़ के कामकाज, हमारे आस-पास के परिवेश और प्रकृति में गणित मौजूद है। हम सभी लोग अपने दैनिक जीवन के कामकाज में जाने-अनजाने गणितीय अवधारणाओं या गणितीय समझ का उपयोग करते हैं। प्राथमिक कक्षाओं में पढ़ाया जाने वाला गणित सभी बच्चों के अनुभवों से बहुत बेहतर तरीके से जोड़ा जा सकता है। अतः सभी बच्चे गणित सीख सकते हैं। गणित शिक्षण का एक उद्देश्य तो यह होना चाहिए कि बच्चे इसे अपने दैनिक जीवन में और भी बेहतर तरीके से उपयोग कर सकें। परंतु हमें इसके व्यापक लक्ष्यों की तरफ भी ध्यान देने की आवश्यकता है। यहाँ हम गणित शिक्षण के सीमित और व्यापक उद्देश्यों को कुछ उदाहरणों से विस्तार में समझने का प्रयास करेंगे।

एनसीएफ-2005 में गणित शिक्षण के उद्देश्यों को दो तरह से देखा गया है— सीमित उद्देश्य और व्यापक उद्देश्य।

सीमित उद्देश्य तो यह हुआ कि हमें बच्चों में गणितीय अवधारणाओं और विचारों को पढ़ने-लिखने, सोचने-

समझने और अभिव्यक्त कर सकने के कौशलों के साथ ही गणितीय विषयवस्तु से लैस करना है। इसमें संख्या ज्ञान (संख्या नाम, मातात्मक सम्बन्ध और संख्या चिह्न), संक्रिया (जोड़, घटाव गुणा व भाग), मापन की समझ (लम्बाई, क्षेत्रफल, आयतन, धारिता, भार आदि), आकृति एवं स्थान की समझ (तिकोना, चौकोर, बेलनाकार, छोटा, बड़ा, लम्बा आदि) और आँकड़ों का प्रबंधन एवं पैटर्न की समझ बनानी है, इन्हें सीखना है। एक तरह से देखें तो ये सभी अवधारणाएँ गणित की विषयवस्तु या पाठ्यपुस्तक के पाठों को निर्धारित करने में

- संख्या ज्ञान
- संक्रिया (जोड़, घटाव, गुणा एवं भाग)
- मापन की समझ
- आकृति एवं स्थान की समझ
- आँकड़ों का प्रबंधन एवं पैटर्न की समझ

व्यापक उद्देश्य

- अनुमान लगाना
- सन्निकटन
- सादृश्यीकरण/मानस चित्रण
- इष्टतमीकरण
- सामान्यीकरण
- गणितीय निदर्शन
- गणितीय निरूपण
- गणितीय तर्कशीलता
- समस्या समाधान
- गणितीय सम्प्रेषण एवं अभिव्यक्ति
- रुझान एवं रुचि

सहयोग देती हैं। आज के समय में कोई काम करने, रोजगार के रास्ते खोजने या एक अच्छी नौकरी पाने के लिए इन सबका ज्ञान बहुत आवश्यक है।

लेकिन यदि यह सवाल पूछा जाए कि आखिर हम ये सब चीज़ें बच्चों को क्यों पढ़ाना चाहते हैं? क्या सिर्फ इसलिए कि वे बड़े होकर एक अच्छी-सी नौकरी या कोई बेहतर रोजगार पा जाएँ? या इसलिए कि वे इस विषयवस्तु के साथ-साथ कुछ ऐसे कौशलों को भी अर्जित कर लें जो उनके जीवन भर काम आने वाला है। हमें उन्हें इस रूप में सक्षम बनाने की आवश्यकता है कि वे तार्किक ढंग से सोचते हुए स्वयं अपने निर्णय ले सकें। किसी समस्या के समाधान के नए तरीके खोज सकें। अपने अनुभवों को व्यवस्थित कर उनके विश्लेषण के आधार पर ख़ास परिस्थितियों में सभी उपलब्ध तरीकों में से सर्वश्रेष्ठ का चुनाव कर सकें। इसके शिक्षण का एक और लक्ष्य बच्चों को वह दृष्टि दे पाना है जिससे वे अपने अनुभवों को गणितीय दृष्टि से देख सकें, व्यवस्थित व विश्लेषित कर सकें। आइए गणित शिक्षण के इन व्यापक उद्देश्यों को थोड़ा विस्तार से उदाहरण के साथ समझते हैं।

1. अनुमान लगाना (Estimation)

दैनिक जीवन में हमें कई बार अनुमान लगाने की ज़रूरत पड़ती है। आप चार दिन की यात्रा पर जा रहे हैं। आप के मन में विचार आएगा कि कितने पैसे अपनी जेब में रखकर ले जाना चाहिए। आप अपनी इस यात्रा में किए जाने वाले खर्च का एक अनुमान लगाने का प्रयास करेंगे। यदि इस जगह और यहाँ होने वाले खर्च की कुछ जानकारी / अनुभव आपको पहले से है, तो यह आपको काफी हद तक ठीक अनुमान लगा पाने में मदद करेगी। किसी नई या अपरिचित जगह जा रहे लोग भी अपने मन में इस तरह का अनुमान लगाने का प्रयास करते हैं। गहराई से देखें तो यह अनुमान लगाने का कौशल बिलकुल ही हवा में नहीं किया जाता है, बल्कि इसके कुछ आधार होते हैं। हम अपने पूर्व अनुभवों के आधार पर ही कोई नया अनुमान लगा पाते हैं। हम अपने मन में एक किस्म का मापन कर रहे होते हैं। उदाहरण के लिए जहाँ हम जाने वाले हैं, वहाँ किसी परिचित या रिश्तेदार के घर में ठहरना होगा या किसी होटल में रुकने का इंतज़ाम करना होगा, खाने-पीने की चीज़ों की अभी कीमतें क्या-क्या हैं, यात्रा में कम-से-कम कितना भाड़ा लगेगा? आदि। ये सारे सवाल या इनसे जुड़ी जानकारी हमें कुल खर्च का अंदाज़ लगाने में मदद करती हैं।

अनुमान: गतिविधियाँ तथा सवाल

- इस माचिस में कितनी तीलियाँ रखी जा सकती हैं?
- अभी आप जिस कमरे में बैठे हैं, उसकी लम्बाई और चौड़ाई कितनी है?



किसी भी प्रकार के स्केल का उपयोग किए बिना इन सवालों का जवाब देना है।

अलग-अलग लोगों से ये दोनों सवाल पूछिए। क्या सभी का उत्तर एक जैसा है? यह भी पूछिए, वे अपने उत्तर तक कैसे पहुँच रहे हैं? उनका तरीका क्या है?

यहाँ आपको उत्तरों की एक रेंज मिल रही होगी। क्या कुछ उत्तर ऐसे भी हैं जिन्हें आप इस रेंज से बाहर रखना चाहेंगे? क्यों?

कोई व्यक्ति सही ढंग से अनुमान लगा पाए, इसके लिए कौन-कौन से कारक प्रभावी हैं? क्या हम अपने स्कूल

में गणित शिक्षण करते हुए बच्चों की अनुमान लगाने की क्षमताओं को और बेहतर कर सकते हैं? इसके लिए हमें कक्षा-कक्ष में क्या-क्या करना होगा?

अपने दैनिक जीवन में हम भार, धारिता, मात्रा, लम्बाई आदि के सन्दर्भ में अक्सर अनुमान लगाते हैं। कक्षा में भी ऐसी परिस्थितियों का निर्माण कीजिए जहाँ बच्चों को अनुमान लगाना पड़े।

2. सन्निकटन (Approximation)

हम अपने दैनिक जीवन में अक्सर सन्निकटन करते हैं। मान लीजिए, आप के घर आज शाम को 16 लोग आने वाले हैं। आप इन सभी को दो लड्डू देना चाहते हैं। इसका सीधा तरीका तो यह है कि 16 को 2 से गुणा कर लिया जाए। इस तरह कुल 32 ही लड्डू चाहिए। आप यदि स्वयं के परिवार के 4 लोगों को भी इसमें जोड़ लें तो 20 का दोगुना यानी 40 लड्डू चाहिए। अब यदि आप यह सोचें कि एक-दो मेहमान ज्यादा आ गए तब क्या होगा? तो आप को 22 लोगों के हिसाब से 44 लड्डू चाहिए। यह भी हो सकता है कि एक-दो लोग आए ही नहीं। तब वापिस आपको लड्डूओं की संख्या फिर से सोचनी होगी। आम तौर पर हम सभी लोग इतना आगे-पीछे नहीं सोचते हैं। हम लड्डूओं की संख्या को कुछ बढ़ाकर ही ले आते हैं। ताकि कोई चाहे तो दो से अधिक भी खा सकता है। कुछ लड्डू बच भी गए तो घर में काम आ जाएंगे। इसे ही हम सन्निकटन कहते हैं।

दूसरी और तीसरी कक्षा के बच्चों के लिए करीबी दहाई या सैकड़ा बनाने वाले सवाल दिए जाते हैं, जहाँ 37 को 40 में या फिर 297 को 300 के रूप में बदलना होता है। यह भी संख्याओं का सन्निकटन है।

सन्निकटन: गतिविधियाँ तथा सवाल

- फातिमा के घर आज कुल 17 मेहमान आने वाले हैं। मेहमानों के बैठने के लिए उसे कुल कितनी कुर्सियों का इंतज़ाम कर लेना ठीक रहेगा?
- विलियम बाज़ार जा रहा है। उसके हिसाब से किराना का सामान और सब्जियाँ खरीदने के लिए 985 रुपयों की आवश्यकता होगी। उसे कुल कितने रुपये लेकर बाज़ार जाना चाहिए?
- रमेश कक्षा सात में पढ़ता है। गणित विषय में वह आजकल दशमलव से सम्बंधित पाठ के सवाल हल कर रहा है। उसकी अध्यापिका ने बताया है कि 3.574 को 3.57 या फिर 3.6 भी लिख सकते हैं। इसी तरह 4.249 को 4.25 या 4.3 भी लिखा जा सकता है। यह भी एक किस्म का सन्निकटन है। क्या आप बता सकते हैं, इसके पीछे क्या तर्क है?

प्राथमिक कक्षाओं में बच्चों के दैनिक जीवन और उनके अनुभवों से जुड़े हुए सवाल पूछिए और उन्हें अपने तरीकों से सन्निकटन करने का अवसर दीजिए।

एक प्रशिक्षण कार्यक्रम में शामिल कुछ लोगों से कहा गया— “अपनी एड़ी से लेकर घुटने तक की लम्बाई का माप बालिशत में बताइए”। सभी को यह काम बिना माप लिए करना था। अलग-अलग लोगों ने दो, ढाई, तीन, साढ़े तीन और चार बालिशत तक बताया। कुछ देर बाद उन्हें माप लेने की अनुमति दे दी गई। अब सभी के उत्तर एकत्रित किए गए। आपको क्या लगता है? ज्यादातर लोगों का माप कितना आया होगा?

एक व्यक्ति ने बताया— “मेरी एड़ी से घुटने तक का माप ढाई बालिशत और दो अंगुल है ... इसे ढाई बालिशत ही मान लो”। इस उदाहरण में पहली स्थिति में लोगों ने अनुमान लगाया है। लेकिन बालिशत से माप लेने के

बाद अब वे और सटीक जवाब की तरफ बढ़ पाए हैं। ढाई बालिशत और दो अंगुल की माप को ढाई बालिशत मान लिया जाना सन्निकटन का उदाहरण है।

अनुमान	सन्निकटन
<ul style="list-style-type: none"> यह मापन से पहले लगाया गया अनुमान है। किसी व्यक्ति द्वारा अनुमान लगाते समय उनके जीवन में मापन के अनुभव यहाँ महत्वपूर्ण भूमिका अदा कर रहे हैं। यहाँ किसी मापक इकाई का उपयोग नहीं किया जा रहा है। उदाहरण के लिए किसी टेबल को देखकर ही बताया गया कि इसकी लम्बाई 70 सेंटीमीटर है। 	<ul style="list-style-type: none"> यह मापन के बाद मिले परिणाम पर आधारित है। जैसे टेबल की लम्बाई को स्केल से मापा गया है। यहाँ इसकी लम्बाई 64 सेंटीमीटर और 4 मिलीमीटर है, लेकिन हम अपनी सहूलियत के लिए इसे 64 सेंटीमीटर ही मान ले रहे हैं।
<ul style="list-style-type: none"> 57×42 कितना होगा? एक नज़र में इन संख्याओं को देखकर अलग-अलग लोग अलग-अलग अनुमान पर पहुँच सकते हैं। उनके द्वारा लगाया गया यह अनुमान इन संख्याओं की मात्रा की समझ पर आधारित होगा। कोई कह सकता है कि उत्तर 2000 से अधिक है या 2400 से कम है। उनके उत्तरों के पीछे के तर्क को समझने के लिए उनके द्वारा किया गया संख्याओं का सन्निकटन भी समझना होगा। 	<ul style="list-style-type: none"> 57×42 कितना होगा? 57×42 को सीधे 50×40 के रूप में देखने वाले लोगों का उत्तर 2000 होगा। लेकिन जो इसे 60×40 मान रहे हैं, उनका उत्तर 2400 होगा। यहाँ हम देख सकते हैं कि दोनों ही प्रकार के उत्तर सन्निकटन की प्रक्रिया के परिणाम हैं, लेकिन एक सटीकता के ज्यादा करीब है।

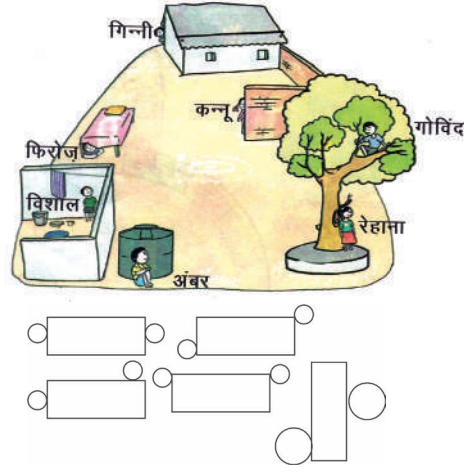
3. साहस्यीकरण / मानस चित्रण (Visualization)

मान लेते हैं, आप अपने परिवार के साथ एक किराए के मकान में रह रहे हैं। किन्हीं कारणों से आपको अपना मकान बदलना पड़ रहा है। आप एक दूसरा मकान देखने गए हैं। यह अभी बिल्कुल खाली है। आप कैसे तय करेंगे कि यह लेना है या नहीं? संभवतः यह निर्णय लेने के लिए कई कारक काम करेंगे। किराया और मकान की स्थिति आदि के अलावा आप यह भी समझना चाहेंगे कि इस मकान में आपके परिवार के सभी लोगों और सामान को रखने के लिए कितनी जगह उपलब्ध है। अपनी अलमारी, पलंग, फ्रिज और गाड़ी को रखने की जगहों के बारे में विचार करेंगे। मकान में उपलब्ध खाली जगहों के अनुरूप आप मानस चित्रण करेंगे और इस सवाल पर विचार करेंगे कि यहाँ आपका सारा सामान व्यवस्थित रूप से आ सकेगा या नहीं। परिवार के लोगों के बैठने-सोने, पढ़ने-लिखने आदि के लिए कितनी जगह है? कुछ मेहमान आएं तो उनकी व्यवस्था कहाँ की जा सकेगी? यह सब आप वास्तव में रखकर नहीं देख रहे हैं, बल्कि आप मानस चित्रण कर रहे हैं। ऐसा ही मानस चित्रण हम दैनिक जीवन में कई अवसरों पर करते हैं। कक्षा-कक्ष में गणित शिक्षण करते हुए हम ऐसे ही मानस चित्रण के कौशल को और भी परिष्कृत करने का काम करते हैं।

साहस्यीकरण / मानस चित्रण: गतिविधियाँ तथा सवाल

- आपके पास दो सौ वर्ग मीटर की एक ज़मीन है। आप यहाँ पर अपने परिवार के रहने के लिए एक घर बनाना चाहते हैं। सोचकर बताइए, कितने कमरे और बाथरूम बनाएंगे? ये कमरे और बाथरूम कहाँ-कहाँ बनाएंगे?

- इस चित्र में कुछ बच्चे छुपा-छुपन का खेल खेल रहे हैं। चित्र को देखकर इन सवालों का जवाब दीजिए।
गिन्नी किस-किस को देख सकती है?
क्या कन्नू गोविंद को देख सकती है?
अगर तुम चाहते हो कि गिन्नी तुम्हें नहीं देखे तो तुम कहाँ छिपते?
- इनमें से कौन-सी आकृति का उपयोग कर बेलन बनाया जा सकता है? और क्यों?



4. इष्टतमीकरण (Optimization)

दैनिक जीवन में हम ऐसे कई निर्णय लेते हैं जहाँ हमें कोई वस्तु खरीदते समय उसकी कीमत, गुणवत्ता, टिकाऊपन और उसकी उपयोगिता के पैमानों के बीच सामंजस्य बनाना पड़ता है। यह निर्णय लेने में हम अपने कई तरह के कौशलों का उपयोग करते हैं। इन्हीं कौशलों में से एक महत्वपूर्ण कौशल है इष्टतमीकरण। सामान्य शब्दों में कहा जाए तो इष्टतमीकरण का मतलब है- अपने संसाधनों का बेहतर ढंग से उपयोग करना।

इष्टतमीकरण: गतिविधियाँ तथा सवाल

- मान लीजिए आप एक माचिस बनाने की बहुत बड़ी कंपनी में सलाहकार के पद पर कार्यरत हैं। आपका काम है माचिस की पैकेजिंग को बेहतर करना। इसमें आने वाले खर्च को कम-से-कम करना ताकि मुनाफा बढ़ाया जा सके। क्या आप छह माचिसों को एक साथ रखकर नीले कागज में पैक करने का कोई ऐसा तरीका सुझा सकते हैं, जहाँ कम-से-कम कागज़ खर्च हो? लेकिन माचिस खराब न हों, यह भी ध्यान रखना है।
इस तरह कागज़ का खर्च कम करके कंपनी का मुनाफा बढ़ाया जा सकता है। आप देखेंगे कि माचिस को पैक करने के कई तरीके संभव हैं। आपस में बात करते हुए तय कीजिए। कौन-सा तरीका ज्यादा बेहतर है? और क्यों बेहतर है?
- माचिस की 18 तीलियाँ लीजिए। इन्हें जोड़कर एक ऐसा आयत बनाइए जिसका क्षेत्रफल अधिक-से-अधिक हो। इन 18 तीलियों से आप कितने अलग-अलग प्रकार के आयत बना सकते हैं? क्या इन सभी आयतों के क्षेत्रफल समान होंगे या अलग-अलग होंगे? सबसे अधिक क्षेत्रफल वाले आयत की लम्बाई और चौड़ाई क्या है?
- एक चार्ट पेपर लें। इसमें एक इंच लम्बाई और चौड़ाई वाले खाने बना लें। अब आपको स्थानीय मान की अवधारणा पर काम करने के लिए द्विआयामी डीन्स ब्लॉक का निर्माण करना है। इस चार्ट से अधिक-से-अधिक इकाइयाँ, दहाइयाँ और सैकड़े काटकर अलग कीजिए। क्या आप इस चार्ट का अधिकतम बेहतर इस्तेमाल करते हुए अपना डीन्स ब्लॉक बना सके हैं?

5. सामान्यीकरण (Generalization)

दैनिक जीवन में हम कई तरह के सामान्यीकरण का उपयोग करते हैं। जैसे- आज लगता है, पानी बरसेगा। अमुक व्यक्ति इस प्रकार के कपड़े पहने हुए हैं, अतः वे अमुक राज्य के निवासी होंगे। यह सामान्यीकरण कई महत्वपूर्ण निर्णय लेने में मददगार होता है। इस सामान्यीकरण के कौशल का उपयोग करते हुए हम कई तरह के पैटर्न को समझ पाते हैं, बल्कि उन्हें आगे भी बढ़ा पाते हैं और कुछ निष्कर्षों तक पहुँच पाते हैं।

सामान्यीकरण: गतिविधियाँ तथा सवाल

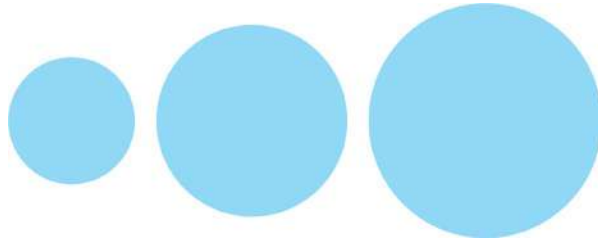
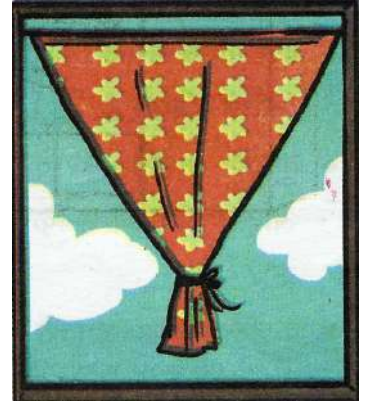
- इसे देखिए और आगे बढ़ाइए। 2, 4, 6, 8, 10,,,,

- बताइए, ऊपर दी गई संख्या श्रृंखला में 17वें पद पर कौन-सी संख्या आएगी? क्या आप अनंत पद पर आने वाली संख्या के बारे में कुछ कह सकते हैं? इसे गणितीय रूप में कैसे प्रदर्शित कर सकते हैं?

- इस परदे में कुछ फूल बने हैं। क्या आप बता सकते हैं, कुल कितने फूल हैं? आप अपने उत्तर तक कैसे पहुँचे? यहाँ आप गणित की कौन-कौन-सी अवधारणा का उपयोग कर रहे हैं?

इस परदे पर बने फूलों की संख्या को ज्ञात करने की प्रक्रिया में आपने गणित शिक्षण के कौन-कौन-से सीमित और व्यापक उद्देश्यों (कौशल) का उपयोग किया है?

- यहाँ पर तीन वृत्त बने हैं। इनकी त्रिज्या क्रमशः 3, 5 और 7 सेंटीमीटर है। इन तीनों वृत्तों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

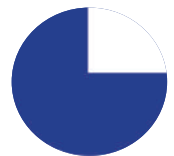


आप इस सामान्यीकरण तक कैसे पहुँचे कि तीनों ही वृत्तों का क्षेत्रफल ज्ञात करने का सूत्र πr^2 ही होगा? इस सूत्र का उपयोग आप सभी वृत्तों का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए कर सकते हैं, यह मानना भी एक तरह का सामान्यीकरण है। इसके पीछे आपका तर्क क्या है?

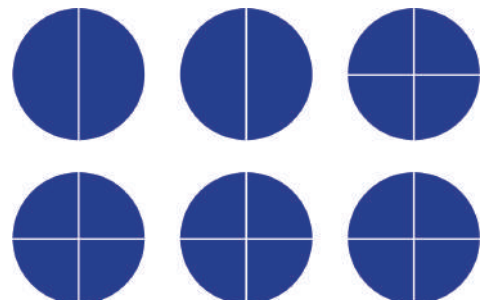
6. गणितीय निदर्शन (Mathematical Modelling)

गणितीय निदर्शन वह प्रक्रिया है जहाँ हम दैनिक जीवन की समस्याओं को समझने और उनका समाधान खोजने के लिए उन्हें सरल गणितीय रूप में निरूपित करते हैं। किसी समस्या को हम अलग-अलग तरीकों से हल कर सकते हैं। उदाहरण के लिए $\frac{3}{4}$ को अलग-अलग तरीके से समझते हैं।

रमेश ने एक पिज़्ज़ा का $\frac{3}{4}$ हिस्सा खा लिया है। शेष भाग वह बाद में खाएगा।



गोलू, रवीना, गीता और राकेश आज पिकनिक पर गए हैं। उनके पास 3 रोटियाँ हैं। वे इन्हें बराबर-बराबर बाँटकर खाते हैं। प्रत्येक को रोटी का $\frac{3}{4}$ हिस्सा मिलेगा। रोटियों के बँटवारे के निम्न तरीके हो सकते हैं। दर्शाए गए पहले तरीके में हरेक को आधी और एक चौथाई रोटी मिल रही है। जबकि दूसरे तरीके में हरेक को रोटी का एक चौथाई हिस्सा 3 बार मिल रहा है।



फातिमा आज टिफिन में 4 लड्डू लेकर आई है। उसने अभी 3 लड्डू खा लिए हैं। बताओ उसने लड्डूओं का कितना हिस्सा खा लिया है?



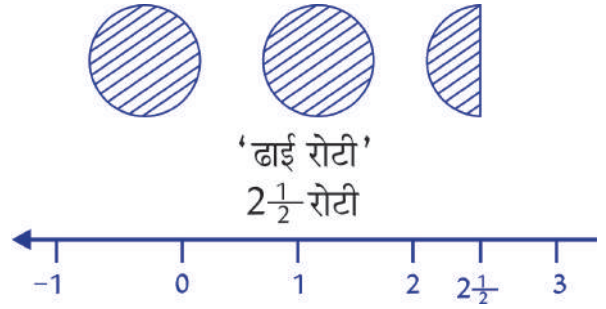
गणितीय निदर्शन: गतिविधियाँ तथा सवाल

- अंजना और राहुल बहन-भाई हैं। उनके घर कई मेहमान आने वाले थे। माँ ने दोनों को शरबत बनाने के लिए कहा। राहुल ने 5 गिलास पानी में 11 चम्मच शक्कर घोल दिया। जबकि अंजना ने 3 गिलास पानी में 7 चम्मच शक्कर घोल दिया। अब बताइए, इन कथनों में से कौन-सा सही है?
 - (क) राहुल का शरबत ज़्यादा मीठा है।
 - (ख) अंजना का शरबत ज़्यादा मीठा है।
 - (ग) दोनों का शरबत बराबर मीठा है।
- आपने इस सवाल को कैसे हल किया है? क्या आपका तरीका प्राथमिक कक्षाओं में पढ़ रहे बच्चों को समझाया जा सकता है? आपने जिन गणितीय अवधारणाओं, संक्रियाओं और प्रतीक चिह्नों का उपयोग किया है, क्या उनसे प्राथमिक कक्षाओं के बच्चे परिचित हैं? या इन्हें उच्च प्राथमिक कक्षा में ही समझाया जाना उचित होगा?
- किसी समूह में लोगों को यह सवाल व्यक्तिगत रूप से हल करने के लिए दें। प्रत्येक के तरीकों का विश्लेषण करें तो आप पाएंगे कि एक ही सवाल को हल करने के लिए उन्होंने अलग-अलग तरीके इस्तेमाल किए हैं। उन्हें अपनी बात और तर्क प्रस्तुत करने का अवसर दिया जाए। इस तरह उनके द्वारा किए गए अलग-अलग किस्म के गणितीय निदर्शन को समझा जा सकता है। संभव है कि कुछ लोग सिर्फ चित्र बनाकर अपना तर्क रख रहे हों, जबकि कुछ लोग गणितीय अवधारणाओं, संक्रियाओं और प्रतीकों का उपयोग करते हुए किसी निष्कर्ष तक पहुँचे हों।
- मनीषा ने एक दुकान से 3 गिलास और 2 तश्तरी खरीदी है। ये उन्हें 73 रुपये में मिली हैं। उनकी सहेली फातिमा को ये बर्तन बहुत पसंद आए। उन्होंने भी दूसरे दिन उसी दुकान पर जाकर ऐसे ही 2 गिलास और 3 तश्तरी खरीद ली। फातिमा को ये बर्तन कुल 77 रुपये में मिले। बताओ एक ग्लास और एक तश्तरी की कीमत क्या है?
- अलग-अलग लोगों को यह सवाल हल करने को कहें। उनसे उनका तरीका बोलकर या लिखकर समझाने को कहें। समझाने का प्रयास कीजिए कि दैनिक जीवन की इस समस्या को हल करते हुए वे चरण-दर-चरण क्या कर रहे हैं। क्या वे स्कूल में सीखी गई विधियों का उपयोग समझकर कर पा रहे हैं? इस विधि का उपयोग करने का विचार कैसे आया? इसके पीछे का तर्क क्या है? मौखिक या चित्र की सहायता से हल करने वालों और गणितीय विधि का उपयोग कर हल करने वालों के तरीकों में क्या कोई अंतर्संबंध है?



7. गणितीय निरूपण (Mathematical Representation)

अपने आस-पास के समाज में हम देख सकते हैं कि बहुत-से लोग संख्या-नाम और मात्रा का उपयोग अपने दैनिक जीवन के कामकाज में खूब करते हैं। अपने काम में उपयोग होने वाला एक स्तर का हिसाब-किताब भी वे कर लेते हैं। इनमें से कई लोगों को स्कूल जाकर औपचारिक रूप से गणित की शिक्षा प्राप्त करने का अवसर नहीं मिला होगा। हमें ऐसे कई लोग मिलेंगे जो



अपनी बात को मौखिक रूप से समझा सकते हैं, लेकिन इस बात को गणितीय रूप में लिखकर दर्ज करने या अभिव्यक्त करने का कौशल उनके पास नहीं होता है। उदाहरण के लिए कोई व्यक्ति 'ढाई रोटी' कहने पर यह समझ जाता हो कि बात 'दो रोटी और आधी रोटी' के बारे में है, लेकिन इसे गणितीय रूप से लिखने का तरीका उन्हें नहीं मालूम हो। गणित शिक्षा का एक उद्देश्य यह भी है कि लोग अपने तर्क, अपने विचारों और अपने तरीकों को गणित की भाषा में यानी संकेतों, प्रतीकों के माध्यम से लिख सकें।

ऐसे में अपेक्षा यह है कि व्यक्ति यह तो समझे ही कि 'ढाई रोटी' की मात्रा कितनी है, बल्कि उसे ये मात्रा गणितीय चिह्नों के माध्यम से $2\frac{1}{2}$ के रूप में लिखना भी आना चाहिए। हम किसी भी भिन्न संख्या को $\frac{p}{q}$ के रूप में निरूपित कर सकते हैं, साथ ही इसे संख्या रेखा पर भी दर्शा सकते हैं। एक स्तर पर आने के बाद $2\frac{1}{2}$, $\frac{5}{2}$ और 2.5 में क्या आपसी सम्बन्ध है, यह भी ज्ञात होना चाहिए। साथ ही हम किसी समस्या के समाधान में इनका उपयोग करते हुए अपनी बात तर्कपूर्ण तरीके से समझा भी सकें।

गणितीय निरूपण: गतिविधियाँ तथा सवाल

- कक्षा 3 और 4 में पढ़ने वाले बच्चों से कुछ वस्तुएँ गिनने को कहें। ध्यान से सुनें, क्या वे एक से लेकर पचास तक संख्या-नामों को ठीक से बोल पा रहे हैं, बोले गए संख्या नाम के लिए सही मात्रा दिखा पा रहे हैं? अब आप कुछ संख्या-नाम बोलिए, जैसे- बयालीस, तेईस, उन्नीस, उनसठ आदि। बच्चों को बोर्ड पर आकर या कॉपी में संख्याएँ लिखने को कहें। बच्चों द्वारा लिखी गई संख्या को देखिए। क्या सभी सही लिख पा रहे हैं?
- इसी तरह कक्षा 4 और 5 में पढ़ रहे बच्चों को दो सौ सात, तीन सौ सत्रह और एक सौ तीन जैसी संख्या लिखने को बोलें। संभव है, कई बच्चे दो सौ सात के लिए 2007 लिख रहे हों। संख्या-नाम सुनकर उसके सही गणितीय निरूपण के लिए इनके साथ आगे और क्या काम करने की आवश्यकता है?
- ऊपर शरबत बनाने और गिलास-तश्तरी खरीदने के सन्दर्भ पर आधारित सवाल दिए गए हैं। इन्हीं सवालों को अलग-अलग लोगों से हल कराइए। देखिए, क्या वे अपनी बात या अपने तर्क को प्रस्तुत करते हुए गणितीय चिह्नों, प्रतीकों का उपयोग कर पा रहे हैं? या सिर्फ मौखिक या चित्र बनाकर ही समझा पा रहे हैं?
- $441 \div 2$ को हल करें। क्या सभी के उत्तर एक जैसे हैं? उनकी विधियों में किस तरह की भिन्नताएँ हैं? इसका कारण क्या है? इसी एक सवाल को हल करने के लिए अलग-अलग लोग अलग-अलग तरीके इस्तेमाल कर सकते हैं, लेकिन उनके तरीकों में (या विधि के चरणों में) जो भिन्नता आ रही है, क्या वह सिर्फ गणितीय निरूपण की भिन्नता है? या अवधारणात्मक समझ में अंतर का मामला भी है?

8. गणितीय तर्कशीलता (Mathematical Logic)

व्यक्ति के तार्किक चिंतन का विकास करना गणित शिक्षण के उद्देश्यों में शामिल है। यदि हम एनसीएफ-2005 को देखें तो पाएंगे कि वह 'सोच के गणितीकरण' को काफी महत्त्व देता है। किसी भी बात को मानने या ना मानने के लिए पूर्वाग्रहों से ऊपर उठकर तर्क का आधार लेना चाहिए।

गणितीय तर्कशीलता: गतिविधि तथा सवाल

ऊपर आए कुछ सवालों पर गौर करें—

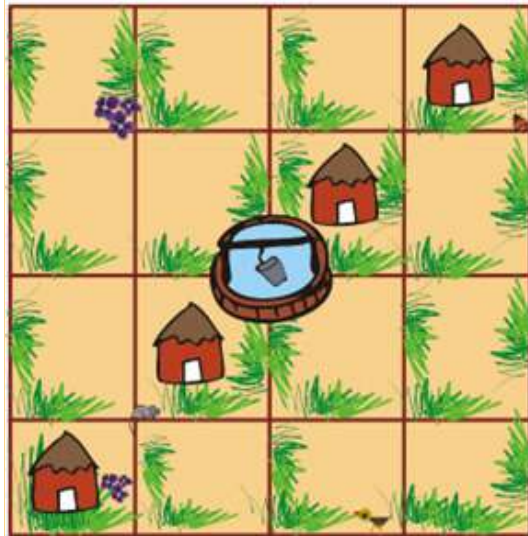
- वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करने का सूत्र πr^2 ही क्यों होगा? क्या वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करने के कुछ और भी तरीके संभव हैं?
- 18 माचिस की तीलियों को जोड़कर बनाए जाने वाले सभी आयतों का क्षेत्रफल बराबर क्यों नहीं होगा? आयत का क्षेत्रफल 'आयत की लम्बाई \times आयत की चौड़ाई' क्यों होता है? क्या इसके अलावा आयत का क्षेत्रफल ज्ञात करने का कोई और तरीका नहीं है?
- $441 \div 2$ को हल करने के लिए हमेशा बाईं ओर से ही क्यों शुरू करते हैं? क्या भाग के सवाल को दाहिनी तरफ से भी हल किया जा सकता है?
- प्राथमिक कक्षाओं में कई बच्चे 'दो सौ सात' को 2007 के रूप में लिखते हैं। आखिर हम संख्या 'दो सौ सात' को 2007 क्यों नहीं लिख सकते? आखिर वह कौन-सा नियम है जिसके कारण हमें संख्या 'दो सौ सात' को 207 लिखना पड़ रहा है?

इन सभी सवालों पर गौर करें तो हम गणित शिक्षण में निहित तार्किक चिंतन के महत्त्व को समझ सकेंगे। आमतौर पर हमारी गणित शिक्षण की प्रक्रियाओं में इस तरह सोचने की दिशा में बहुत ज़्यादा ध्यान नहीं दिया जाता है। लेकिन गणित शिक्षण का मतलब सिर्फ यह नहीं है कि बच्चे सवालों को हल कर लें, बल्कि यहाँ मंशा यह भी है कि इस माध्यम से वे अपने तार्किक चिंतन की क्षमताओं को और भी निखारें, परिष्कृत करें।

9. समस्या समाधान (Problem solving)

राघवन के पास ज़मीन का एक टुकड़ा है। इस ज़मीन पर चार घर हैं और बीच में एक कुआँ है। वह इस ज़मीन को अपने चार बच्चों में बराबर बाँटना चाहता है। हरेक को एक घर मिलना चाहिए और सभी दूसरे के हिस्से में जाए बिना कुएँ का इस्तेमाल कर पाएँ। क्या तुम उसकी मदद कर सकते हो? हरेक हिस्से में अलग रंग भरो।

ज़रा सोचिए, इस सवाल को हल करते समय या इस प्रकार के सवालों को बनाते समय, उनको भाषाई रूप से अभिव्यक्त करते या लिखते समय असल में आप कई गणितीय कौशलों का उपयोग कर रहे हैं। उदाहरण के लिए किसी भी भाई के लिए ज़मीन

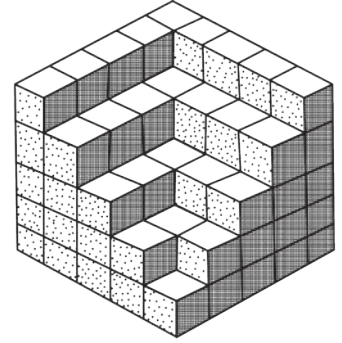


बनाते समय आप यह ध्यान रख रहे हैं कि सभी की ज़मीन बराबर हो। यानी सभी का क्षेत्रफल बराबर हो। उनके लिए खेत और कुआँ में पहुँचने का रास्ता भी उपलब्ध रहे। ठीक ऐसी ही न सही, लेकिन इसी तरह की

कई समस्याएँ हमारे दैनिक जीवन में भी आती हैं। तो गणित हमें समस्या समाधान के अलग-अलग तरीके खोजने की विधि भी सोचने और सीखने का अवसर देता है। आपने देखा होगा, बहुत-से लोग प्रतिदिन अखबारों में वर्ग पहेली भरते हैं। एक तरह से देखें तो समस्या समाधान की प्रक्रिया में उनके मन में रुचि और रुझान जाग्रत हो गया है। गणित विषय भी ऐसा ही है। इससे जूझते रहने पर रुचि और रुझान स्वतः ही जाग्रत होता जाता है।

समस्या समाधान: गतिविधियाँ तथा सवाल

- एक मिस्त्री घनाकार ईंटों को जोड़कर इस प्रकार सीढ़ियों का निर्माण कर रहा है। क्या आप इस चित्र को देखकर बता सकते हैं, अब तक उसने कुल कितनी ईंटों का उपयोग कर लिया है?
- यदि ऊपर की तरफ बढ़ते हुए अब तक पाँच पायदान बन चुके हैं। अब छोटे पायदान की सीढ़ी का निर्माण करना है तो उसे और कितनी ईंटें चाहिए होंगी?
- आपके घर पर निर्माण कार्य चल रहा है। आपकी अनुपस्थिति में ये ईंटें आकर रखी हैं। क्या आप बता सकते हैं, ये कुल कितनी ईंटें हैं? आपने कैसे ज्ञात किया?
- ईंटों की कुल संख्या ज्ञात करने में आपने कौन-कौन-से कौशलों या अवधारणाओं का उपयोग किया है?



10. गणितीय सम्प्रेषण एवं अभिव्यक्ति (Mathematical Communication and Expression)

आपने कई लोगों को यह कहते सुना होगा कि “मैं सवाल तो हल कर लेता हूँ, पर किसी दूसरे को समझाना मेरे बस की बात नहीं” या फिर “यह लड़का अपनी कॉपी में तो ठीक हल करता है, लेकिन बोलकर समझाने को कहो तो बिलकुल चुप हो जाता है”। क्या आप बता सकते हैं, इस तरह की समस्याओं के पीछे क्या कारण हो सकते हैं?

ऊपर आए इस सवाल को एक बात फिर से पढ़िए—

अंजना और राहुल बहन-भाई हैं। उनके घर कई मेहमान आने वाले थे। माँ ने दोनों को शरबत बनाने के लिए कहा। राहुल ने 5 गिलास पानी में 11 चम्मच शक्कर घोल दिया। जबकि अंजना ने 3 गिलास पानी में 7 चम्मच शक्कर घोल दिया। अब बताइए, इन कथनों में से कौन-सा सही है? (क) राहुल का शरबत ज़्यादा मीठा है (ख) अंजना का शरबत ज़्यादा मीठा है (ग) दोनों का शरबत बराबर मीठा है।

ज़रा सोचकर जवाब दीजिए, आपके पास अपने जवाब के समर्थन में क्या तर्क है? क्या आप अपनी बात को मौखिक या लिखित रूप में किसी तरह समझा सकते हैं? इस सवाल को हल करने के लिए आपने अपने दिमाग में कोई मॉडल तैयार किया होगा। इस मॉडल के निर्माण और इससे नतीजे निकालने की प्रक्रिया में आपने कुछ तर्कों का इस्तेमाल किया होगा। मौखिक रूप से बात रखते हुए आप अपने तर्क/तर्कों को अन्य लोगों

से साझा करना चाहते हैं। यदि बाकी लोग आपके तर्क को सुनकर ही समझ सकेंगे तो वे आपके जवाब से संतुष्ट हो जाएंगे। अन्यथा आपको किसी और तरीके से अपनी बात समझानी पड़ेगी। इस प्रक्रिया में आपका सम्प्रेषण और अभिव्यक्ति स्पष्ट होना चाहिए। कई बार मौखिक रूप से कहने पर बहुत से लोगों तक वह बात नहीं जाती है। अतः आप को चरण-दर-चरण लिखकर अपनी बात को स्पष्ट करना होता है। इस प्रक्रिया में आप गणितीय भाषा, संकेतों व चिह्नों का उपयोग करते हैं।

गणितीय सम्प्रेषण एवं अभिव्यक्ति: गतिविधियाँ तथा सवाल

- भैरूलाल ने शहर की बाज़ार से एक जोड़ी जूता खरीदा। इसकी कीमत 300 रुपये है। गाँव लौटते समय रास्ते में उसका दोस्त रमेश मिला। रमेश को यह जूता बहुत अच्छा लगा। उसने यह जूता खरीदना चाहा। भैरूलाल ने यह जूता 350 रुपये में रमेश को बेच दिया। भैरूलाल घर पहुँचा। उसकी माँ ने बताया कि कल रिश्तेदार के घर शादी में चलना है। भैरूलाल के कपड़े तो अच्छे थे, बस जूता पुराना हो गया था। वह रमेश के घर अपना जूता वापिस लेने गया। रमेश ने कहा, अब तो यह मेरा है। मैं वापिस नहीं दूंगा। आज बाज़ार भी बंद था। भैरूलाल ने बहुत मित्रों की। रमेश ने 380 रुपये में यह जूता भैरूलाल को दे दिया। शाम को ही भैरूलाल को एक फॉर्म भरने के लिए पैसों की ज़रूरत पड़ी। उसने यह जूता अपने एक और दोस्त कमल को 400 रुपये में बेच दिया। बताओ, भैरूलाल, रमेश और कमल को लाभ हुआ या हानि? किसको कितना लाभ या हानि हो रहा है?

कुछ लोगों को यह सवाल हल करने को कहिए। उन्हें अपना-अपना उत्तर अपने पास रखने को कहिए। अब बारी-बारी से एक-एक व्यक्ति को बुलाकर उनका उत्तर सुनिए और साथ ही इस उत्तर तक पहुँचने की उनकी प्रक्रिया को समझने का प्रयास कीजिए। क्या सभी के उत्तर एक जैसे हैं? या सभी के अलग-अलग उत्तर हैं? इस सवाल का उत्तर बताते हुए उनके सम्प्रेषण और अभिव्यक्ति की तरफ भी ध्यान दीजिए। क्या वे अपने उत्तर के साथ ही वह तर्क भी रख पा रहे हैं, जिसे सुनकर लोग उत्तर के बारे में आश्चर्य हो जाएँ?

विद्यालय में कई ऐसे बच्चे भी मिलते हैं जो अपने सवालों को कॉपी में लिखकर हल कर लेते हैं। लेकिन यदि उनसे पूछा जाए कि यह सवाल उन्होंने कैसे हल किया है तो वे इसे समझा नहीं पाते हैं। इसीलिए बच्चों के साथ मौखिक सवाल-जवाब किया जाना चाहिए। वे सवालों को हल करके यह भी बताएँ कि अपने उत्तर तक कैसे पहुँचे हैं। उन्हें अपने अनुभवों और दैनिक जीवन के सन्दर्भों का इस्तेमाल कर सवाल बनाने का अवसर भी दिया जाना चाहिए। इससे उनके गणितीय सम्प्रेषण और अभिव्यक्ति के कौशल बेहतर होते हैं।

11. रुझान एवं रुचि (Appreciation)

आपने देखा होगा, बहुत-से लोग प्रतिदिन अखबारों में दी गई वर्ग पहेली भरते हैं। यह वर्ग पहेली संख्याओं या शब्दों दोनों पर ही आधारित होती है। इसे भरने की प्रक्रिया में एक किस्म का गणितीय चिंतन इस्तेमाल हो रहा होता है। गणित विषय में भी सवालों को हल करते हुए एक किस्म के आनंद का अनुभव होता है। यह सवाल दैनिक जीवन की समस्याओं पर भी आधारित हो सकते हैं, या विशुद्ध गणितीय समस्या भी हो सकती है, जिसका दैनिक जीवन से कोई सीधा जुड़ाव नहीं बनता हो। फिर भी इन्हें हल करते हुए आनंद महसूस किया जा सकता है। इसी तरह के रोचक सन्दर्भ और चुनौतीपूर्ण सवालों से हम बच्चों के मन में गणित विषय के प्रति रुचि और रुझान पैदा कर सकते हैं। गणित शिक्षण का एक उद्देश्य यह भी है कि लोगों में इस विषय के प्रति रुचि और रुझान जाग्रत हो। वे इनसे जुड़ें और नए गणितीय ज्ञान का सृजन करें।

रुझान एवं रुचि: गतिविधियाँ तथा सवाल

- आपने अपने बचपन में 0 और X का खेल अवश्य खेला होगा। आज एक बार फिर अपने किसी साथी के साथ इस खेल को खेलिए। आप दोनों में से कौन जीता? या खेल बराबरी पर खत्म हो गया? क्या इस खेल में किसी तरह से गणित या गणितीय कौशलों का उपयोग हो रहा है?

0	X	0
X	X	0
0	0	X

- अपनी दोनों मुट्टियों में कुछ इमली के बीज रख लो। अपने एक साथी के आमने-सामने बैठकर बीच में यह बीज रख दो। आप दोनों को बारी-बारी से एक या दो बीज उठाना है। जो भी अंतिम बीज उठाएगा, वह हार जाएगा। साथ-के-साथ दो-चार बार यह खेल खेलो। बताओ कौन जीता? इस खेल में जीतने वाले ने अपने लिए क्या रणनीति बनाई होगी?
- यह एक सुडोकु है। कुछ संख्याएँ लिखी हैं, बाकी के सभी खाने खाली हैं। आपको सभी खानों में कोई संख्या भरनी है। आपने कौन-कौन-सी संख्याएँ भरी हैं? यही संख्या भरने के पीछे क्या तर्क है?
- इन सभी सवालों को हल करते हुए कैसा लगा? क्या इस तरह के खेल और गतिविधियों के उपयोग से हम गणित विषय में रुचि और रुझान ला सकते हैं?

1		2		3	
2		3		4	
3		4		5	
4		5		6	
		3		4	5
		4		5	6
		5		6	7
		6		7	8

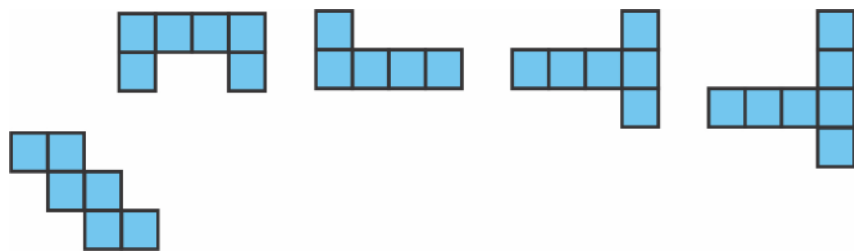
कक्षा 4 की गणित विषय की पाठ्यपुस्तक लीजिए। इसमें से कोई भी एक पाठ चुन लीजिए। अब गणित शिक्षण के सीमित तथा व्यापक उद्देश्यों को ध्यान में रखते हुए इस पाठ का विश्लेषण कीजिए। यह पाठ कौन-कौन-से उद्देश्यों पर काम करने का अवसर दे रहा है?

क्या आप इस पाठ में से किसी ऐसे सवाल का चुनाव कर सकते हैं, जो एक से अधिक विषयों और उनके उद्देश्यों पर काम करने का अवसर दे रहा है? यदि इस पाठ में ऐसा सवाल नहीं है, तो आप स्वयं अपने साथियों के साथ मिलकर ऐसा कोई सवाल बनाइए। इसी नज़रिए से अन्य पाठों का भी विश्लेषण कीजिए।



1.11.1 कार्यपत्रक (Worksheets)

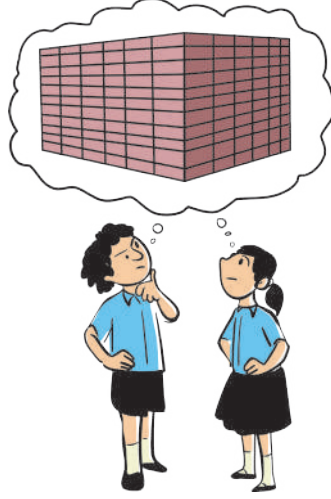
प्रश्न 1: निम्न में से कौन-सी आकृति से घन बनाया जा सकता है? {मानस चित्रण (visualization)}



प्रश्न 2: माचिस की 6 डिब्बिया को ऐसे जमाओ कि उनकी पैकिंग में कम-से-कम कागज़ लगे। विभिन्न स्थितियों पर चर्चा की जाएगी। {इष्टतमीकरण (optimization) के लिए}

प्रश्न 3: 1 से 100 तक की संख्याओं का योग ज्ञात करो। प्राकृत संख्याओं का योग ज्ञात करने के लिए सामान्य सूत्र बनाओ। {सामान्यीकरण (generalization) के लिए}

प्रश्न 4: दो पेड़ों पर कुछ तोते बैठे थे। एक समूह का तोता बोला— यदि मैं तुम्हारे समूह में आ जाऊँ तो हमारी संख्या तुम्हारी संख्या से आधी हो जाएगी। यदि तुम्हारे समूह से एक तोता हमारे समूह में आएगा तो हमारी संख्या तुम्हारी संख्या के बराबर हो जाएगी। अब बताओ, दोनों पेड़ों पर कितने-कितने तोते बैठे थे? (समस्या-समाधान तथा गणितीय निरूपण के लिए)



प्रश्न 5 : एक नज़र देखकर अंदाज़ा लगाओ, ये कुल कितनी ईंटें हैं? क्या 300 से ज़्यादा हैं या 300 से कम हैं? (अनुमान के लिए)

प्रश्न 6 : अंजना और राहुल बहन-भाई हैं। उनके घर कई मेहमान आने वाले थे। माँ ने दोनों को शरबत बनाने में मदद करने के लिए कहा। राहुल ने 5 गिलास पानी में 11 चम्मच शक्कर घोल दिया। जबकि अंजना ने 3 गिलास पानी में 7 चम्मच शक्कर घोल दिया। बताओ, नीचे दिए कथनों में से कौन-सा सही है, और क्यों?

(क) राहुल का शरबत ज़्यादा मीठा है।

(ख) अंजना का शरबत ज़्यादा मीठा है।

(ग) दोनों शरबत बराबर मीठे हैं। (गणितीय निदर्शन, तर्कशीलता, अभिव्यक्ति के लिए)

अतिरिक्त अध्ययन सामग्री (Additional Reading Resources) :

- 1) गणित पोजीशन पेपर, एनसीएफ-2005– एनसीईआरटी, दिल्ली
- 2) लार्ज स्केल कैम्प, राजस्थान 2016 मॉड्यूल– गणित समूह, अज़ीम प्रेमजी फाउंडेशन, राजस्थान
- 3) आलेख: स्वामी और गणित का सवाल– आर. के. नारायण ('सन्दर्भ' पत्रिका से)
- 4) आलेख: मुझे डर लगता है गणित से– गंगा गुप्ता ('सन्दर्भ' पत्रिका से)
- 5) आलेख: गणित की प्रकृति और स्कूली शिक्षा से उसका सम्बन्ध– अमिताभ मुखर्जी ('लर्निंग कर्व' पत्रिका से)

अध्याय 2- प्राथमिक गणित: सीखने-सिखाने की कक्षा-कक्षीय प्रक्रियाएँ

अध्याय 2 प्राथमिक गणित से जुड़ी सभी मूल अवधारणाओं के कक्षा-कक्षीय शिक्षण से सम्बंधित है। सीखने के प्रतिफल (learning outcomes) के सन्दर्भ में अपेक्षित शिक्षण प्रक्रिया पर विस्तार से बात कर रहे इस अध्याय के उद्देश्य इस प्रकार हैं:

- गणित शिक्षण के सीमित तथा व्यापक उद्देश्यों को समझना।
- संख्या तथा संक्रिया- जैसे संख्या-पूर्व अवधारणा, गिनना, संख्या ज्ञान, जोड़-घटाव, गुणा, भाग तथा दशमलव पर आधारित अवधारणाओं की पुख्ता समझ बनाना।
- गणित शिक्षण में रोचक सन्दर्भों, पूर्व अनुभवों, सरल भाषा, मौखिक अभिव्यक्ति की स्वतंत्रता और ठोस सामग्री के महत्त्व को समझना।
- कक्षा-कक्ष में गणित शिक्षण की वास्तविक चुनौतियों तथा उनके समाधान के तरीकों को समझना।
- बच्चों द्वारा की जाने वाली सामान्य गलतियों और उनके कारणों को समझना।
- शिक्षकों से अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ/अभ्यास व उनके साथ काम करने के तरीकों को समझना।
- गणित शिक्षण के दौरान ELPS सिद्धांत के महत्त्व तथा अनुसरण के तरीके को समझना।
- सवालों को हल करने के लिए अपने तरीके खोजना, सवाल बनाना और मानक कलन विधि को समझना।
- कक्षा-कक्ष में गणित शिक्षण के दौरान ही सतत एवं व्यापक आकलन के तरीकों को समझना।
- कक्षा-कक्ष में बेहतर गणित शिक्षण के लिए शिक्षाशास्त्रीय मुद्दों की समझ बनाना।
- पाठ योजना, सत्र योजना, अभ्यास, गतिविधियों तथा कार्यपत्रकों की उपयोगिता को समझना।

2.1 संख्या-पूर्व अवधारणाएँ (Pre-number Concepts)

सीखने के प्रतिफल (Learning Outcomes)

कक्षा 1

- स्थानिक सम्बन्ध जैसे- ऊपर-नीचे, दूर-पास, अन्दर-बाहर, पहले-बाद, मोटा-पतला, छोटा-बड़ा आदि समझना।
- ठोस वस्तुओं, परिवेश की चीजों और चित्र का उपयोग कर इन संदर्भों पर आधारित मौखिक सवाल-जवाब करें।
- मूर्त वस्तुओं या मॉडलों का उपयोग कर उनका वर्गीकरण करें, छूकर तथा अवलोकन द्वारा वर्गीकरण करें।

- पैटर्न का अवलोकन, विस्तार तथा निर्माण करें। क्रम की समझ पर आधारित सवाल हल करें।
- पहचान करना, मिलान करना, छाँटना या समूह बनाना जैसे कौशलों को पुख्ता करें।
- तुलना तथा मापन की समझ विकसित करें।
- एक-एक की संगति समझना और उपयोग करना।

2.1.1 कक्षा-कक्ष में

खीमाराम चौधरी राजसमन्द जिले में स्थित एक प्राथमिक स्कूल में शिक्षक हैं। वे तथा उनके दो और साथी शिक्षक मिलकर पहली से पाँचवीं कक्षा में पढ़ रहे कुल 85 बच्चों को सभी विषय पढ़ाते हैं। पहली से पाँचवीं कक्षा में गणित पढ़ाने की जिम्मेदारी खीमाराम जी की है। खीमाराम जी ने जब स्वयं पढ़ाई की थी तब उनकी पहली कक्षा की किताब 1 से



100 तक गिनती सिखाने से शुरू होती थी। जबकि आज के समय की किताब में यह काम कुछ पाठों के बाद शुरू होता है। अब की किताब के पाठों की शुरुआत दूर-पास, लम्बा-छोटा, खिसकना-लुढ़कना (far-near, long-short, sliding-rolling) आदि से हो रहा है।

खीमाराम जी का मानना है कि ये सब तो बच्चों को पहले से ही पता रहता है। गणित में ये सब पढ़ाने का क्या मतलब है? हालाँकि एसटीसी की दो साल की पढ़ाई के दौरान उन्होंने इन सभी पाठों के बारे में पाठ योजना (lesson plan) बनाई थी, लेकिन वे मन से स्वीकार नहीं कर सके हैं कि इन पाठों का भी गणित से कोई सम्बन्ध है। अतः उन्होंने बोर्ड पर 1 से 50 तक की गिनती लिख दी है और प्रत्येक संख्या पर उंगली रखकर बच्चों को गिनती बोलना और संख्या पहचान करना सिखा रहे हैं।

इसी पंचायत में स्थित दूसरे प्राथमिक स्कूल में रमेश मीणा जी को भी गणित पढ़ाने का काम सौंपा गया है। वे आज बच्चों के बीच बैठकर 'खिसकना-लुढ़कना' (sliding-rolling) पर काम कर रहे थे। उन्होंने एक गेंद को लुढ़काकर और डस्टर को खिसकाकर दिखाया। बच्चों से पूछा कि क्या हो रहा है? बच्चों के पास स्थानीय भाषा का शब्द 'लुढ़कनो' तथा 'हरकणो' था, अतः उन्होंने इन्हीं शब्दों का प्रयोग करते हुए अपना जवाब दिया। रमेश जी ने कई बार प्रयास किया और बच्चों को 'खिसकना' शब्द से परिचित कराया। उनका मानना है कि यहाँ के बच्चों को सही उच्चारण नहीं आता है। जब तक वे सही उच्चारण नहीं सीखेंगे तब तक वे गणित के सवालों को समझ नहीं सकेंगे।

2.1.2 शिक्षकों के साथ काम की तैयारी

रूपा सोलंकी एक शैक्षिक संस्था में काम करती हैं, जहाँ वे और उनके साथी मिलकर सरकार के प्रयासों में सहयोग देते हैं। इनका मुख्य काम शिक्षकों की सहायता करना है तथा अपने जिले के सरकारी स्कूलों में पढ़ रहे बच्चों के लिए सीखने की बेहतर परिस्थितियों का निर्माण करना है। वे नियमित रूप से अपने ब्लॉक के सभी शिक्षकों से संपर्क में रहती हैं और उनकी चुनौतियों को समझने का प्रयास करती हैं। समय-समय पर उनके साथ अकादमिक मुद्दों पर संवाद करती हैं। उन्हें पढ़ने के लिए पत्र-पत्रिकाएँ उपलब्ध कराती हैं। रूपा और उनके साथियों ने पिछले महीने ही ब्लॉक के कई स्कूलों में जाकर बच्चों तथा शिक्षकों के साथ मौखिक बातचीत तथा कुछ लिखित काम किया था। उन्होंने गणित विषय की बुनियादी दक्षताओं में भी बच्चों को कमज़ोर पाया था। कक्षा में जिस तरह काम होना चाहिए, वह नहीं हुआ था।

शिक्षकों के साथ हुए संवाद से रूपा और उनके साथियों को यह स्पष्ट संकेत मिला कि गणित विषय की पढ़ाई बेहतर ढंग से नहीं हो रही है। कई स्कूलों में काम कर रहे गणित शिक्षक अपनी विषयवस्तु और पाठों के उद्देश्यों (Objectives of Math Teaching) को नहीं समझ पा रहे हैं। कुछ ने तो ध्यान से पाठों को पढ़ा भी नहीं है। वे गणित को वैसे ही पढ़ा रहे हैं, जैसा स्वयं पढ़कर आए थे। रूपा और उनके साथियों ने मिलकर इस दिशा में काम करने के लिए ठोस योजना बनाई। सबसे पहले उन्होंने अपने गणित विषय के साथियों के साथ बैठकर किताब में दिए गए शुरुआती पाठों को गौर से देखा-समझा और फिर इन पर काम करने की योजना भी बनाई। गणित विषय के साथियों ने बताया कि पहली कक्षा में बच्चों को गिनती सिखाने से पहले आकृतियाँ और स्थानिक समझ के साथ ही 'संख्या-पूर्व अवधारणाओं' (pre-number concepts) पर काम करना आवश्यक होता है। ये अवधारणाएँ बहुत महत्वपूर्ण हैं तथा आगे की कक्षाओं में पढ़ाये जाने वाले गणित को बेहतर ढंग से सीखने के लिए एक पुख्ता आधार तैयार करती हैं।

शिक्षकों के साथ हुए संवाद से रूपा और उनके साथियों को यह स्पष्ट संकेत मिला कि गणित विषय की पढ़ाई बेहतर ढंग से नहीं हो रही है। कई स्कूलों में काम कर रहे गणित शिक्षक अपनी विषयवस्तु और पाठों के उद्देश्यों (Objectives of Math Teaching) को नहीं समझ पा रहे हैं। कुछ ने तो ध्यान से पाठों को पढ़ा भी नहीं है। वे गणित को वैसे ही पढ़ा रहे हैं, जैसा स्वयं पढ़कर आए थे। रूपा और उनके साथियों ने मिलकर इस दिशा में काम करने के लिए ठोस योजना बनाई। सबसे पहले उन्होंने अपने गणित विषय के साथियों के साथ बैठकर किताब में दिए गए शुरुआती पाठों को गौर से देखा-समझा और फिर इन पर काम करने की योजना भी बनाई। गणित विषय के साथियों ने बताया कि पहली कक्षा में बच्चों को गिनती सिखाने से पहले आकृतियाँ और स्थानिक समझ के साथ ही 'संख्या-पूर्व अवधारणाओं' (pre-number concepts) पर काम करना आवश्यक होता है। ये अवधारणाएँ बहुत महत्वपूर्ण हैं तथा आगे की कक्षाओं में पढ़ाये जाने वाले गणित को बेहतर ढंग से सीखने के लिए एक पुख्ता आधार तैयार करती हैं।



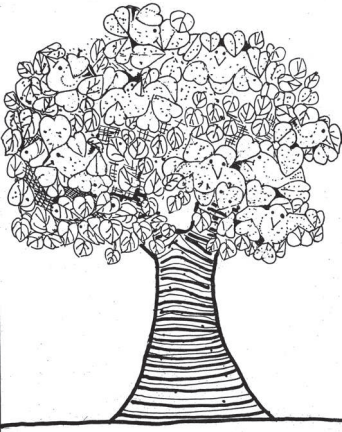
रूपा जिस राज्य में काम कर रही हैं, वहाँ के सरकारी स्कूलों में लागू पुस्तकें यँ तो काफी अच्छी हैं, लेकिन गणित टीम के साथियों का मानना है कि इनमें आकृतियाँ और स्थानिक समझ के साथ ही 'संख्या-पूर्व अवधारणाओं' (pre-number concepts) पर काम करना आवश्यक होता है। ये अवधारणाएँ बहुत महत्वपूर्ण हैं तथा आगे की कक्षाओं में पढ़ाये जाने वाले गणित को बेहतर ढंग से सीखने के लिए एक पुख्ता आधार तैयार करती हैं।

रूपा जिस राज्य में काम कर रही हैं, वहाँ के सरकारी स्कूलों में लागू पुस्तकें यँ तो काफी अच्छी हैं, लेकिन गणित टीम के साथियों का मानना है कि इनमें आकृतियाँ और स्थानिक समझ के साथ ही 'संख्या-पूर्व अवधारणाओं' के मुद्दे पर अच्छे पाठ नहीं हैं। और तो और, सभी महत्वपूर्ण अवधारणाओं को शामिल भी नहीं किया गया है। शिक्षकों द्वारा कुछ अच्छी गतिविधियों को कक्षा में कराने के लिए समुचित दिशानिर्देशों (guidelines/instructions) का भी अभाव है। टीम ने तय किया कि आपस में मिल-बैठ कर दो दिन की तैयारी की जाएगी। इसके बाद ही सभी साथी 'संख्या-पूर्व अवधारणा' पर काम करने के लिए शिक्षकों के बीच जाएंगे।

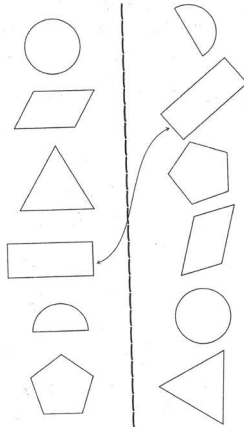
2.1.3 पाठ्यक्रम और पाठ्यपुस्तकें

दो दिवसीय तैयारी बैठक में सबसे पहले सभी लोगों को पहली कक्षा की किताबें दी गईं। सभी ने किताब के पाठों को देखा। पाठों के नाम और इनमें दी गई विषयवस्तु को देखकर रूपा और उसके अन्य साथी उलझन में आ गए। उन्हें समझ ही नहीं आया कि कौन-सा पाठ संख्या-पूर्व अवधारणा पर आधारित है और कौन-सा गिनने व संख्या सिखाने पर आधारित है। अब गणित समूह के साथियों ने कुछ देर के लिए किताब को एक तरफ रखकर इन अवधारणाओं पर बात करना शुरू किया। उनके पास पहले से तैयार एक मॉड्यूल था जिसके तहत वे काम करते हैं। साथ ही पीपीटी का उपयोग करते हुए कुछ कार्यपत्रकों पर काम करने का अवसर देते हैं। गणित टीम के साथी ने सभी के हाथ में एक-एक कार्यपत्रक दे दिया तथा अपनी समझ से हल करने को कहा। नकल करना मना था, लेकिन यह आजादी थी कि जहाँ कहीं भी महसूस हो, वे आपस में बात कर सकते हैं। एक दूसरे से सलाह-मशविरा कर सकते हैं।

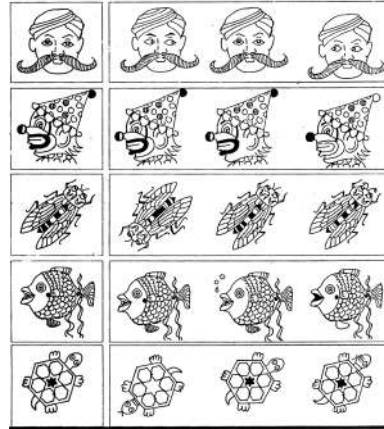
कार्यपत्रक 1: पेड़ पर बनी चिड़ियों को ध्यान से गिनें। चिड़ियों की कुल संख्या को पेज के एक कोने में लिख लें। अब अपने साथियों से बात करें। क्या उनकी गिनती में भी कुल चिड़ियों की संख्या समान आई है? या कुछ अलग उत्तर मिल रहा है? पता कीजिए, गलती कहाँ हो रही है और किससे हो रही है?



source: खुशी-खुशी, कक्षा 1, एकलव्य
(कार्यपत्रक 1)



source: गणित का जादू, कक्षा 1, एनसीईआरटी (कार्यपत्रक 2)



source: खुशी-खुशी, कक्षा 2, एकलव्य
(कार्यपत्रक 3)

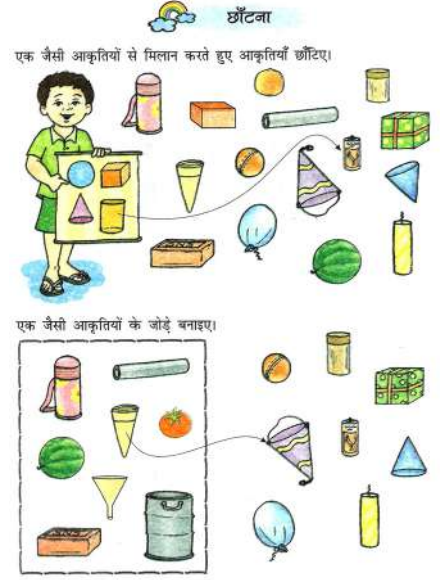
अब सभी को एक बार पुनः चिड़ियों की गिनती करने को कहें। इस बार मार्कर / कलर का उपयोग करके पहले चिड़ियों में रंग भरना है। इसके बाद ही चिड़ियों की गिनती करनी होगी। क्या कुछ चिड़ियों की संख्या पहले से अलग आ रही है या पहले जितनी ही आ रही है?

सोचिये, ऐसा क्यों हुआ? यह गतिविधि करने के दौरान आपने अपने कौन-से (या कौन-कौन-से) कौशलों का उपयोग किया है? ये कौशल आपने कैसे तथा कहाँ से अर्जित किए हैं?

कार्यपत्रक 2: बाईं तरफ बनी आकृतियों का मिलान दाईं तरफ बनी समान आकृतियों से करें। मिलान करने की प्रक्रिया में सबसे पहले आप क्या कर रहे हैं? इसके बाद क्या कर रहे हैं? मिलान करने की प्रक्रिया में आप अपने कौन-से कौशलों का उपयोग कर रहे हैं। ये कौशल आपने कैसे तथा कहाँ से अर्जित किए?

कार्यपत्रक 3: एक जैसे की पहचान करो। एक जैसे की पहचान करने के दौरान आप क्या कर रहे हैं? अपने कौन-से कौशलों का उपयोग कर रहे हैं? क्या छोटे बच्चों के पास ये कौशल पहले से उपलब्ध होते हैं? बतौर शिक्षक ये कौशल अर्जित करने में हम बच्चों की सहायता कैसे कर सकते हैं?

कार्यपत्रक 4: छाँटना, इस कार्यपत्रक में दी गई छाँटना की गतिविधि को बच्चे कैसे करेंगे? कुछ वस्तुओं को बच्चों के सामने डाल/रख दें तथा उन्हें स्वयं से छाँटने को कहें। ध्यान से देखें कि बच्चे वस्तुओं को छाँटते समय कौन-से आधारों का उपयोग कर रहे हैं?



source: गणित का जादू, कक्षा 1, एनसीईआरटी

टीम के सभी सदस्यों ने इन कार्यपत्रकों के साथ दिए गए सवालों को पढ़ा तथा अपनी राय साझा की। इस चर्चा के दौरान साथियों ने कुछ ऐसे कौशलों का नाम भी लिया जो इन कार्यपत्रकों में शामिल नहीं हैं। उनसे कहा गया कि ऐसे कौशलों के लिए भी गतिविधि या कार्यपत्रक सोचें। गणित टीम के साथी ने सभी लोगों की सहूलियत के लिए आकृतियाँ और स्थानिक समझ के साथ ही 'संख्या-पूर्व अवधारणा' की सूची को हिंदी तथा अंग्रेजी भाषा में बोर्ड पर लिख दिया। उन्होंने बताया कि कई पाठ्यपुस्तकों में इनमें से कुछ बिन्दुओं जैसे- तुलना करना (comparison), एक-एक की संगति (one-to-one correspondence), वर्गीकरण (classification) और अनुक्रम पर आधारित पाठ दिए गए होते हैं, लेकिन कई अन्य महत्वपूर्ण बिंदु छूट भी जाते हैं। हमें इन सभी बिन्दुओं पर बच्चों की पुख्ता समझ बनाने के लिए काम करना चाहिए।

2.1.4 संख्या-पूर्व अवधारणाएँ (Pre-number Concepts)

- i. पहचान करना (Identifying / Determining)
- ii. मिलान करना (Matching)
- iii. छाँटना (Sorting)
- iv. समूह बनाना (Grouping)
- v. वर्गीकरण करना (Classification)
- vi. पैटर्न तथा आकृतियों की पहचान करना (Recognizing Patterns and Shapes)
- vii. तुलना करना तथा मापन (Comparison and Measurement)
- viii. क्रम की समझ (Sequential thinking)
- ix. स्थानिक सम्बन्ध देख पाना (Spatial relationship)
- x. एक-एक की संगति (One-to-one correspondence)

गणित के साथियों ने पहले से बनाई गई कार्यपत्रकों की प्रतियाँ भी दे दीं। साथियों ने इन अवधारणाओं और कार्यपत्रकों का अवलोकन किया। (संलग्नक 1- संख्या-पूर्व अवधारणा का पीपीटी)। अब सभी साथियों से

कहा गया कि पुस्तक में दिए गए पाठों को देखें और बताएँ कि किन पाठों में इन अवधारणाओं को शामिल किया गया है। यदि किसी अवधारणा पर बिल्कुल भी काम नहीं किया जा रहा है तो उसके बारे में भी बताएँ। सभी लोग छोटे समूहों में बैठकर ध्यान से एक-एक पाठ देखने लगे। अब से एक घंटे बाद सभी लोग अपने विचार साझा करेंगे। सभी पाठों को देखने तथा आपस में मिलकर उस पर बात करने के बाद सभी साथी दोबारा एकलित हुए और एक-एक अवधारणा को लेकर बात की गई। गणित टीम के साथी इस चर्चा में सुगमकर्ता की भूमिका में रहे। वे पहले साथियों को अपनी समझ रखने का अवसर देते। यदि कहीं कोई बात अटकती या अस्पष्ट रह जाती तो उसे उचित उदाहरणों के साथ समझा देते थे। इस चर्चा से उभरे महत्वपूर्ण बिन्दुओं को लिख लिया गया। ताकि आगे शिक्षकों के साथ काम करते हुए, कक्षा-कक्ष शिक्षण में तथा बच्चों के सीखने का आकलन करने के दौरान साथी लोग इसका उपयोग कर सकें। ये बिंदु इस प्रकार थे-

i. पहचान करना (Identifying / Determining):

किसी बच्चे के सामने कुछ सामग्री रख दें। जैसे- रबड़, पेंसिल, कटोरा, कप, कंचा, माचिस, कागज़, चूड़ी, लाल गेंद, हरी गेंद, चाबी का छल्ला आदि। अब उनसे कहें कि लाल रंग की गेंद उठाकर दें। इस काम को करने के लिए बच्चे/बच्ची को 'गेंद' तथा 'लाल रंग' से परिचित होना आवश्यक है। इसके आधार पर ही वह बताई गई वस्तु की पहचान कर पा रहा/रही है। 'लाल गेंद' के सन्दर्भ में हम जानते हैं कि स्कूल आने से पहले ही अपने दैनिक जीवन के अनुभवों से, अपने परिवेश से बच्चे लाल रंग की पहचान और गेंद की पहचान करना सीख चुके होते हैं। लेकिन कई अन्य वस्तुओं से भी ऐसा परिचय हो गया हो, यह ज़रूरी नहीं है। अतः कक्षा में आने पर भी अवधारणा को पुख्ता होने का अवसर दिया जाना चाहिए।

"सही है, जब हम किसी वस्तु को विभिन्न दूरी, कोण और प्रकाश से देखते हैं तो वह हमेशा एक जैसी दिखाई नहीं देती है। हम वस्तु की इन विभिन्न छवियों से समान गुणों को छाँट लेते हैं। अमूर्तिकरण छाँटने की, चुनने की प्रक्रिया है। जब हम किसी वस्तु को पहचानते हैं तो उसे पहले देखी गई वस्तु के समान गुणों के आधार पर वर्गीकृत करते हैं। अमूर्तन हमें नए अनुभवों को पहले से बने वर्गों में रखने की काबिलियत देता है।"

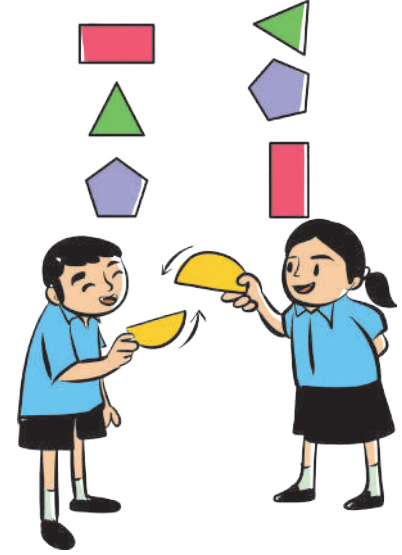


ऊपर दिए गए कार्यपत्रक 1 में चिड़ियों को गिनने के काम के बारे में याद करें। यहाँ पत्तों के बीच से चिड़िया की पहचान करने तथा पत्तों की बनावट और चिड़िया की बनावट में फ़र्क करने के लिए हमें कौन-सी सूचनाओं

को खोजना पड़ रहा था। शायद किसी को चिड़िया में चोंच और आँख होना आवश्यक लगा होगा। या फिर किसी को चिड़िया के पंख नज़र आ रहे होंगे। विभिन्न लोगों के मन में बने चिड़िया की पहचान करने के ये अलग-अलग आधार ही चिड़ियों की कुल संख्या पर एक राय बना पाने में बाधक हो रहे हैं।

ii. मिलान करना (Matching):

दो (दो से अधिक भी हो सकते हैं) वस्तुओं और समूहों में समान गुणधर्म के आधार पर मिलान करना होता है। यह समानता देख पाने के लिए भी वस्तुओं की आपसी तुलना (comparison) करने की आवश्यकता पड़ती है। उदाहरण के लिए कार्यपत्रक 2 में चार भुजाओं वाली आकृति को एक अन्य चारभुजा से जोड़ा गया है। संभव है कि कोई बच्चा बाईं ओर बने आयत की चार भुजा को देख कर दाहिनी ओर बने चतुर्भुज से जोड़ दे। उससे बात करके हम यह जान सकते हैं कि ऐसा करने के पीछे उसकी सोच क्या रही होगी। क्या वह सिर्फ चार भुजा (sides) होने भर से संतुष्ट होकर यह कर रहा है? या चार भुजा होने के साथ-साथ भुजाओं के घुमाव (angles) पर भी गौर कर पाया है? इस तरह हम देखें तो मिलान करने के इस कौशल में आकृतियों की बनावट में आपसी तुलना करना भी निहित है।



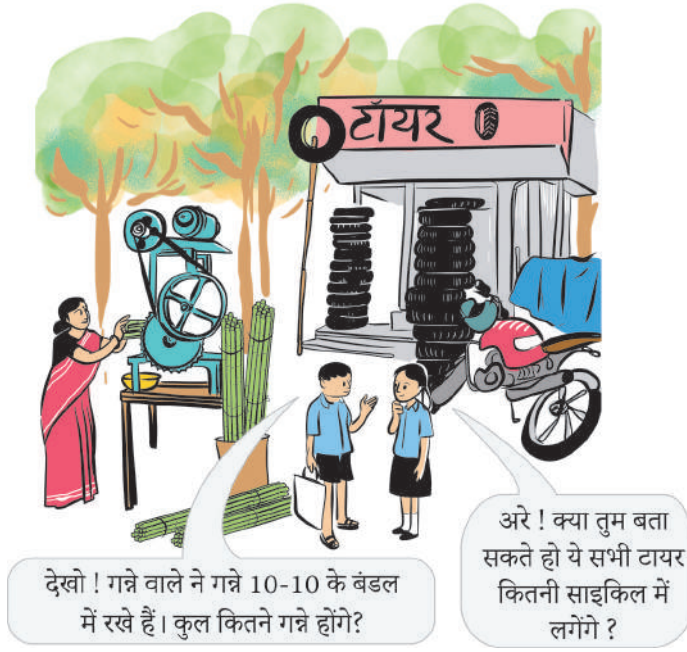
आवर्तन (rotation) और फैलाव (dilation या similar) की स्थिति में समान वस्तुओं को पहचान पाने में बच्चों से क्या संवाद किया जाना चाहिए ?

iii. छाँटना (Sorting):

चीज़ों के ढेर में से कुछ को छाँटकर अलग करना। छाँटने का आधार अलग-अलग संभव है। उदाहरण के लिए ढेर में प्लास्टिक, लकड़ी, लोहा, कपड़ा और रबड़ से बनी वस्तुएँ रखी हैं। कोई व्यक्ति इस ढेर में से बनावट (shape) के आधार पर छाँटाई करते हुए गोल, घनाभ आकार, रोटी जैसा और चूड़ी जैसा आदि को अलग-अलग रख सकता है। जबकि कोई अन्य इनके बनने की प्रक्रिया में इस्तेमाल किए गए पदार्थ (material) के आधार पर अलग-अलग रख सकता है। या फिर एक जैसे रंग (colour) की वस्तुओं को भी एक साथ रख सकता है। छाँटने की प्रक्रिया में आधार चुनने की आजादी बच्चे की स्वयं की होनी चाहिए। यह कौशल समूह बनाने और वर्गीकरण में मददगार होगा।

iv. समूह बनाना (Grouping):

किसी बड़े ढेर में रखी गई चीज़ों से, एक-एक की संगति की समझ का उपयोग करते हुए समान मात्रा के छोटे-छोटे समूह बनाना। यहाँ दिए चित्र में यदि आपसे कुल गन्नों या टायर की संख्या पूछी जाए तो आपका जवाब क्या होगा? क्या आप प्रत्येक को गिन रहे हैं? या किसी एक समूह की वस्तुओं को गिन लेने के बाद आप का दिमाग कोई खास रणनीति (strategy) बना पा रहा है, जिसकी सहायता से आप वस्तुओं की कुल संख्या ज्ञात कर पा रहे हैं? यह रणनीति हम इसीलिए बना पा रहे हैं क्योंकि चीज़ें किसी खास व्यवस्था (arrangement) में रखी गई हैं। बाज़ार में देखा जा सकता है कि दुकानदार अपने सामान को कुछ समूहों (groups) में रखते हैं। यह समूहीकरण (grouping) जल्दी से चाही गई मात्रा बनाने में या फिर तुलना करने में सहयोग करता है।



v. वर्गीकरण करना (Classification):

वर्गीकरण करने की प्रक्रिया में पूर्व-निर्धारित आधारों को ध्यान में रखकर वस्तुओं या घटनाओं का अलग-अलग समूह बनाना होता है। इस कार्यपत्रक में दी गई वस्तुओं को ठेला, खेत और स्कूल से मिलान करना है। कार्यपत्रक को शिक्षकों के एक समूह से हल कराया गया, फिर कुछ बच्चों से भी हल कराया गया। शिक्षकों ने प्रत्येक वस्तु को खेत, ठेला या स्कूल से मिला दिया था। इस चित्र में दी गई एक वस्तु ऐसी भी थी जिसे सभी ने छोड़ रखा था। सिर्फ एक शिक्षक ने इसका मिलान किया था। क्या आप इसे सही जगह मिला सकते हैं? बताइए, यह वस्तु क्या है और किस काम आती है? ज्यादातर शिक्षक युवा थे। वे खेती के काम से बहुत परिचित नहीं थे। खेती के पुराने तरीकों और उपकरणों से उनका कोई वास्ता नहीं पड़ा था। जबकि इसी समूह में बैठे एक उम्रदराज़ शिक्षक ग्रामीण परिवेश में पले-बढ़े हैं तथा खेती के काम करते रहे थे। उन्होंने बताया कि यह कुल्पा है तथा खेत से मिलाया जाना चाहिए। यह खेती की जुताई करते समय बैलों की जोड़ी की पीठ पर रखकर हल के साथ जोड़ने के काम आता है। इस उदाहरण में हम परिवेश की चीज़ों से पहचान के मुद्दे पर दैनिक जीवन के अनुभवों (daily life experiences) से जोड़ते हुए और बात कर सकते हैं। साथ ही बच्चों के लिए परिचित सन्दर्भ (familiar context) के महत्त्व पर ज्यादा प्रकाश डाल सकते हैं।



बच्चों के समूह के साथ काम करने के दौरान पाया गया कि एक बच्चे ने फावड़े को स्कूल तथा खेत दोनों ही जगहों से मिला दिया था। क्या आप बता सकते हैं कि बच्चे ने सही किया है या गलत? आप ऐसा क्यों कह रहे हैं? इसी प्रकार एक अन्य बच्चे ने चित्र में दिख रही बोतल को स्कूल से जोड़ दिया था। उसका मानना था कि यह दवाई की बोतल है और इसका सम्बन्ध स्कूल से ही होना चाहिए, क्योंकि स्कूल में प्राथमिक चिकित्सा का सामान भी रखा जाता है। आपके अनुसार बच्चे का उत्तर सही है या गलत? आप इसे क्या मान रहे हैं? बच्चा इसे वह क्यों नहीं मान रहा है जो आप मान रहे हैं?

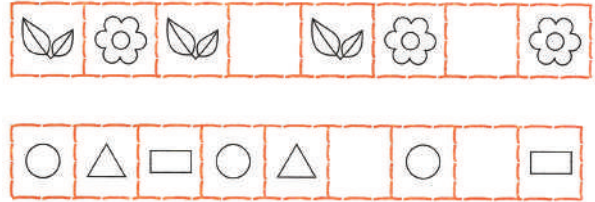
vi. पैटर्न की पहचान करना (Recognizing patterns):

गणित की विषयवस्तु में पैटर्न समझने और बनाने का बहुत महत्त्व है। हम सभी ने अपने स्कूली जीवन में इस तरह की संख्या श्रेणी को पूरा करने का काम किया है—

2, 4, 6, 8, 10,,,

0, 3, 8, 15, 24, 35,,,

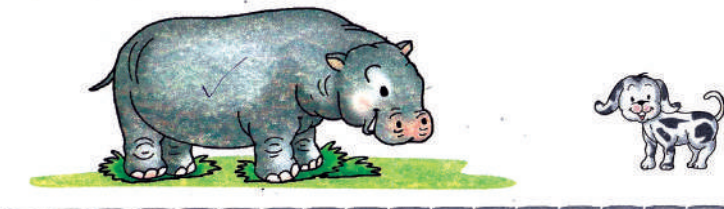
इन संख्या श्रेणियों को पूरा कीजिए तथा सोचिए कि ऐसा करते हुए आपको अपने किन कौशलों का उपयोग करना पड़ रहा है? ये कौशल आपने कहाँ से अर्जित किए हैं? क्या यही काम संख्याएँ सीखने से पहले भी नहीं किया जा सकता है? उदाहरण के लिए कार्यपत्रक की यह गतिविधि देखें जहाँ दो पत्तियाँ, एक फूल, दो पत्तियाँ, एक फूल का अनुक्रम बनाना है। इस तरह के अभ्यास शुरुआती कक्षा से ही बच्चों को अनुक्रम बनाने में मदद करते हैं।



vii. तुलना करना तथा मापन (Comparison and Measurement):

पहली कक्षा में ही तीन (तीन से अधिक भी) संख्याओं को बढ़ते या घटते क्रम में रखने का अभ्यास कराया जाता है। उदाहरण के लिए 7, 9 तथा 5 को आरोही क्रम में रखो। संख्याओं का सम्बन्ध माला से होता है। अतः माला को बेहतर ढंग से समझे बिना बच्चे यह काम नहीं कर सकते हैं। माला के अंतर को दो तरह से समझना ज़रूरी होता है। चार लड्डू और सात लड्डू में से कौन ज्यादा होगा? या फिर एक बड़ा लड्डू और दूसरा छोटा लड्डू? हम बच्चों को दोनों ही तरह से माला का अंतर समझाना चाहते हैं, ताकि वे माला की तुलना आसानी से कर सकें। इस तरह के अभ्यासों का अवसर कक्षा एक से ही दिया जाता है। उदाहरण के लिए दिए गए चित्र को देखकर बड़े पर सही का निशान लगाना है।

बड़े पर (✓) निशान लगाइए।



source: गणित का जादू, कक्षा 1, एनसीईआरटी

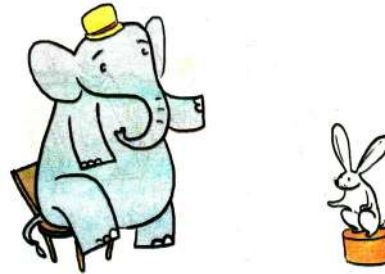


viii. क्रम की समझ (Sequential thinking):

गणित विषय में आप अवश्य ही इस प्रकार के उदाहरण से परिचित होंगे जहां a से बड़ा b है और b से बड़ा c है। अतः हम निश्चित तौर पर कह सकेंगे कि a से बड़ा c होगा। इस उदाहरण पर गौर करें तो हम पाएंगे कि यहाँ पर क्रमिक चिंतन को आधार बनाया गया है। ऐसा ही काम किसी कहानी या किसी घटना को क्रम में रखने को लेकर भी किया जा सकता है। क्या आप यहाँ संलग्न कार्यपत्रक में दिए चित्रों को क्रम में जमा सकते हैं? बताइए, क्रमिक चिंतन का यह कौशल दैनिक जीवन में कहाँ-कहाँ उपयोग किया जा सकता है?

ix. स्थानिक सम्बन्ध (Spatial relationship):

पहली कक्षा के एक बच्चे (या स्कूल आने से पहले भी) को कहा गया कि हाथी और खरगोश शरबत पी रहे हैं। इनके हाथ में शरबत का गिलास बनाओ। दोनों गिलास का आकार बराबर होगा या हाथी का गिलास बड़ा होगा और खरगोश का गिलास छोटा होगा? बच्चों द्वारा बनाए गए गिलास का आकार देखकर हम यह समझ सकते हैं कि वे किस स्तर तक अपनी स्थानिक समझ का उपयोग कर पा रहे हैं।

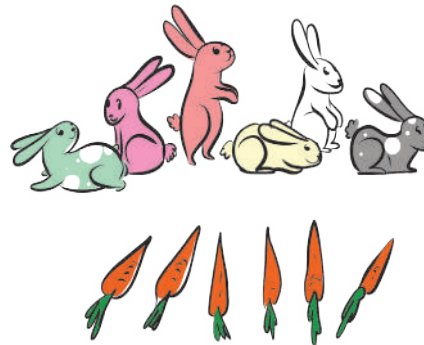


source: गणित की मजेदार दुनिया, कक्षा 1, राजस्थान

गणित विषय में इस कौशल को आगे चलकर अनुपात-समानुपात (ratio-proportion) के रूप में उपयोग करेंगे।

x. एक-एक की संगति (One-to-one correspondence):

एक-एक की संगति में एक समूह के प्रत्येक सदस्य का दूसरे समूह के सदस्य से जोड़ी बनाई जाती है। यहाँ यह ज़रूरी नहीं है कि दोनों समूह के सदस्य में कोई समान विशेषता/गुणधर्म हो। मान लेते हैं कि अभी आपको गिनना नहीं आता है। ऐसे में यदि आपसे सवाल किया जाए कि खरगोश ज्यादा हैं या गाज़र? तो



संलग्नक:- ये सभी कार्यपत्रक खुशी- खुशी, NCERT और गणित की मजेदार दुनिया से लिये गए हैं। वहाँ से इनकी प्रतियाँ लेकर इनका उपयोग करें। साथ ही अज़ीम प्रेमजी फाउंडेशन द्वारा तैयार किये गए गणित विषय के कार्यपत्रकों में भी संख्या-पूर्व अवधारणाओं पर आधारित अभ्यास शामिल किये गए हैं। इनका भी उपयोग किया जाए।

आपका जवाब क्या होगा? आप अपने उत्तर पर कैसे पहुँचे? आइए, इसी गतिविधि का परीक्षण बच्चों के साथ करते हैं। यह कार्यपत्रक पहली कक्षा में दाखिल हो रहे ऐसे बच्चों से हल कराएँ जिन्होंने अभी गिनना नहीं सीखा है। उन्हें अपने तरीके से हल करने दें तथा उनसे बात करके जानें कि वे अपने हल तक कैसे पहुँचे हैं। यह अवधारणा आगे गिनना सीखने के दौरान बहुत काम आएगी, इसकी बात हम आगे करेंगे।

अब रूपा और उसके साथियों ने पाठ्यपुस्तकों को एक बार पुनः देखा। गणित विषय की पहली कक्षा की पाठ्यपुस्तक के वे सभी पाठ जो संख्या-पूर्व अवधारणा (pre-number concept) पर काम करने का अवसर दे रहे थे, अब रूपा को काफी हद तक समझ में आ रहे थे। वह यह भी सोच पा रही थी कि शिक्षकों के साथ क्या काम करना है? उनका ध्यान किन मुद्दों की तरफ दिलाना है? कब कौन-सी सामग्री का उपयोग करना है? राकेश प्रजापति ने सिर्फ दसवीं तक गणित विषय पढ़ा है। उन्होंने आगे की पढ़ाई सामाजिक अध्ययन में की थी। पिछले कई साल से वह पर्यावरण विषय के शिक्षकों की क्षमता संवर्द्धन के लिए काम कर रहे हैं। राकेश ने प्रश्न किया- क्या हम अपने शिक्षकों को ऐसे ही कुछ कार्यपत्रक बनाने या उनका उपयोग करने की सलाह दे सकते हैं? गणित विषय के साथी सहर्ष यह बात मान गए। उन्होंने पहली कक्षा में उपयोग करने के लिए तैयार कार्यपत्रक सभी को दे दिए। साथ ही एक आलेख (article) भी साथियों को पढ़ने के लिए दिया। यह आलेख संख्या-पूर्व अवधारणा को और बेहतर ढंग से समझने में मदद करेगा। इसके अलावा गणित टीम के साथियों ने बोर्ड पर एक कार्ययोजना भी लिख दी। यह कार्ययोजना 'संख्या-पूर्व अवधारणा' पर शिक्षकों की क्षमता संवर्द्धन (capacity building) की प्रक्रिया में बहुत मदद करेगी।

NCERT द्वारा तैयार किए गए सीखने के प्रतिफल पर आधारित दस्तावेज को देखने पर हम पाएंगे कि 'संख्या-पूर्व अवधारणा' के अंतर्गत कई अवधारणाओं, जैसे- वर्गीकरण, समूह बनाना, एक-एक की संगति, मिलान करना, तुलना करना, अनुमान लगाना आदि पर काम करने का आग्रह है। यह काम संख्याओं से पहले तो आवश्यक है ही, बल्कि संख्याओं पर काम करने के दौरान भी अनेक बार इनका उपयोग किया जाएगा।

इस हैंडबुक में हम दस संख्या-पूर्व अवधारणाओं (आप चाहें तो इन्हें उप-अवधारणा भी मान सकते हैं) पर बात कर रहे हैं। हम सभी के लिए यह ज़रूरी होगा कि इन अवधारणाओं को प्राथमिक (और पूर्व प्राथमिक) कक्षाओं में गणित शिक्षण में उपयोगिता के सन्दर्भ में समझें। साथ ही यह भी जानें कि आगे की कक्षाओं में गणित शिक्षण के लिए ये कैसे एक पुख्ता आधार तैयार करती हैं। उदाहरण के लिए यदि किसी परिवार में बाज़ार से खरीदकर आम के फल लाए गए हैं तो सभी को एक-एक आम मिल जाएगा या नहीं, यह जानने के लिए एक-एक की संगति का उपयोग किया जा सकता है।



2.1.5 उदाहरणात्मक कार्ययोजना (Illustrative Session Plan):

	सत्र	विषय	समय	सामग्री
1	बच्चों के स्कूल आने से पहले का ज्ञान स्तर	<ul style="list-style-type: none"> बच्चे स्कूल आने से पहले क्या-क्या जानते हैं? ये सब उन्होंने कैसे सीखा होगा? 	1 घंटा	आपसी बातचीत द्वारा शिक्षक साथियों का अनुभव प्राप्त करना।
2	गणित शिक्षण की शुरुआत कहाँ से	<ul style="list-style-type: none"> गणित शिक्षण की शुरुआत कहाँ से की जानी चाहिए? हमारे स्कूली दिनों में पहली कक्षा के शुरुआती पाठों में क्या होता था? क्या अब भी ऐसा ही है या आज की गणित की किताबें पहले से अलग हैं? पाठ्यक्रम में यह बदलाव क्यों हुआ है? संख्या सिखाने से पहले हमें क्या-क्या सिखाना चाहिए? संख्या-पूर्व अवधारणाएँ क्या हैं? 	2 घंटे	आपसी बातचीत द्वारा शिक्षक साथियों का अनुभव प्राप्त करना। राज्य की गणित पाठ्यपुस्तकें।
3	संख्या-पूर्व अवधारणाएँ	<p>पहचान करना (Identifying/Determining)</p> <p>मिलान करना (Matching)</p> <p>छाँटना (Sorting)</p> <p>समूह बनाना (Grouping)</p> <p>वर्गीकरण करना (Classification)</p> <p>पैटर्न तथा आकृतियों की पहचान करना (Recognizing patterns and shapes)</p> <p>तुलना करना तथा मापन (Comparison and Measurement)</p> <p>क्रम की समझ (Sequential thinking)</p> <p>स्थानिक सम्बन्ध देख पाना (Spatial relationship)</p> <p>एक-एक की संगति (One-to-one correspondence)</p>	3 घंटे	कुछ मुद्दों पर कार्यपत्रक की सहायता से काम कराएँ और कुछ पर ठोस सामग्री की सहायता से। छाँटना (Sorting) की गतिविधि से शुरुआत करें तथा शिक्षकों को छोटे समूह में बैठकर वस्तुओं को छाँटने का अवसर दें। प्रत्येक समूह से यह बात भी करें कि उनके छाँटने के आधार क्या-क्या हैं।
4	संख्या-पूर्व अवधारणाओं का सतत आकलन	<p>सतत आकलन की प्रक्रिया में काम करने के साथ ही यह देखना होगा कि बालक/बालिका की समझ का स्तर क्या है?</p> <p>सीखे गए कौशलों पर काम करने के दौरान वे क्या कर रहे हैं?</p> <p>यह करने के पीछे उनके तर्क क्या हैं?</p> <p>इस कार्य में ठोस सामग्री, मौखिक बातचीत तथा कार्यपत्रकों का उपयोग किया जाएगा।</p>	2 घंटे	ठोस सामग्री मौखिक बातचीत द्वारा परिवेशीय अनुभव सुनना। कार्यपत्रक तथा पाठ्यपुस्तक के अभ्यास।



2.1.6 उदाहरणात्मक पाठ योजना (Illustrative Lesson Plan):

टॉपिक	उद्देश्य	समय	प्रक्रिया	सामग्री
संख्या-पूर्व अवधारणाएँ	<ul style="list-style-type: none"> संख्या-पूर्व अवधारणाओं का विकास करना। बच्चा तुलना कर पाएगा (बड़ा-छोटा, कम-ज्यादा)। बच्चा छाँट पाएगा और इसकी शब्दावली का उपयोग कर पाएगा। बच्चा वर्गीकरण और एक-एक की संगति कर पाएगा। 	5 से 6 कालांश	<p>गतिविधि 1: संख्या-पूर्व अवधारणाओं पर बातचीत करना</p> <ul style="list-style-type: none"> बच्चों से बातचीत की शुरुआत इससे करें कि कौन-सा बच्चा सबसे लंबा है। फिर पूछें, कौन-सा बच्चा सबसे छोटा है? अब बच्चों को पत्थर दें और पूछें, इन पत्थरों में सबसे बड़ा और सबसे छोटा पत्थर कौन-सा है? बड़ा और छोटा छाँटने की गतिविधि को बच्चों के समूह बनाकर समूह में भी करने के लिए दें। बड़े-छोटे के लिए स्कूल की चीजें, जैसे- कौन-सा पेड़ सबसे बड़ा है, कौन-सा पेड़ सबसे छोटा है, आदि बातचीत करें। प्रार्थना सभा में कक्षा तीन में सबसे आगे कौन खड़ा होता है। जब गाय, बैल चरने जाते हैं तो सबसे पहले/आगे कौन रहता है, उसके बाद कौन रहता है? <p>गतिविधि 2: TLM का उपयोग करना और बातचीत करना बच्चों को रंगोमेट्री दें और एक-जैसी चीजों की ढेरी बनाने के लिए कहें। ढेरियाँ आकार, बनावट, रंग आदि के आधार पर बन सकती हैं। इन आधारों पर ढेरी बनाने में बच्चों की मदद करें।</p> <ul style="list-style-type: none"> ढेरियों पर सवाल पूछें कि किस ढेरी में सबसे ज्यादा चीजें हैं और किस ढेरी में सबसे कम। कुछ वस्तुओं को बच्चों के सामने डाल दें तथा उन्हें स्वयं से छाँटने को कहें। कंकड़, पत्तियाँ आदि बच्चों को दें और उनकी ढेरी बनाने के लिए कहें। ढेरी बनाने के आधार पर बच्चों से बातचीत करें। <p>गतिविधि 3: किताबों की कहानी पढ़ना, उसके अभ्यास और कार्यपत्रक पर काम करना</p> <ul style="list-style-type: none"> पाठ्यपुस्तक के पाठ की कहानी को बच्चों के साथ पढ़ें। दी गई कहानी पर रोल प्ले करवाएँ (कहानी पर काम करने के तरीके के लिए हिंदी की हैडबुक से कहानी वाले हिस्से को भी पढ़ें। यह मददगार होगा।) संख्या-पूर्व अवधारणाओं पर बने कार्यपत्रकों (हैडबुक से भी ले सकते हैं) को बच्चों को करने के लिए दें। यह बच्चों के आकलन में भी मदद करेगा। 	<p>आपसी बातचीत द्वारा शिक्षक साथियों का अनुभव प्राप्त करना। ठोस चीजें, रंगोमेट्री, पाठ्यपुस्तक, कार्यपत्रक।</p>



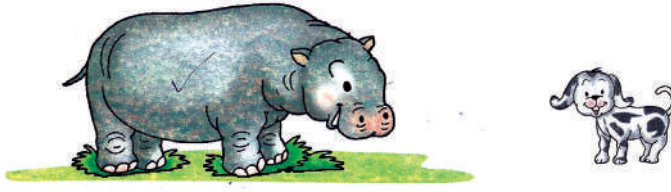
Figure गाजर को खरगोश से मिलाओ।

2.1.7 सार संक्षेप (Summary):

- पहली कक्षा में दाखिला ले रहे बच्चों के साथ उनके परिवेश तथा दैनिक जीवन से सम्बंधित अनुभवों पर मौखिक बातचीत से शुरुआत करें। सीधे संख्या पर काम नहीं शुरू करना चाहिए।
- बच्चे स्कूल आने के पहले से ही अपने दैनिक जीवन के अनुभवों तथा परिवेश से बहुत कुछ सीख कर आते हैं। स्कूल आने पर हम उनके ऐसे ही कौशलों को पुख्ता करते हैं।
- आगे के सम्पूर्ण गणित शिक्षण (या अन्य विषयों में भी) में इन संख्या-पूर्व अवधारणाओं की बहुत महत्त्वपूर्ण भूमिका रहती है।
- स्थानिक समझ यानी दूर-पास, लम्बा-छोटा, मोटा-पतला, खिसकना-लुढ़कना जैसे सन्दर्भों को समझने और समझ को पक्का करने का अवसर दें।
- पहचान करना, छाँटना, मिलान करना, वर्गीकरण, एक-एक की संगति, क्रम समझना, पैटर्न पहचानना व आगे बढ़ाना आदि पर ठोस वस्तुओं, मौखिक बातचीत तथा चित्रों की सहायता से काम करें।

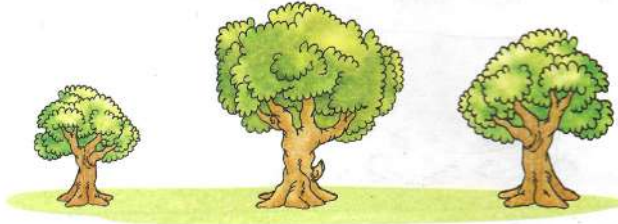
2.1.8 कार्यपत्रक (Worksheets):

प्रश्न 1. बड़े पर (✓) निशान लगाइए।



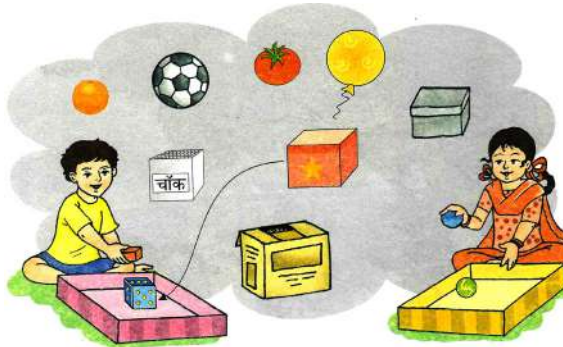
source: गणित का जादू, कक्षा 1, एनसीईआरटी

प्रश्न 2. सबसे छोटे पर (✓) निशान लगाइए।



source: गणित का जादू, कक्षा 1, एनसीईआरटी

प्रश्न 3. रेखा खींचते हुए आकृतियों को गुलाबी और पीले बक्सों में रखिए।



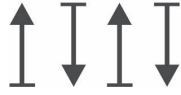
source: गणित का जादू, कक्षा 1, एनसीईआरटी

प्रश्न 4. लुढ़कने वाली चीज़ों पर (✓) निशान लगाइए।



source: गणित का जादु, कक्षा 1, एनसीईआरटी

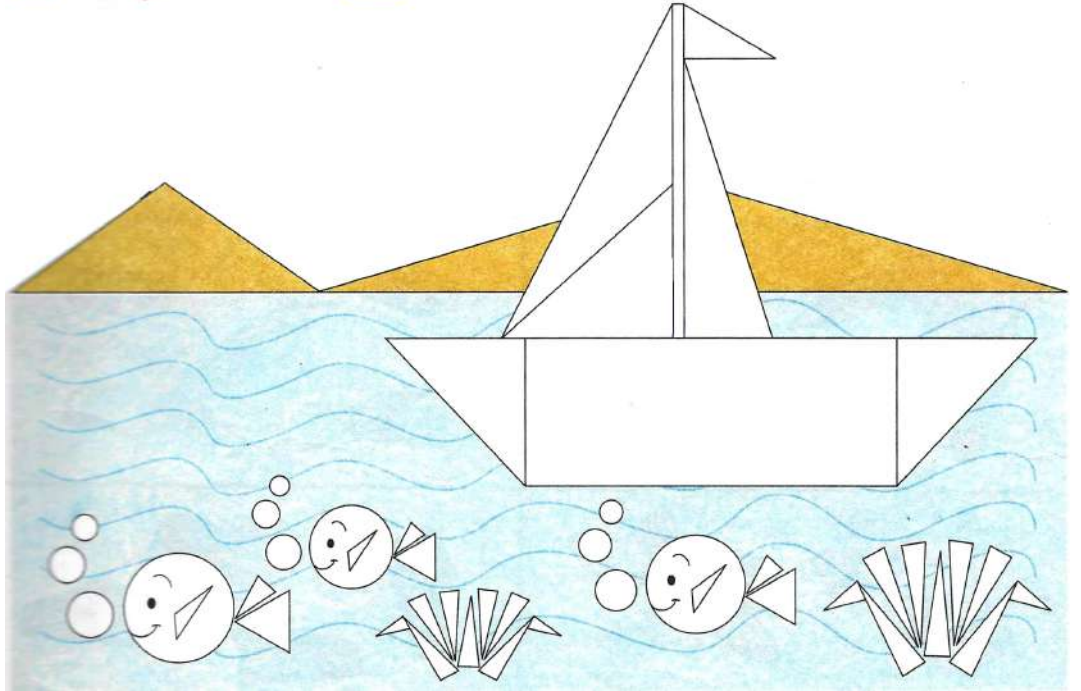
प्रश्न 5. इन्हें आगे बढ़ाइए।



source: गणित का जादु, कक्षा 1, एनसीईआरटी

प्रश्न 6. इस चित्र में रंग भरिए।

▲ हरा, ● गुलाबी और ■ पीला रंग भरिए।



source: गणित का जादु, कक्षा 1, एनसीईआरटी

अतिरिक्त अध्ययन सामग्री (Additional Reading Resources)

- 1) कक्षा 1 की पाठ्यपुस्तक- एनसीईआरटी तथा राज्य में उपयोग की जा रही
- 2) खुशी-खुशी, कक्षा 1 तथा 2
- 3) पीपीटी: संख्या-पूर्व अवधारणाएँ
- 4) आलेख: क्यों छोड़ा ओटा ने स्कूल
- 5) कार्यपत्रक: संख्या-पूर्व अवधारणा (राजस्थान)

2.2 गिनना (Counting)

सीखने के प्रतिफल (Learning Outcomes)

कक्षा 1

- दो समूह में वस्तुएँ रखकर एक-एक की संगति द्वारा कम-ज़्यादा को समझें। कम, ज़्यादा तथा बराबर है जैसे शब्दों का उपयोग करें।
- वस्तुओं को गिनें, किसी समूह से 9 तक वस्तुएँ निकाल सकें।
- शून्य की अवधारणा (एक संख्या के तौर पर) को समझें।
- किसी समूह से 20 तक वस्तुएँ गिनकर निकाल सकें।
- 9 तक के अंकों का योग करने के विभिन्न तरीके खोजें व जोड़ तथ्यों को समझें।
- संख्या नाम, मात्रा और संख्या चिह्न समझें। संख्याओं को लिखना सीखें।
- संख्या नाम और संख्या चिह्न में निहित पैटर्न समझ सकें।

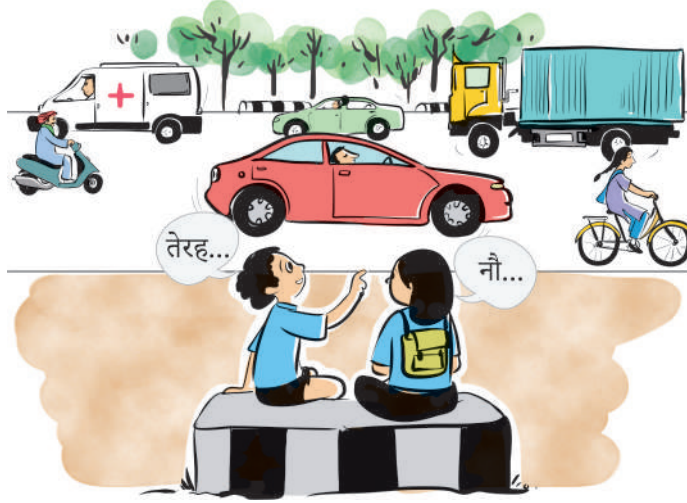
2.2.1 कक्षा-कक्ष की चुनौतियाँ (Classroom Challenges)

शकीला बानू मध्य प्रदेश के खरगोन जिले में कार्यरत एक शैक्षणिक संस्था में काम करती हैं। वे आज एक पंचायत स्थित स्कूलों में शिक्षकों से मिलने गई थीं। वे पिछले कई वर्षों से इस पंचायत के हिंदी भाषा के सभी शिक्षक-शिक्षिकाओं के साथ मिलकर काम कर रही हैं। इस पंचायत में दो प्राथमिक स्कूल आज भी ऐसे हैं, जहाँ पर एक ही शिक्षक है। सभी विषय इनको ही पढ़ाने होते हैं। पहली और दूसरी कक्षा में गणित पढ़ा रही शिक्षिका वंदना मैडम ने कहा कि हमारे बच्चे हिन्दी तो ठीक पढ़ ले रहे हैं, लेकिन उनकी गणित अभी कमज़ोर है। पहली तथा दूसरी कक्षा में कुल मिलाकर 17 बच्चे ऐसे हैं, जिन्हें ठीक से गिनती करना नहीं आता है। कुछ थोड़ी बहुत संख्या बोल लेते हैं, कुछ को अभी सही तरह गिनती याद भी नहीं है। चीज़ें गिनने को कहा जाए तो कई तरह की गलतियाँ करते हैं। इन बच्चों के साथ मैं क्या काम करूँ, ताकि ये अपने स्तर पर आ सकें? शकीला जी ने मैडम को कुछ गतिविधियाँ (activities) बताईं। साथ ही कहा कि कल मैं कुछ शिक्षण अधिगम सामग्री (TLMs) लेकर आऊंगी, तब हम मिलकर साथ में काम करेंगे। मुझे पूरी उम्मीद है कि ये सभी बच्चे कुछ ही दिनों में ठीक से गिनना सीख जाएंगे।

शकीला जी ने अपनी संस्था द्वारा संचालित लर्निंग रिसोर्स सेंटर (Learning Resource Center) में वापस आकर अगले दिन के लिए अपनी तैयारी शुरू की। उन्होंने पहली कक्षा की पाठ्यपुस्तकों को देखा और साथ ही एनसीईआरटी द्वारा जारी सीखने के प्रतिफल (learning outcomes) की पुस्तिका को भी देखा। पुस्तक में दिए गए पाठ्यक्रम (syllabus) के अनुसार पहली कक्षा में बच्चों को 1 से 50 तक गिनना सिखाया जा रहा था। यह काम चरणवार करना है। सबसे पहले 1 से 9 तक, फिर 0 की समझ और इसके बाद 1 से 20 तक, फिर 30 और 50 तक। शकीला जी गिनने पर बेहतर समझ के साथ काम करने के लिए इस मुद्दे पर कुछ पढ़ना चाहती थीं। उन्होंने गिनने पर आधारित एक लेख पढ़ा। इस लेख में गिनती सीखने के दौरान बच्चों को

यह लेख पढ़ें तथा आपस में चर्चा करें:- कब कहेंगे, आबिदा को गिनना आ गया— रोहित धनकर

होने वाली चुनौतियों पर बहुत विस्तार से बात की गई थी, साथ ही कुछ उपाय भी सुझाए गए थे। गणित विषय में काम कर रहे उनके कुछ साथी अपनी कार्यशालाओं में इसी लेख का उपयोग करते रहे हैं।



सवाल: आपने गिनती करना कैसे सीखा था? जो लोग कभी स्कूल नहीं गए हैं, वे वस्तुओं को कैसे गिनते हैं? रुपये-पैसों का हिसाब-किताब कैसे रखते हैं?

बच्चों की कुछ सामान्य चुनौतियाँ (Common Challenges of Learners)

- कुछ बच्चे संख्या नामों के सही क्रम को याद नहीं रख पाते हैं। अतः वस्तुओं को गिनते समय गलती करते हैं।
- कुछ बच्चे किसी संख्या नाम को छोड़ देते हैं या किसी संख्या नाम का दोहराव करते हैं।
- कुछ बच्चे संख्या नामों को क्रमवार रट लेते हैं। लेकिन उतनी ही वस्तुएँ गिनने को कहा जाए तो कई तरह की गलतियाँ करते हैं।
- कुछ बच्चे संख्या नामों और वस्तुओं में एक-एक की संगति नहीं बिठा पाते हैं।
- कुछ बच्चे वस्तुओं को गिनते समय संख्या नाम को तेजी से बोल जाते हैं, लेकिन अपने हाथ को उतनी गति से गिनने में प्रयोग नहीं करते। इस कारण गिनी गई वस्तुओं की कुल मात्रा का ठीक पता नहीं हो पाता है।
- कुछ बच्चे समूह में रखी वस्तुओं को गिनते हुए किसी/कुछ वस्तुओं को छोड़ देते हैं। या किसी वस्तु को एक से अधिक बार गिन लेते हैं।
- किसी ढेर में रखी गई वस्तुओं को गिनते समय यह ध्यान नहीं रख पाते कि किसे गिना जा चुका है और किसे गिनना बाकी है। ऐसे में कुछ वस्तुओं को एक से ज़्यादा बार गिन लेते हैं।
- क्रम से रखी कुछ वस्तुओं में से 3 मांगा जाए तो कुछ बच्चे क्रम से तीसरी वस्तु उठाकर देते हैं। गिनने की प्रक्रिया में लिया गया अंतिम संख्या नाम 'कुल' भी बताता है, यह समझ नहीं होती।
- कुछ बच्चे वस्तुओं के किसी समूह को एक बार ठीक से गिन लेते हैं और कुल मात्रा भी बता देते हैं, लेकिन यदि उनके सामने ही इस समूह को अलग तरह से रखकर दोबारा पूछा जाए कि ये कितनी वस्तुएँ हैं, तो वे फिर से गिनती करते हैं।

2.2.2 गिनना (Counting)

आमतौर पर लोग गिनती तथा गिनना (counting) सिखाने के मुद्दे को बहुत हल्के में लेते हैं। लेकिन छोटी कक्षा में पढ़ा रहे शिक्षकों से बात करने पर पता चलता है कि इस मुद्दे पर काम करने के दौरान उन्हें बहुत ज़्यादा चुनौतियाँ आती हैं। एक कार्यशाला (workshop) के दौरान गणित पढ़ाने वाले शिक्षकों से जब पूछा गया कि कक्षा-कक्ष में उन्हें कौन-कौन-सी चुनौतियाँ आती हैं, तब उनके जवाब इस प्रकार थे:

- बच्चों को तो पढ़ना-लिखना ही नहीं आता। उनके माता-पिता ध्यान नहीं देते हैं।
- सही ढंग से गिनती भी नहीं बोल पाते हैं। बीच की संख्या भूल जाते हैं। जैसे- एक, दो, तीन, चार, पाँच, सात, आठ, दस...
- गिनती करते हुए संख्या का उच्चारण ढंग से नहीं करते हैं। जैसे- उनचास को उनपचास बोलते हैं।
- लिखने में काफी गलतियाँ करते हैं, कुछ संख्याओं को उल्टा लिख देते हैं। छत्तीस को 63 लिख देते हैं।
- वस्तुएँ गिनते समय कुछ चीज़ें छोड़ देते हैं।
- बीस तक की गिनती तो बोल लेते हैं, पर लिख नहीं पाते हैं।
- लगातार बोलने को कहा जाए तो पचास तक बोल लेते हैं, लेकिन यदि पूछा जाए कि तेरह के बाद क्या आएगा तो नहीं बता पाते हैं। दोबारा शुरू से ही गिनते हैं।
- संख्या बोलकर उतनी चीज़ गिनकर लाने को कहा जाए तो बहुत गलतियाँ करते हैं।

इन्हीं शिक्षकों से यह भी पूछा गया कि आप गिनती कैसे सिखाते हैं? उनके जवाब इस प्रकार थे:

- एक शिक्षक ने बोर्ड पर 1 से 100 तक गिनती लिख दी और बताया कि बच्चों से बार-बार बुलवाते हैं, साथ ही कॉपी में उतारने का काम देते हैं।
- एक अन्य शिक्षिका ने कहा कि एक बच्चे को खड़ा करके गिनती बोलने को कहती हैं, बाकी बच्चे पीछे-पीछे दोहरान करते हैं।
- एक अन्य शिक्षक ने बताया कि वे एक, एक, एक... नाक हमारी एक। दो, दो, दो... कान हमारे दो। जैसी कविता गाकर गिनती सिखाते हैं।

ऐसे और भी कई तरीके बताए गए। शिक्षकों द्वारा बताए गए ये तरीके कुछ-कुछ सन्दर्भों में उपयोगी थे। लेकिन एक महत्वपूर्ण काम छूट रहा था— चीज़ों को गिनना। गिनती, चीज़ों को गिनते हुए सीखी जाती है। बिना ठोस चीज़ों (concrete materials) को गिने हुए भला कोई कैसे गिनती सीख सकेगा? लेकिन हमारी कक्षाओं में लम्बे समय से और बहुत ही व्यापक पैमाने पर ऐसा होता आ रहा है। बच्चे बिना ठोस चीज़ों को



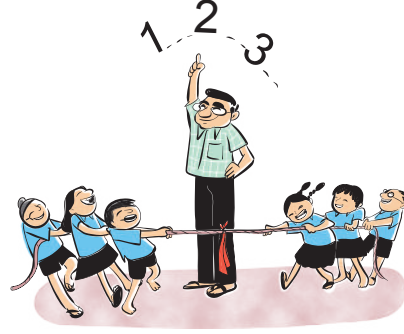
गिने ही गिनती सीख रहे हैं। वे संख्या नामों (number names) को क्रमवार रट लेते हैं और बार-बार अभ्यास करके उनके संख्या चिह्न (number symbols) भी लिखना सीख जाते हैं। लेकिन ठीक से गिनना फिर भी नहीं सीख पाते हैं। तीसरी और चौथी कक्षा में आ जाने के बाद भी उन्हें ठीक से गिनना नहीं आता। कुछ बच्चे तो एक से सौ तक की गिनती फर्फटे से बोल जाते हैं। वे अपनी कॉपी पर सौ तक लिख भी लेते हैं, लेकिन यदि उनके सामने कुछ चीजें रखकर गिनने को कहा जाए तो काफी गड़बड़ करते हैं। भला ऐसा क्यों होता होगा?

2.2.3. गिनने के पाँच सिद्धांत (Five Counting Principles)

गिनने की सम्पूर्ण प्रक्रिया के पाँच महत्त्वपूर्ण सिद्धांत हैं। रोषेल गेलमन और गैलिस्टेल (Rochel Gelman and Gallistel) ने गिनने की प्रक्रिया पर शोध व अध्ययन करने के बाद 1978 में निम्न पाँच सिद्धांतों को दुनिया के सामने रखा था।

1) क्रमबद्धता का सिद्धांत (Stable Order Principle): गिनने की प्रक्रिया में लिए जा रहे संख्या नामों को एक निश्चित क्रम में बोलना/समझना।

जैसे- एक, दो, तीन, चार, पाँच....
वन, टू, थ्री, फोर, फाइव.....
एकः, द्वैः, त्रयः, चत्वारः, पञ्च.....
वंदु, यरडू, मुरु, नालकू, रोदू.....
ओन, रंड, मुन्न, नाल.....



उदाहरण: किसी समूह की वस्तुओं (set of objects) या घटनाओं को गिनते समय हम कुछ शब्दों को बोलते हैं। इन्हें संख्या नाम (number names) कहते हैं। ये संख्या नाम हमें हमारे पूर्वजों से विरासत में मिले हैं। इनका एक निर्धारित क्रम (stable order) होता है। हमें संख्या नामों के इसी क्रम की पालना करनी होती है। यह क्रम हम अपनी मर्जी से नहीं बोल सकते हैं। हमारी संस्कृति तथा भाषा में संख्या नामों का जो क्रम हमारे पूर्वज बोलते या इस्तेमाल करते आ रहे हैं, वही हम भी करते हैं।

बच्चों के साथ हाव-भाव से यह बालगीत करें। तथा इसमें आ रहे संख्या नाम और उतनी ही मात्रा के बारे में बताएँ।

हम हाथी को गिनती सिखाएंगे,
हम हाथी को गिनती सिखाएंगे।
हाथी बोलो एक,
तुम्हें मिलेगा केक।
थोड़ा तुम खाओगे, थोड़ा हम खाएंगे,
हम हाथी को गिनती सिखाएंगे।
हाथी बोलो दो,
तुम्हें मिलेगा ढोल।
थोड़ा तुम बजाओगे, थोड़ा हम बजाएंगे,
हम हाथी को गिनती सिखाएंगे।



हाथी बोलो तीन,
तुम्हें मिलेगी बीन।
थोड़ा तुम बजाओगे, थोड़ा हम बजाएंगे,
हम हाथी को गिनती सिखाएंगे।
हाथी बोलो चार,
तुम्हें मिलेगी कार।
थोड़ा तुम चलाओगे, थोड़ा हम चलाएंगे,
हम हाथी को गिनती सिखाएंगे।
हाथी बोलो पाँच,
करना पड़ेगा नाच।
थोड़ा तुम नाचोगे, थोड़ा हम नचाएंगे,
हम हाथी को गिनती सिखाएंगे।

2) एक-एक की संगति (One-to-one Correspondence): गिनने की प्रक्रिया में क्रम से लिए जा रहे संख्या नामों का समूह की वस्तुओं के साथ एक-एक संगति करना।

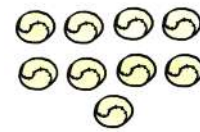
उदाहरण: एक समूह में रखे कुछ कंचे गिनने के दौरान हमें एक कंचे के साथ एक संख्या नाम बोलना होता है, फिर दूसरे कंचे के साथ दूसरा संख्या नाम बोलना होता है। इस तरह हम प्रत्येक कंचे के साथ एक संख्या नाम सम्बद्ध करते हुए आगे बढ़ते हैं। इस प्रक्रिया को एक-से-एक संगति (one-to-one correspondence) करना कहते हैं।



source : गणित की मजेदार दुनिया, कक्षा 1, राजस्थान

गतिविधि: बाहर से कुछ पत्तियाँ व कंकड़ लेकर आओ। अब हर पत्ती के ऊपर एक कंकड़ रखते जाओ। क्या ज़्यादा है, कंकड़ या पत्तियाँ?

3) गिनने की प्रक्रिया में लिया गया अंतिम संख्या नाम (last number name) उस समूह की वस्तुओं की कुल संख्या को बताता है (Cardinality Principle): गिनने की प्रक्रिया में लिए जा रहे संख्या नामों को एक निश्चित क्रम में बोलते हुए वस्तु/घटना के साथ एक-एक संगति करने पर लिया जाने वाला अंतिम संख्या नाम उस समूह के वस्तुओं की 'कुल' संख्या भी बताता है।



_____ गेंदें

_____ साइकिलें



_____ नावें

उदाहरण: एक कक्ष में बैठे कुछ लोगों को गिनने के दौरान प्रत्येक व्यक्ति के साथ एक संख्या नाम सम्बद्ध किया गया (संख्या नामों को निर्धारित क्रम से बोलते

source : गणित की मजेदार दुनिया, कक्षा 1, राजस्थान

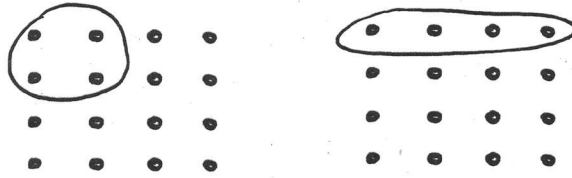
हुए)। यदि इस कक्ष में बैठे अंतिम व्यक्ति के साथ संख्या नाम 'पच्चीस' सम्बद्ध किया गया, तो इसका अर्थ यह हुआ कि इस कक्ष में कुल पच्चीस लोग बैठे हैं।

गतिविधि: कार्यपत्रक में गेंद, साइकिल और नावों की संख्या गिनकर लिखो।

4) क्रम की अप्रासंगिकता (Order Irrelevance Principle): किसी समूह की वस्तुओं को गिनने का काम कहीं से भी शुरू किया जा सकता है। इससे समूह की कुल वस्तुओं की संख्या पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है।
उदाहरण: ऊपर के उदाहरण में जिस कक्ष में बैठे लोगों को गिना गया था, उसी कक्ष में गिनने का काम कहीं से भी शुरू किया जाएगा तो भी कुल संख्या उतनी ही आएगी।



गतिविधि: इमली के बीजों को इस तरह जमाया गया है। गोलू ने चार बीज इस तरह उठाए, जबकि राखी ने दूसरी तरह। तुम किसी और तरह से चार बीज उठाओ।



source : गणित की मजेदार दुनिया, कक्षा 1, राजस्थान

5) अमूर्तता का सिद्धांत (Abstraction Principle): हम ऐसी वस्तुओं और घटनाओं को भी गिन सकते हैं, जो अभी मूर्त रूप में हमारे सामने नहीं हैं। हम आवाज़ों को भी गिन सकते हैं।
उदाहरण: पिछले महीने आपने कितने दिन की छुट्टी ली थी? या तालियों की आवाज़ सुनकर बताना कि ताली कितनी बार बजाई गई।



गतिविधि: शिक्षक ताली बजाएँ और बच्चे गिनकर बताएंगे कि ताली कितनी बार बजी है। फिर बच्चे भी उतनी बार ही ताली बजाएंगे।

छोटे बच्चों के साथ गिनना सिखाने पर काम करने के लिए यह बहुत आवश्यक है कि इन पाँचों सिद्धांतों से संबंधित ज़रूरी समझ बनाने के लिए उनके साथ पर्याप्त गतिविधियाँ (activities) की जाएँ। उन्हें स्वयं चीज़ों को गिनने के अवसर दिए जाएँ।

आप पारंपरिक कक्षाओं में अपनाए जा रहे तरीकों पर गौर करें। आप पाएंगे कि शिक्षक बोर्ड पर गिनती लिखकर उसका दोहरान कराने के दौरान सबसे पहले संख्या लिखना तथा पहचानना सिखाने पर आ जाते हैं। जबकि अभी बच्चों ने ठीक ढंग से संख्या नाम बोलना भी नहीं सीखा है। संख्या नामों के साथ जुड़ी माला की समझ (quantity sense) भी विकसित नहीं हो पाई है। संख्या नामों के बार-बार उच्चारण के अभ्यास के कारण यह तो संभव है कि उन्हें ये संख्या नाम क्रम में याद हो जाएँ, लेकिन सिर्फ इतना भर होने से उन्हें इन संख्या नामों के साथ जुड़ी माला की जानकारी नहीं हो पाएगी।

हमें गिनने के पाँचों सिद्धांतों को समेकित रूप से समझने की आवश्यकता है। किसी भी समूह की वस्तुओं को गिनते समय असल में हम इन पाँचों ही सिद्धांतों का उपयोग करते हैं।

एक उदाहरण: आपके सामने कुछ पत्थर (मान लेते हैं, 9) रखे हैं। आपको इन्हें गिनना है। आप कैसे गिनेगे?

आप गिनने का जो भी तरीका अपनाएंगे, आपको एक से लेकर नौ तक संख्या नाम को एक ख़ास क्रम में बोलना होगा। एक, दो, तीन,, सात, आठ और नौ ...। अब ज़रा गौर कीजिए। पत्थरों को गिनते समय आप संख्या नामों को क्रम में बोलते हुए पत्थरों के साथ एक-से-एक संगति कर रहे हैं। यह एक तरह से दो समूहों में एक-से-एक संगति करने जैसा ही है। एक समूह में संख्या नाम हैं और दूसरे समूह में पत्थर हैं। यह एक-से-एक संगति करते हुए आप पत्थर की सही माला इसलिए जान सके हैं क्योंकि आप को संख्याओं (यहाँ पर संख्या नामों) का सही क्रम याद है। बिना इसके आप संख्या नामों को सही क्रम में बोल ही नहीं पाते। इसीलिए गिनने के सन्दर्भ में संख्या नामों का सही क्रम याद होना आवश्यक है। तभी हम वस्तुओं को ठीक से गिन सकते हैं। इस तरह आप कह सकेंगे कि आपके सामने नौ पत्थर रखे हैं। जब आपने 9 पत्थर बोला तो आपने सिद्धांत 3 का प्रयोग किया, जिसमें अंतिम संख्या नाम समूह में वस्तुओं की संख्या को बताता है। इस तरह से कभी भी गिनने के लिए हम इन सिद्धांतों का प्रयोग आवश्यक रूप से करते हैं। ऐसे ही गिनने में यह मान्यता है कि पत्थर क्रम से सीध में रखे गए हैं।

आगे बिखरे हुए पत्थरों को या ऐसी 9 चीज़ों को गिन पाना जो एक जैसी नहीं हैं, चौथे सिद्धांत से जुड़ा है। यदि 9 तक सही-सही गिनना हो गया तो फिर 9 ऐसी चीज़ों को गिनना जो सामने नहीं हैं, जिनको छू नहीं सकते, अमूर्तता के सिद्धांत से संबंधित है। ये आखिर में लिखे दो सिद्धांत गिनने के अनुप्रयोग को लेकर हैं।

2.2.4 संख्या नाम, माला और संख्या चिह्न में अंतर्संबंध बनाना (Number Name, Quantity and Number Symbol)

अक्सर हम बच्चों के साथ काम करते हुए बड़ी संख्याओं को लिखना सिखाने और उनका जोड़-घटाव करने में भी बहुत जल्दबाजी करते हैं। बहुत-से निजी स्कूलों में तो यह काम तीन साल के बच्चों के साथ ही शुरू कर

दिया जाता है। ज़्यादातर स्कूलों में बच्चे या तो बोर्ड पर लिखी संख्याओं को कॉपी पर उतारते मिलते हैं या फिर एक बच्चा संख्याएँ बोल रहा होता है, बाकी उसके पीछे दोहरा रहे होते हैं। इस प्रक्रिया में वह तो हुआ ही नहीं जिसे हम गिनना कहते हैं। छोटी कक्षाओं में गिनने का मतलब तो यह होना चाहिए कि बच्चों को कुछ वस्तुएँ स्वयं गिनने का अवसर दिया जाए। ताकि वे गिनने की प्रक्रिया तथा गिनने के उद्देश्य दोनों से परिचित हो सकें।

- बस्ते के अंदर क्या-क्या हो सकता है? किन्हीं पाँच चीज़ों के चित्र बनाओ।



source : गणित की मजेदार दुनिया, कक्षा 1, राजस्थान

शिक्षिका- ये इमली के बीज गिनकर बताओ, कितने हैं? इन्हें संख्या कार्ड से भी दिखाओ।

समूह में काम कर रहे बच्चों के बीच से एक बालिका- एक, दो, तीन, चार, पाँच, छह, सात ये सात बीज हैं। बालिका नीचे रखे कार्डों में से उठाकर 7 लिखा संख्या कार्ड दिखा रही है।

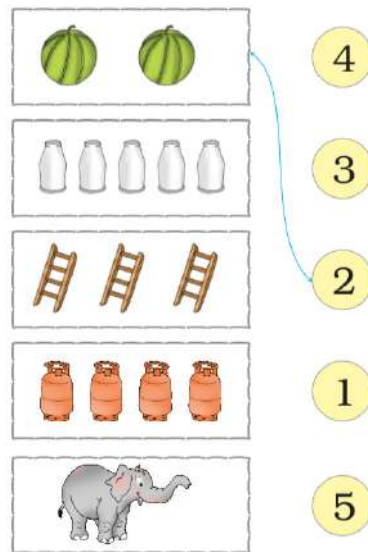


जोड़ के सवालों पर काम करते हुए अक्सर कई बच्चे (कक्षा 2 तथा 3 में) 27+38 को हल करते हुए इस प्रकार का उत्तर लिखते हैं। संख्या

27 में 38 का जोड़ करने से प्राप्त उत्तर 515 यह दर्शाता है कि यांत्रिक तरीके से जोड़ करने के तरीके को उन्होंने आंशिक रूप से ही सही पकड़ लिया है। लेकिन इन माताओं के बारे में अभी उन्हें कोई अंदाज़ा नहीं है। यदि वे 27 और 38 की मात्रा को सही मायने में समझ रहे होते तो यह अंदाज़ तो लगा ही पाते कि यह 50 से ज़्यादा होगा, लेकिन 100 से कम होगा।

$$\begin{array}{r} 27 \\ + 38 \\ \hline 515 \end{array}$$

इस बात से हम यह समझ सकते हैं कि बच्चों के लिए संख्या नाम, संख्या चिह्न और मात्रा के अंतर्संबंधों की पक्की समझ होना बहुत ज़रूरी है। ज़्यादातर शिक्षकों का ध्यान गिनती रटवाने और बोर्ड पर से देखकर बच्चों को अपनी कॉपी में गिनती लिखवाने पर होता है, जिसके कारण संख्या की मात्रात्मक समझ नहीं बन पाती है। साथ ही संख्या चिह्न को देखकर संख्या पहचान भी नहीं कर पाते हैं।



source: गणित का जादू, कक्षा 1, एनसीईआरटी

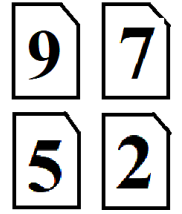
2.2.5 कक्षा-कक्ष के अनुभव (Classroom Experiences)

शकीला जी के साथ काम करने वाले मनोज भाई को डायरी लिखने का शौक है। वे बहुत से स्कूलों में जाते रहते हैं। कई शिक्षकों से मिलते हैं। उन्होंने अपनी डायरी में गणित विषय के कई शिक्षकों के कक्षा शिक्षण के तरीकों को दर्ज किया है। वो इस प्रकार हैं:

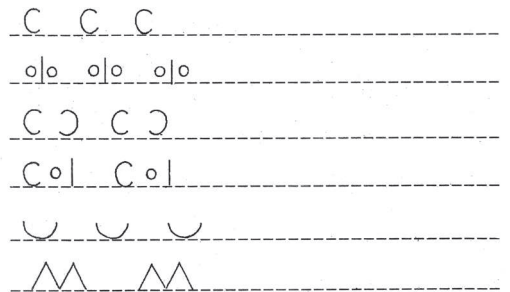
प्राथमिक स्कूल के शिक्षक मुकेश जी कक्षा 1 और कक्षा 2 के बच्चों के साथ बैठकर पढ़ाते हैं। आज बच्चे कंकड़, पत्थर और कंचों को गिन रहे थे। पहली कक्षा के एक बच्चे ने सामने रखे ढेर में पत्थरों को गिनने का प्रयास किया— ‘एक, दो, तीन, चार, पाँच, छह, नौ, दस’। वह संख्या नामों को सही क्रम में नहीं बोल पाया। एक अन्य बच्चे ने संख्या नामों को काफी तेजी से बोलते हुए कंचों को गिना। उसकी गिनती तेरह पर जाकर रुकी। हालाँकि इस समूह में सिर्फ बारह कंचे ही थे। बच्चे ने इतनी तेजी से संख्या नाम बोले कि जल्दी-जल्दी में किसी कंचे को दो बार गिन लिया।

संतोष डहारे मैडम एक प्राथमिक शाला में गणित पढ़ाती हैं। वे गिनती सिखाने पर काम कर रही हैं। उन्होंने कक्षा में मोतीमाला बांध रखी है। रोज़ एक से दस तक बोलकर मोती गिनती हैं और बच्चों को भी गिनने के लिए बुलाती हैं। कुछ बच्चों को अभी ठीक से संख्या नाम याद नहीं हो पाए हैं। ऐसे में उनसे गलती हो जाती है। कक्षा के अन्य बच्चे बड़ी तेजी से बच्चों की गलती पकड़ लेते हैं और सुधार करने में मदद कर देते हैं। संतोष मैडम का कहना है कि मोतीमाला की गतिविधियों से कक्षा में रोचकता (interest) बनी रहती है और सभी बच्चे गिनती करना चाहते हैं। उन्होंने 1 से 20 तक संख्याओं के संख्या कार्ड (number cards) भी बना रखे हैं।

संख्या नाम और माला पर काम करने के साथ ही वे मोतीमाला पर कार्ड टांगकर संख्या पहचान पर भी काम कर रही हैं। कुछ बच्चे संख्याओं को उल्टा लिखते थे और मोतीमाला पर भी उल्टा ही टांग देते थे। इस समस्या के समाधान के लिए संतोष मैडम ने सभी संख्या कार्डों के एक कोने को काट दिया है। बच्चों को बता दिया कि उन्हें हमेशा इन कटे हुए कोने को ऊपर की तरफ ही रखना है। इस तरह अब कोई भी बच्चा संख्याओं को उल्टा नहीं टांगता है।



कक्षा की चारों दीवारों पर बच्चों की पहुँच जितनी ऊँचाई तक श्यामपट्ट बना है। यहाँ पर बच्चे संख्या कार्ड देख कर 1 से 20 तक संख्याएँ लिखते हैं। इन दीवारों पर कई छोटे बच्चे अपने मन के चित्र या डिजाइन भी बनाते हैं। पहली कक्षा के बच्चों की कॉपी में विभिन्न घुमावदार, आड़ी और खड़ी रेखाएँ बनाने के अभ्यास भी दिए जाते हैं। संतोष मैडम पहली कक्षा के बच्चों का हाथ पकड़कर संख्या लिखने में मदद करती हैं।



अपनी कक्षा के लिए एक मोतीमाला और 1 से 100 तक संख्या कार्ड बनाओ।

एक अन्य प्राथमिक स्कूल की शिक्षिका सायरा बानो ने मोतीमाला पर आधारित गतिविधियों का वीडियो अपने फोन पर देखा था। वे कई दिनों से बाज़ार में बड़े आकार के मोती खोज रही थीं, लेकिन वह नहीं मिले। उन्होंने अपने स्कूल के बच्चों को खाली बोतलों के ढक्कन एकत्रित करने को कहा। लाल और हरे रंग के दस-दस ढक्कनों को एक रस्सी में पिरो लिया गया। इस तरह एक अच्छी-सी मोतीमाला तैयार हो गई। अब बच्चे बड़ी रुचि से गिनती बोलते हैं और संख्या नाम, माता, संख्या चिह्न पहचान करने से जुड़ी तमाम गतिविधियों में हिस्सा लेते हैं।

शिक्षक: बच्चों, मैं कोई संख्या बोलूंगा। आपको इस मोतीमाला पर गिनकर उतने ही मोती दिखाने हैं। फिर सही संख्या कार्ड चुनकर उसे सही जगह पर टांगना भी है।

निकिता, तुम इस मोतीमाला पर 'उनतीस' मोती गिनकर दिखाओ। इसके बाद सामने रखे संख्या कार्डों में से 'उनतीस' लिखा कार्ड उठाकर मोतीमाला पर सही जगह टांगो।

निकिता ऐसा ही करती है।



आमतौर पर देखें तो छोटे बच्चे स्कूल आने से पहले ही कुछ वस्तुओं को गिनना सीख जाते हैं। कक्षा 1 में आने पर उनसे अपेक्षा है कि वे पहले 1 से 9, फिर 20 तक और इसके बाद 50 तक संख्याओं की मातात्मक समझ बना लें। यह काम वे संख्या नाम, माता और संख्या चिह्न के एक साथ प्रयोग द्वारा कर सकते हैं। इस प्रक्रिया में हमें दो महत्वपूर्ण सवालों पर गौर करने की आवश्यकता है। क्या हम स्थानीय मान की अवधारणा और समझ विकसित हो जाने तक इंतज़ार करें और उसके बाद ही गिनती, गिनना और संख्याओं को लिखना सिखाएँ। ऐसे तो यह काम हम कक्षा 2 या 3 तक आ जाने के बाद ही कर पाएंगे, क्योंकि स्थानीय मान की पुख्ता समझ बनाने के लिए कई अवधारणाओं और कौशलों पर काम करना होता है, जो कक्षा 1 से शुरू होकर कक्षा 3 तक फैले हुए हैं। इससे अलग एक दूसरा नज़रिया यह है कि हम पहले दैनिक जीवन के सन्दर्भ से जोड़कर गिनना, माता और संख्याओं की पहचान पर काम शुरू कर दें। इसके साथ ही स्थानीय मान की अवधारणा की बुनियादी समझ पर भी काम करते चलें।

सायरा मैडम ने अपने इस नवाचार का वीडियो बनाकर शिक्षक समूहों के बीच साझा किया है। सभी लोग ढक्कनों से बनी मोतीमाला को देखकर उनकी सराहना कर रहे हैं। मनोज भाई की डायरी के ये अनुभव शकीला जी को बहुत अच्छे लगे। उन्होंने तय किया कि अब वे भी नियमित रूप से डायरी लिखा करेंगी। मनोज भाई ने शकीला जी को कुछ गतिविधियाँ भी बताईं, जिनकी सहायता से वे शिक्षकों को पाठ योजना बनाने में मदद कर सकेंगी। गतिविधियाँ व सुझाव इस प्रकार थे:

संख्या को लिखने की गतिविधियाँ तथा अभ्यास

बच्चों को बारी-बारी से बोर्ड पर बुलाकर लिखने के अवसर दें। स्तर अनुसार संख्या नाम बोलें। बच्चे इस संख्या नाम को सुनकर इतनी ही मात्रा में चीज़ें (अपनी पसंद की) बनाएँ, संख्या चिह्न और संख्या नाम भी लिखें। इस तरह वे एक साथ संख्या नाम, मात्रा और चिह्न को समझकर और लिखना सीखते हुए आगे बढ़ेंगे।



चित्र 2: बच्चे अपनी पेन्सिल से इन बिन्दुओं को जोड़कर संख्या लिखने का अभ्यास करें। शिक्षक/शिक्षिका या घर के बड़े उन्हें हाथ पकड़कर संख्या लिखने का अभ्यास कराएँ। इसके बाद इसी तरह के अंकों को सादे पेपर पर लिखने के अभ्यास भी कराएँ। शुरु में अंक थोड़ा टेढ़े-मेढ़े हो सकते हैं। अभी इसकी बहुत ज़्यादा चिंता नहीं करनी चाहिए, लेकिन बच्चों को अपनी लेखनी सुधारने के लिए प्रेरित किया जाना आवश्यक है।



चित्र 3: बच्चों को संख्याओं से चित्र बनाने का तरीका बताएँ। उन्हें अलग-अलग तरह की कल्पना करने तथा संख्या चिह्नों और अक्षरों की सहायता से चित्र बनाने का अवसर दें। (एकलव्य: खुलते अक्षर, खिलते अंक)



गतिविधि 1: रेत या मिट्टी में संख्याओं को लिखने का अभ्यास कराया जाए। छोटे बच्चे वस्तुओं को गिनें, संख्या नाम बोलें और शिक्षक द्वारा लिखी गई संख्या को देखकर रेत/मिट्टी पर संख्या लिखें।

गतिविधि 2: बच्चे एक-दूसरे की पीठ पर अपनी उंगलियाँ चलाकर संख्या लिखें। जिसकी पीठ पर यह संख्या लिखी जा रही है, वह उंगली चलने के आधार पर संख्या को पहचानेगा और सभी को बताएगा।

2.2.6 गिनने के सिद्धांतों पर काम करने के लिए गतिविधियाँ

- **गतिविधि एक:** 5 मनके/बीज/कंकड़/मोती लेकर बच्चों के सामने संख्या नाम बोलते हुए गिनकर दिखाएँ। सभी बच्चों को साथ-साथ ही संख्या नाम बोलने के लिए कहें। बच्चों से भी ये चीज़ें गिनवाएँ। उनको बताएँ कि वे एक बार में केवल एक ही मनके/मोती/कंकड़ को स्पर्श करें। बच्चों को बताएँ कि वे जिस वस्तु को एक बार स्पर्श करें, उसे दोबारा न गिनें। इसी प्रकार सभी बच्चों को अलग-अलग वस्तुओं को गिनने का अवसर दें। जब बच्चे पाँच तक की वस्तुएँ गिनने में पारंगत हो जाएँ तो वस्तुओं को 10 तक बढ़ा दें और उस पर काम करें। जब बच्चे 10 तक की वस्तुएँ गिनने



source : गणित की मजेदार दुनिया, कक्षा 1, राजस्थान

में भी पारंगत हो जाएँ तो उनके साथ 20 तक की संख्याओं के साथ क्रमानुसार काम किया जाए।

- **गतिविधि दो:** प्रत्येक बच्चे को पाँच कंचे और एक कटोरी उपलब्ध कराएँ। एक-एक कर कंचों को कटोरी में गिनकर रखने को कहें। बच्चों से कहें कि एक समय में एक ही कंचा कटोरी में डालें और उसे क्रम अनुसार नाम दें। जैसे- एक कंचा डालने पर एक कहें, दूसरा कंचा डालते समय दो कहें, तीसरा कंचा डालते समय तीन कहें, ऐसे ही चौथा और पाँचवाँ कंचा डालते समय चार और पाँच कहें। इस गतिविधि से बच्चे गिने हुए कंचे और गिने जाने वाले कंचे अलग-अलग देख पाएँगे।
- **गतिविधि तीन:** (गतिविधि दो से आगे) जब कटोरे में पाँच या नौ कंचे हो जाएँ तब बारी-बारी से एक-एक कंचा कम करते हुए कटोरे में बची रह गई मात्रा के बारे में बच्चों से पूछा जाए। जैसे कटोरे में पाँच कंचे हैं, एक कंचा निकाल लिया गया, तो बताओ अब कटोरे में कितने कंचे बचे हैं? एक और कंचा निकाल लिया, अब कटोरे में कितने कंचे बचे? बच्चों से मौखिक जवाब सुनने के साथ ही उसे संख्या कार्ड दिखाने के लिए भी कहें। इस तरह संख्या नाम, मात्रा और संख्या चिह्न पर एक साथ समझ बनाने का अवसर मिलेगा। इसी तरह कटोरे से एक-एक कंचा कम करते हुए अंतिम कंचा भी निकाल लें और बच्चों से सवाल करें कि अब कटोरे में कितने कंचे बचे हैं। बच्चे को अपने शब्दों में अपनी समझ से बात कहने दें। यहाँ उसे बताया जाए कि अब कटोरे में शून्य '0' कंचा है। संख्या कार्ड पर लिखे हुए शून्य के चिह्न से भी परिचित कराएँ। इस तरह शून्य को एक संख्या के रूप में समझने के लिए और भी ठोस वस्तुओं से गतिविधि कराएँ।



- **गतिविधि चार:** बच्चों को कक्षा के बाहर ले जाएँ तथा उनसे कहें कि बोले गए संख्या नाम के अनुसार कंकड़ या बीज चुनकर लाएँ। अन्य बच्चों से कहें कि वे लाई गई मात्रा की जाँच करें तथा बताएँ कि उनके दोस्त ने सही मात्रा में कंकड़ या बीज लाए हैं या नहीं।
- **गतिविधि पाँच:** बच्चों को गोल घेरे में बिठा लें। अब उन्हें ताली बजाकर सुनाएँ। ताली की आवाज़ को गिनने के लिए कहें। इस गतिविधि में बच्चों के सामने गिनने के लिए कोई वस्तु नहीं है। देखिए, क्या बच्चे ताली की आवाज़ को भी गिन पा रहे हैं?
- **गतिविधि छह:** बोलो भाई कितने- बच्चों को गोल घेरे में घूमने को कहें। स्वयं बीच में खड़े हो जाएँ। गीत गाते हुए यह खेल खेला जाएगा।

बच्चे घूमते हुए बोलेंगे- लालाजी ने लड्डू खाए
आपको बोलना है- कितने भाई, कितने?
बच्चे बोलेंगे- आप बोलो, जितने...

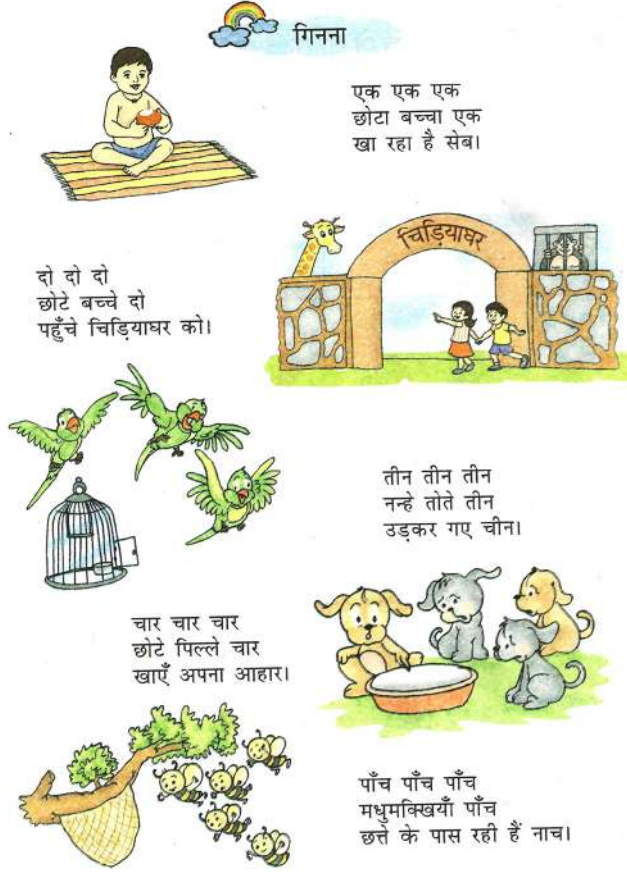
आपको बोलना है- चार या तीन या दो (एक से पाँच तक की संख्या बोलिए)। यह संख्या सुनकर इतने ही बच्चों को मिलकर समूह बनाना है। जो सही समूह नहीं बना पाएंगे वो खेल से बाहर होकर मदद करेंगे।

- **गतिविधि सात:** कार्ड झपट्टा- बच्चों की दो टोलियाँ बना लें। दोनों टोलियों को उनके पाले में भेज दें। बीच में संख्या 1 से 20 तक के संख्या कार्ड रख दें। इन कार्डों के पीछे उतने ही बिंदु बने हों तो बेहतर होगा। अब आपको कोई भी एक संख्या नाम बोलना है। दोनों टीम से एक-एक प्रतिभागी दौड़ कर आएंगे और सामने रखे कार्डों के ढेर से छॉटकर सही कार्ड उठाकर सभी को दिखाएंगे। जो पहले करेगा उस टीम को 1 अंक मिलेगा। इस खेल को कई बार खेलें। संख्या नाम, मात्रा और संख्या चिह्न पहचान से जुड़ी दक्षताएँ विकसित करने में बहुत मदद मिलेगी।
- **गतिविधि आठ:** संख्या बनाओ- दो टीमों में 10-10 बच्चे रख लें। हरेक टीम में 0 से लेकर 9 अंक तक लिखे कार्ड में से सभी को कोई एक-एक कार्ड दें। आपको 1 से लेकर 20 (बाद में 50 तक भी) तक संख्या नाम बोलना है। दोनों टीम के सदस्य दो कदम आगे आकर अपने कार्ड जोड़कर यह संख्या बनाएंगे। जो टीम पहले बना पाएगी उन्हें 1 अंक मिलेगा। इस तरह 5 बार खेलकर देखिए, कौन ज़्यादा अंक जीत सका है।
- **गतिविधि नौ:** साँप-सीढ़ी- संख्या 1 से 50 तक साँप-सीढ़ी का खेल बना लें। इसे बच्चों को आपस में खेलने दें। उन्हें नियमों पर आपस में मिलकर सहमति बनाने दें।

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

2.2.7 बच्चों के साथ दोस्ती बनाने तथा गिनने के कौशलों पर काम करने के लिए कुछ सुझाव

1. एक, एक, एक, नाक हमारी एक, एक मोटा हाथी झूम कर चला जैसी कविताएँ जिनमें संख्या नाम का इस्तेमाल हो रहा है, बच्चों के साथ हाव-भाव से गाएँ। बच्चों को भी ये गीत गाने के लिए कहें।



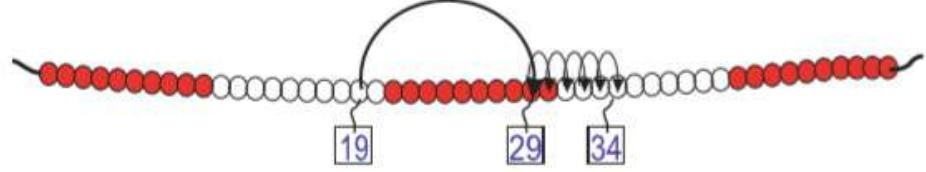
2. बच्चों से पूछें कि कल कुल मिलाकर कितनी चीजें खाई थीं। उन्हें इस सवाल का जवाब बोलकर नहीं बताना है, बल्कि अपनी कॉपी पर उतनी ही लाइन बनाकर दिखाना है।
3. ध्वनि को भी गिना जा सकता है। इस बात की समझ विकसित करने के लिए अपनी ताली को इस प्रकार बजाएँ ताकि हर एक ध्वनि के बीच में लगभग समान अंतराल हो। आप अपने हाथों से चार, पाँच या छह बार ताली बजाएँ तथा बच्चों से पूछें कि कितनी बार ताली बजाई गई है।
4. बच्चों की दो टोलियाँ बना लें (कक्षा में बच्चों की संख्या के अनुसार)। एक टोली संख्या बोलेंगी और दूसरी टोली उतनी ही तालियाँ बजाएगी। आगे टोलियों का काम बदलते रहें।
5. दो-दो तालियों के पैटर्न बनाकर 8 या ऐसे ही अन्य संख्या के बराबर ध्वनि निकालें और बच्चों से गिनवाएँ।

2.2.8 मोतीमाला की गतिविधियाँ

गिनती सिखाने के दौरान बच्चों के लिए रुचि और आनंद का माहौल बनाए रखना बहुत आवश्यक होता है। एक ही काम रोज़-रोज़ करके बच्चे ऊब जाते हैं। ऐसे में मोतीमाला के खेल और गतिविधियाँ एक शिक्षक के लिए बहुत सहायक हो सकते हैं। मोतीमाला द्वारा की जाने वाली गतिविधियाँ इस प्रकार हैं:

- संख्या नाम को सुनकर उतने ही मोती अलग कर दिखाना। इस तरह संख्या नाम के साथ ही मात्रात्मक समझ बनाने में मदद मिलेगी।
- शिक्षक कुछ मोती दिखाकर बच्चों से सवाल करें कि ये कितने हैं। बच्चे संख्या नाम बोलकर बताएंगे।

- बोली गई संख्या सुनकर बच्चे मोतीमाला पर उतने ही मोती दिखाएँ तथा संख्या कार्ड टांगें। इस तरह संख्या नाम, मात्रा और संख्या चिह्न में आपसी सम्बन्ध बनाने में मदद मिलेगी।
- गिनती को आधार बनाकर मौखिक जोड़ तथा घटाव पर काम कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, सात में तेरह को जोड़ने पर कितना मिलेगा? या सत्रह में से नौ कम करने पर कितना बचेगा?
- मोतीमाला पर दस-दस मोतियों को लाल-सफ़ेद-लाल के क्रम में पिरोया गया है। दस के समूह की यह व्यवस्था पैटर्न समझने में मदद करेगी। यह व्यवस्था अप्रत्यक्ष रूप से स्थानीय मान की समझ के विकास में भी मदद करेगी।

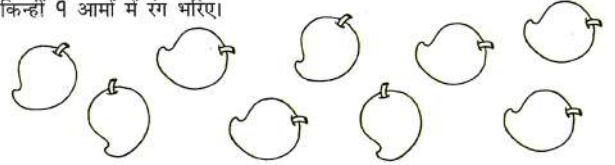


source : आओ गणित सीखें, कक्षा 2, राजस्थान

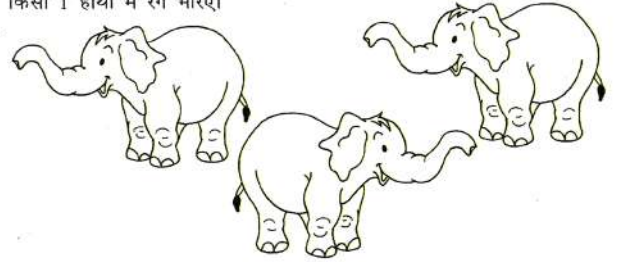
मोतीमाला में दो रंग के मोती और दस का समूहीकरण की व्यवस्था बच्चों के मन में संख्याओं तथा मात्रा का एक चित्र बनाती है। यह चित्र मोतीमाला की अनुपस्थिति में भी संख्या सुनकर मात्रा का अंदाज़ लगाने और कम ज़्यादा बता पाने में मदद करेगी। उदाहरण के लिए 29 के लिए दस लाल, दस सफ़ेद व नौ लाल मोती की छवि बनेगी। जबकि 34 के लिए दस लाल, दस सफ़ेद, दस लाल व चार सफ़ेद मोतियों की छवि बनेगी। बच्चे समझ सकेंगे कि 34 की मात्रा 29 से ज़्यादा है। इसी तरह मोतीमाला की मदद से जोड़ तथ्य (Addition Facts) समझने में मदद मिलेगी। जैसे- संख्या 5 को कई तरह से बनाया जा सकता है। उदाहरण के लिए, $2+3=5$, $3+2=5$, $1+4=5$, $6-1=5$ आदि।

ये सब कुछ पढ़ लेने के बाद शकीला जी ने एक बार फिर से किताबों में गिनना सिखाने को लेकर दिए गए अभ्यासों को देखा। अब शकीला जी इन पाठों में दिए गए अभ्यासों को देख कर समझ पा रही थीं कि यहाँ पर गिनने की अवधारणा से सम्बंधित कौन-से कौशलों पर काम करने का अवसर दिया जा रहा है।

किन्हीं 9 आमों में रंग भरिए।



किसी 1 हाथी में रंग भरिए।



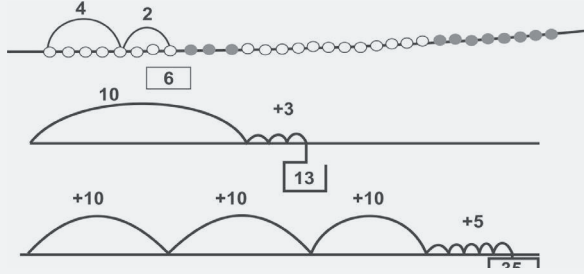
अगले दिन शकीला जी जब स्कूल को

source : गणित का जादू, कक्षा 1, एनसीईआरटी

निकलीं तो उनके पास शिक्षण अधिगम सामग्री से भरा एक थैला था। इस थैले में एक मोतीमाला, आइसक्रीम की तीलियों के बण्डल, ढेर सारे मोती, कंकड़, रबड़ बैंड, 1 से 50 तक की संख्याओं के कार्ड रखे थे। स्कूल में पहुँचकर शकीला जी ने वंदना मैडम को यह सब सामग्री दिखाई और इनके उपयोग के बारे में बताया। साथ ही तकरीबन दो घंटे तक कक्षा 1, 2 और 3 के बच्चों के साथ इन सभी गतिविधियों पर काम किया। इस दौरान पूरे समय वंदना मैडम भी साथ रहीं और प्रत्येक गतिविधि में सहयोग करती थीं। बच्चे कंचे, मोतीमाला

और तीलियों को गिनने के लिए उत्साहित थे। लौटते समय शकीला जी ने वंदना मैडम से अनुरोध किया कि वे नियमित रूप से ये सब अभ्यास कराती रहें। जल्द ही वह फिर बच्चों से मिलने आएंगी।

जोड़ तथा घटाव की अवधारणा पर आधारित कुछ सरल सवालों को लेकर मोतीमाला पर अभ्यास कराएँ। मोतीमाला पर संख्या की कूद के अभ्यास कराएँ। इसे कॉपी पर भी चित्र बनाकर करने को कहें। इसी तरह आगे चलकर खाली संख्या रेखा से परिचित कराएँ। इस तरीके से बच्चों को सवाल हल करने का अवसर दें। यह अभ्यास मनगणित के विकास में बहुत आवश्यक है।



2.2.9 उदाहरणात्मक कार्ययोजना (Illustrative Session Plan)

सत्र	विषय	समय	सामग्री	
1	आपसी परिचय तथा गिनने के सन्दर्भ में बच्चों का पूर्व ज्ञान	<ul style="list-style-type: none"> स्कूल आने से पहले बच्चे कितनी चीज़ों को गिन पाते हैं? यह उन्होंने कैसे सीखा होगा? पाँच-सात तक की मात्रा का ज्ञान होगा, इसे और पुख्ता करें। 	1 घंटा	परिवेशीय अनुभव आधारित मौखिक चर्चा। आस-पास की चीज़ों को गिनना।
2	गिनने के दौरान बच्चों को आ रही चुनौतियाँ	<ul style="list-style-type: none"> गिनने (मौखिक रूप) से सम्बंधित चुनौतियों की बात की जाएगी। शिक्षकों को बच्चों द्वारा की जाने वाली वास्तविक चुनौतियों की तरफ ध्यान दिलाएँ। गिनने की बात के समय लिखने की समस्या भी आएगी, उसे कहीं अलग लिख लें, इस पर आगे बात करें। 	1 घंटा	शिक्षकों के अनुभव, कक्षा-कक्ष की चुनौतियाँ।
3	गिनने के पाँच सिद्धांत	<ul style="list-style-type: none"> ठोस वस्तुओं के साथ काम करते हुए गिनने के पाँच सिद्धांतों पर समझ बनाएँ। बच्चों की विविध प्रकार की चुनौतियों का इन सिद्धांतों के आधार पर वर्गीकरण करें, इन पर काम करने के तरीके समझें। 	2 घंटे	लेख 1- गिनना माने क्या? लेख 2- एक पे एक ग्यारह लेख 3- बालोतरा के बैल और उनके गले की मोतीमाला
4	पाठ्यपुस्तक के अभ्यास तथा शिक्षण सहायक सामग्री का उपयोग	<ul style="list-style-type: none"> गिनने के पाँच सिद्धांतों पर काम करने के लिए कार्यपत्रक/ गतिविधि के उपयोग पर काम करें। कक्षा में काम करते हुए सतत आकलन। 	2 घंटे	पाठ्यपुस्तक, कार्यपत्रक, मोतीमाला आदि।



2.2.10. अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)

कक्षा-कक्ष में संख्या-पूर्व अवधारणाओं और गिनने पर आधारित काम निम्न प्रक्रियाओं के अनुसार किया जाना अपेक्षित है। ये प्रक्रियाएँ उन्हीं सात अवलोकन क्षेत्रों पर आधारित हैं जिनके बारे में हमने अध्याय एक में बात की है। शिक्षकों के साथ संख्या-पूर्व अवधारणाओं और 'गिनना' अवधारणा पर किए जाने वाले काम का आधार भी यही प्रक्रियाएँ होंगी।

अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)- संख्या-पूर्व अवधारणाएँ और गिनना

1. बड़ा-छोटा, मोटा-पतला, एक-एक मिलान आदि के लिए दैनिक जीवन की घटनाएँ, पालों अथवा वस्तुओं का उपयोग करते हैं।
2. संख्या की ऐसी परिस्थिति बनाते हैं, जहाँ पर संख्यात्मक रूप से तुलना करने की ज़रूरत पड़े। उदाहरण के लिए मेले से दो अलग-अलग कीमत के खिलौने को महंगा और सस्ता खिलौना बताना।
3. समूह में गिनने के लिए दी गई चीजों के चित्र को किसी संदर्भ के साथ जोड़ते हैं। उदाहरण के लिए 12 चिड़ियों के चित्र को दो-दो के समूह बनाकर गिनने के लिए किसी कहानी के माध्यम से बताते हैं।
4. दैनिक जीवन के संदर्भों जैसे कि कंकड़/पत्थर गिनवाना, कुर्सी/टेबल, घंटी आदि को लेकर गिनने की प्रक्रिया पर काम करते हैं।
5. संख्या-पूर्व अवधारणाएँ, जैसे कि एक-एक की संगति, क्रम, छाँटना और तुलना का उपयोग करते हुए गिनने की प्रक्रिया पर समझ बनाने का काम करते हैं।
6. गिनवाते हुए एक-एक की संगति और संख्या नाम की क्रमबद्धता की समझ को प्रक्रिया में शामिल करते हैं।
7. माला की समझ को विकसित करने के लिए चीजों को देकर पूछते हैं कि यह कितनी हैं या संख्या बोलकर उस संख्या के बराबर चीजों को उठाने के लिए कहते हैं।
8. गिनती पढ़ाते हुए इस तरह के संदर्भों का भी इस्तेमाल करते हैं जिनको गिनने के लिए छूने की ज़रूरत न पड़े। उदाहरण के लिए घंटी की आवाज गिनने के लिए कहना, धड़कन गिनने के लिए कहते हैं।
9. दो या दो से ज्यादा संख्याओं को बड़ा, छोटा, बढ़ते हुए या घटते हुए क्रम में लिखने के लिए कहते हैं।
10. उपयुक्त माला में चीजों के चित्र लेकर उनको समूहों में जैसे दो-दो के, तीन-तीन आदि के समूहों में गिनने के लिए कहते हैं।
11. संख्या-पूर्व अवधारणाओं, जैसे अनुक्रम बनाना, तुलना करना, एक-एक की संगति के लिए दैनिक जीवन की चीजों से शुरू कर गणितीय वस्तुओं जैसे गोला, घन, घनाभ को शामिल करते हैं।
12. गणितीय निरूपण, जैसे आयत, वर्ग, वृत्त को बनाकर उस पर संख्या-पूर्व अवधारणाओं जैसे अनुक्रम बनाना, तुलना करना, एक-एक की संगति के काम करवाते हैं।
13. गिनमाला पर मोती गिनना, तुलना करना, समूह में गिनने और संख्या कार्ड को क्रम में लगाने का काम करवाते हैं।
14. संख्या की मालात्मक समझ के लिए दस बिंदी वाले बिंदी के पत्ते के चित्र बनाकर काम करवाते हैं। उदाहरण के लिए संख्या के संबंध, जैसे कोई भी संख्या पिछली संख्या से 1 ज्यादा है या 10 कितने तरह से बन सकता है।

अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)- संख्या-पूर्व अवधारणाएँ और गिनना


15. संख्या रेखा पर संख्या को दर्शाना, तुलना करवाना, समूह में गिनने और क्रम में लगाने पर काम करते हैं।
16. गिनती के स्तरवार सीखने के प्रतिफलों को जानते हैं और उसी के आधार पर स्तरानुरूप गतिविधियाँ बनाते हैं।
17. संख्या के संबंधों पर काम करते हैं। पैटर्न, ज्यामिति आदि पढ़ाते हुए भी गिनने का काम करवाते हैं।
18. गिनती पर काम करते हुए संख्याओं का अनुमान लगाने के अवसर देते हैं।
19. संख्या के पैटर्न बनाकर उसको आगे बढ़ाने के लिए कहते हैं।
20. संख्या के पैटर्न बनाकर पैटर्न के नियम को बोलने के लिए कहते हैं।
21. संख्या के संबंधों पर सोचने के लिए कहते हैं। उदाहरण के लिए, जैसे- 10, संख्या 8 से 2 ज़्यादा है। ऐसे ही 14 किस संख्या से 2 ज़्यादा है?
22. ELPS की समझ के अनुसार शिक्षण करते हैं। जैसे कि:
 - ठोस वस्तुओं (कंकड़/बीज... आसानी से मिलने वाली चीज़ों) के साथ अनुभव
 - बोलकर अनुभवों के बारे में बताना यानी भाषा का उपयोग (जैसे माता के साथ संख्या नाम को जोड़ना)
 - इसी प्रकार के कार्यों को फिर चित्रों के साथ करना या चित्रात्मक प्रस्तुति करना
 - प्रतीकों का प्रयोग (संख्यांक एवं संख्या नाम की पहचान और लिखना)
23. ठोस वस्तुओं का इस्तेमाल करते हुए चित्रों पर और फिर चित्रों की तरफ बढ़ते हैं। जैसे कि कंकड़/पत्थर गिनवाना, फिर चित्र गिनवाना और फिर अमूर्त प्रतीक चिन्हों (संख्या चिह्न) को देखकर मालात्मक समझ पर जाते हैं।
24. उपयुक्त सहायक सामग्री, जैसे कि पहले खुली ठोस वस्तुएँ, फिर कुछ बंधी सामग्री (गिनमाला), फिर कुछ चित्रों से गिनवाना और फिर अमूर्त में समझ बनाने पर काम करते हैं।
25. गिनने की समझ पर काम करते हुए ही ये जाँचना कि बच्चों को कहाँ गिनने में परेशानी आ रही है, जैसे कि बच्चे गिनने के मुख्य 3 पहलुओं को ठीक से समझ पाए हैं या नहीं। क्या वे एक संख्या नाम के साथ या तो वस्तु को छोड़कर या ज़्यादा वस्तुओं को तो नहीं गिन रहे हैं। संख्या नाम बोलने में क्रम है कि नहीं, इन बातों को प्रक्रिया के दौरान ही जाँचते हैं।
26. आकलन के विभिन्न तरीकों, जैसे गृहकार्य, वर्कशीट, प्रोजेक्ट आदि का प्रयोग शिक्षण की प्रक्रिया के हिस्से के तौर पर करना।
27. पाठ्यपुस्तक के हिस्से पर ज़रूरत के अनुसार वर्कशीट बनाते हैं।
28. बच्चों को गणित करने के अपने तर्क को लिखने के लिए देते हैं, उन तरीकों को पढ़ते हैं, उनका विश्लेषण करते हैं और उस पर आधारित पढ़ाने की योजना बनाते हैं।
29. गिनने के पाँचों सिद्धांतों की समझ रखते हैं और उन बच्चों की पहचान कर पाते हैं जिन बच्चों को किसी चरण पर दिक्कत आ रही है, उनकी मदद के लिए विशेष योजना बनाते हैं।
30. स्कूल के बच्चों के बारे में बता पाते हैं कि किन बच्चों को गिनना ठीक से आता है, कितने बच्चे तुलना कर पाते हैं, कितने बच्चे संख्याओं को क्रम में जमा पाते हैं आदि।



2.2.11. उदाहरणात्मक पाठ योजना (Illustrative Lesson Plan)

टॉपिक	उद्देश्य	समय	प्रक्रिया
गिनना	<ul style="list-style-type: none"> बच्चे ठोस वस्तुओं को गिनना सीख सकेंगे। समूह में दी गई वस्तुओं को गिन सकेंगे और अन्य समूह में दी गई वस्तुओं से तुलना कर सकेंगे। संख्या या मात्रा के आधार पर वस्तुओं का वर्गीकरण कर सकेंगे। संख्याओं को लिखना सीख सकेंगे। 	20 से 25 कालांश	<p>गिनने पर कैसे काम करें-</p> <p>सबसे पहले बच्चों के साथ बैठकर कोई कविता, खेल या गतिविधि की जाए, ताकि बच्चे आपसे जुड़ सकें। बच्चों के साथ सामान्य बातचीत की जा सकती है। अपने बारे में भी ज़रूर बताएँ, जैसे- आपका नाम क्या है? क्या काम करते हैं? आपका घर कहाँ है?</p> <p>इस बातचीत में बच्चे कुछ पूछते हैं तो उनकी बात को ध्यान से सुना जाए (जैसे हम बड़े लोगों की बात सुनते हैं) और ईमानदारी से जवाब दिया जाना चाहिए। गिनने पर कक्षा में काम शुरू करते हुए यह पता लगाएँ कि बच्चों को गिनने के बारे में कितना पता है और कितना काम और किया जाना बाकी है।</p> <p>आप कुछ बच्चों को बुलाकर पूछ सकते हैं कि मेरे हाथ में कितने पत्थर के टुकड़े हैं या टेबल पर कितनी चीजें हैं। साथ ही एक नियम भी बना दें, जिससे पूछा जाए वही उत्तर देगा। हो सकता है कुछ बच्चे जिद करें कि मैं गिनकर दिखाता हूँ। पत्थर के टुकड़ों को एक-एक करके सबको गिनने के लिए दिया जाए, ताकि यह पता चल सके कि कितने बच्चों के साथ काम करना है।</p> <p>अगर बच्चे गिनते समय गिनने के नियमों का पालन करते हैं तो आपका काम आसान हो जाएगा और अगर नहीं करते हैं तो आपको गिनने के सभी सिद्धांतों पर एक-एक करके काम करना होगा।</p> <p>गतिविधि 1:</p> <ul style="list-style-type: none"> 5 मनके/बीज/कंकड़/मोती लेकर बच्चों के सामने संख्या बोलते हुए गिनकर दिखाएँ। बच्चों को बताएँ कि वे भी एक बार में केवल एक ही मनके/मोती/कंकड़ को स्पर्श करें। बच्चों को बताएँ कि वे जिस वस्तु को एक बार स्पर्श करें उसे दुबारा न गिनें। इसी प्रकार अलग-अलग वस्तुओं को गिनने का अवसर दें।

टॉपिक	उद्देश्य	समय	प्रक्रिया
गिनना			<p>गतिविधि 2:</p> <ul style="list-style-type: none"> • प्रत्येक बच्चे को पाँच कंचे और एक कटोरी उपलब्ध कराएँ। एक-एक कर कंचों को कटोरी में गिनकर रखने को कहें। • बच्चों से कहें कि एक समय में एक ही कंचा कटोरी में डालें और उसे क्रम अनुसार नाम दें। जैसे- एक कंचा डालने पर एक कहें, दूसरा कंचा डालते समय दो कहें, तीसरा कंचा डालते समय तीन कहें, ऐसे ही चौथा और पाँचवाँ कंचा डालते समय चार और पाँच कहें। • इस गतिविधि से बच्चे गिने हुए कंचे और गिने जाने वाले कंचे अलग-अलग देख पाएंगे। <p>गतिविधि 3:</p> <ul style="list-style-type: none"> • बच्चों को कक्षा के बाहर ले जाएँ तथा उनसे कहें कि बोली गई संख्या अनुसार कंकड़ या बीज चुनकर लाएँ। • अन्य बच्चों से कहें कि वे बच्चों द्वारा लाई गई मात्रा की जाँच करें तथा बताएँ कि उनके दोस्त ने बोली गई संख्या के अनुसार सही मात्रा में कंकड़ लाए हैं या नहीं। <p>गतिविधि 4:</p> <ul style="list-style-type: none"> • बच्चों को गोल घेरे में बिठा लें। अब उन्हें ताली बजाकर सुनाएँ। • ताली की आवाज़ को गिनने के लिए कहें। • इस गतिविधि में बच्चों के सामने गिनने के लिए कोई वस्तु नहीं है। • देखिए, क्या बच्चे ताली की आवाज़ को भी गिन पा रहे हैं? <p>गतिविधि 5:</p> <ul style="list-style-type: none"> • इस तरह के अनुभव देने के बाद नीचे बनी वर्कशीट के प्रिन्टआउट हर एक बच्चे को दें। इसमें वस्तुओं को हर बार ख़ास तरीके से सजाया गया है। • हर बच्चे को अपने गिनने के तरीके को बोलने दें। बच्चों के गिनने के तरीके का अवलोकन करें, देखें कि क्या बच्चे हर बार एक-एक करके ही गिन रहे हैं। इस वर्कशीट को तब भी दें जब बच्चे ठीक से 20 तक गिनना सीख जाएँ और देखें कि क्या वे समूह में गिन रहे हैं, अगर नहीं तो समूह में गिनने में बच्चों की मदद करें। <div data-bbox="826 1659 1114 2022" style="text-align: center;"> </div>

टॉपिक	उद्देश्य	समय	प्रक्रिया
गिनना			<p>इन गतिविधियों के द्वारा जब बच्चे पाँच तक की वस्तुएँ गिनने में पारंगत हो जाएँ तो वस्तुओं को 10 तक बढ़ा दिया जाए और उस पर काम किया जाए। जब बच्चे 10 तक की वस्तुएँ गिनने में भी पारंगत हो जाएँ तो उनके साथ 20 तक और अधिक संख्या के साथ क्रमानुसार काम किया जाए।</p> <p>गतिविधि 6: वस्तुओं को गिनने के भरपूर अवसर देने के बाद प्रतीक चिह्नों को भी गतिविधियों में शामिल करें। इसके लिए कुछ निम्नलिखित स्टेप्स कक्षा में किए जा सकते हैं:</p> <ul style="list-style-type: none"> दो-दो तालियों के पैटर्न बनाकर 8 या ऐसे ही अन्य संख्या के बराबर ध्वनि निकालें और बच्चों को गिनने के लिए कहें। उतनी संख्या का फ्लैश कार्ड गिनमाला में टाँकने के लिए कहें। 

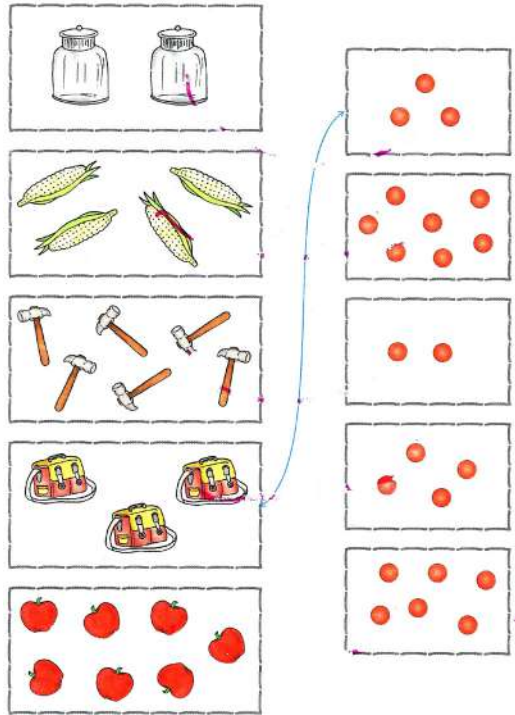
2.2.12 सार संक्षेप (Summary)

- गिनने पर काम शुरू करने से पहले संख्या-पूर्व अवधारणाओं (एक-एक की संगति, अनुक्रम, वर्गीकरण, तुलना आदि) पर बच्चों की समझ पुख्ता करें।
- ठोस वस्तुओं के समूह दिखाकर कम, ज़्यादा पर बात करें। माला के बारे में अंदाज़ लगाने दें।
- गिनती सिखाने के दौरान ठोस वस्तुओं का उपयोग कर संख्या नाम व माला समझने का अवसर दें।
- 0 से 9 तक के चिह्नों की पहचान कराने से पहले बच्चों को संख्या नाम और माला समझने का पर्याप्त अवसर दें।
- संख्या नाम और माला पर समझ बन जाने के बाद संख्या चिह्न की पहचान कराएँ। संख्या चिह्न को लिखने की जल्दबाज़ी न करें।
- चीज़ों को गिनने की प्रक्रिया में बच्चों को ठोस वस्तुएँ गिनने का अवसर दें। उनकी चुनौतियाँ अलग-अलग हो सकती हैं। अतः प्रत्येक की चुनौती समझकर उनके लिए योजना बनाएँ।
- गिनने पर काम करने के दौरान इन पाँच सिद्धांतों का ध्यान रखें। ठोस वस्तुओं के साथ इन पर काम करें।
- क्रमबद्धता का सिद्धांत (Stable Order Principle)- संख्या नामों को सही क्रम में बोलें।
- एक-एक की संगति (One-to-one Correspondence)- संख्या नामों के साथ वस्तुओं की एक-एक की संगति बिठाते हुए गिनें।
- गिनने की प्रक्रिया में लिया गया अंतिम संख्या नाम उस समूह की वस्तुओं की कुल संख्या को बताता है (Cardinality Principle)।
- क्रम विनिमयता का सिद्धांत (Order Irrelevance Principle)
- अमूर्तता का सिद्धांत (Abstraction Principle)
- पाठ्यपुस्तक में दी गई गतिविधियों द्वारा गिनने के कौशलों का विकास कराएँ।



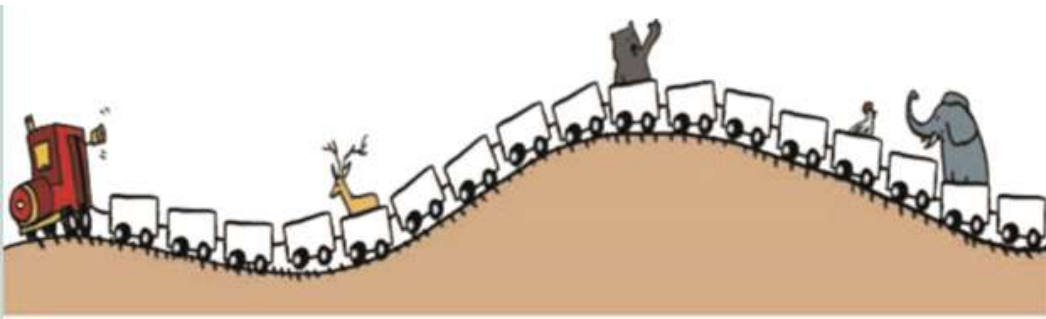
2.2.13 कार्यपत्रक (Worksheets)

प्रश्न 1. गिनो और सही जोड़े से मिलान करो।



source : गणित का जादू, कक्षा 1, एनसीईआरटी

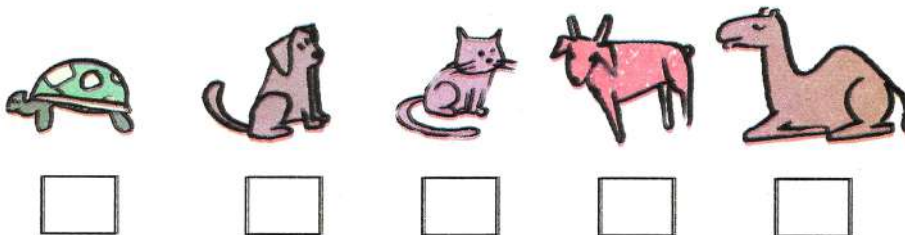
प्रश्न 2. हिरण 5 नंबर के डिब्बे में बैठा है। भालू 10 नंबर के डिब्बे में बैठा है।



source: गणित की मजेदार दुनिया, कक्षा 1, राजस्थान

मुर्गा _____ नंबर के डिब्बे में बैठा है। हाथी _____ नंबर के डिब्बे में बैठा है।

प्रश्न 3. पेंसिल से जानवरों को अपनी पसंद के रेल के डिब्बे से जोड़ो तथा उस डिब्बे का नंबर उसके पास बने घर में लिखो।



source : गणित की मजेदार दुनिया, कक्षा 1, राजस्थान

प्रश्न 4. गिनो और लिखो।



चिड़ियाँ		_____
साइकिलें		_____
आम		_____
बच्चे		_____
तितलियाँ		_____
फूल		_____
गिलहरियाँ		_____

source: गणित की मजेदार दुनिया, कक्षा 1, राजस्थान

अतिरिक्त अध्ययन सामग्री (Additional Reading Resources)

- 1) कक्षा 1 की पाठ्यपुस्तक- एनसीईआरटी तथा राज्य की पाठ्यपुस्तक
- 2) AMT इकाई पाँच: गिनना कैसे सिखाएँ
- 3) आलेख: कब कहेंगे कि आबिदा को गिनना आ गया- रोहित धनकर
- 4) आलेख: एक पे एक ग्यारह, एक पे दो बारह- सन्दर्भ, एकलव्य
- 5) आलेख: बालोतरा के बैल और उनके गले की मोतीमाला- सन्दर्भ, एकलव्य
- 6) गिनने के पाँच सिद्धांतों पर आधारित पीपीटी

2.3 स्थानीय मान (Place Value)

सीखने के प्रतिफल (Learning Outcomes)

कक्षा 1

- पैटर्न का अवलोकन कर अपने शब्दों में कहें। पैटर्न का अवलोकन, विस्तार तथा निर्माण करें।
- 20 तक और 20 से बड़ी दो अंकों की संख्याओं की मात्रा को दस के समूह तथा खुली इकाइयों के रूप में समझें, इसी अनुसार वस्तुओं को गिनें।
- 0 की अवधारणा को समझें।

कक्षा 2

- संख्याओं के नाम तथा संख्या लिखने का पैटर्न पहचानें।
- दो अंकों की संख्याओं की मात्रा को दर्शाने, संख्या पहचानने, लिखने व तुलना की प्रक्रिया में किसी संख्या में अंकों के स्थानीय मान की समझ का उपयोग करें।
- संख्या के किसी स्थान पर 0 होने के मतलब को समझें।
- स्थानीय मान की समझ के आधार पर दो अंकों की संख्याओं का जोड़-घटाव करें तथा अपने तरीके खोजें।

कक्षा 3

- बड़ी संख्या में उपलब्ध वस्तुओं को 100 के समूह, 10 के समूह और इकाइयों के रूप में गिनें।
- तीन अंकों की सबसे बड़ी तथा सबसे छोटी संख्या लिखने के लिए स्थानीय मान का उपयोग करें।
- 999 तक की संख्याओं को स्थानीय मान की मदद से पढ़ें तथा लिखें। इन संख्याओं की तुलना स्थानीय मान के आधार पर करें।

कक्षा 5

- 1000 से बड़ी संख्याओं को स्थानीय मान के आधार पर समझकर चार मूल संक्रियाएँ करें।
- स्थानीय मान की समझ का उपयोग करते हुए मानक विधि से सवालों को हल करें।

2.3.1 पंचायत स्तरीय कार्यशाला (PEEO Level Workshop)

पंकज और बलविंदर कौर छत्तीसगढ़ के बेमेतरा जिले में कार्यरत एक शैक्षिक संस्था में काम करते हैं। एक ब्लॉक स्थित कुछ पंचायतों में कार्यरत गणित और भाषा विषय के शिक्षकों के साथ वे प्रति माह एकदिवसीय कार्यशाला का आयोजन करते हैं। यह कार्यशाला पंचायत प्रारम्भिक शिक्षा अधिकारी के सहयोग से आयोजित की जाती है। तय तिथि से एक दिन पहले वे सभी गणित शिक्षकों को व्हाट्सएप्प सन्देश भेज देते हैं। दूसरे दिन सभी लोग किसी स्कूल में उपस्थित हो जाते हैं। जिस स्कूल में भी यह कार्यशाला आयोजित की जाती है, वहाँ के प्रधानाध्यापक एक खाली कक्षा में लोगों के बैठने तथा चाय आदि की व्यवस्था कर देते हैं। अमूमन यह एकदिवसीय कार्यशाला सुबह 10 बजे शुरू हो जाती है तथा शाम 4 बजे इसका समापन होता है। बीच में आधे घंटे के लिए चाय-नाश्ते का विराम किया जाता है।

गत माह की कार्यशाला में गिनने के कौशल तथा संख्या ज्ञान पर काम किया गया था। इस दौरान कई शिक्षकों

ने बताया कि उनकी कक्षा में पढ़ने वाले बच्चे संख्याओं को ठीक ढंग से नहीं लिख पाते हैं। राम चरण सर ने बताया कि उनकी कक्षा के कई बच्चे 'तिरेसठ' को 36 लिखते हैं। ललिता साहू मैडम ने कहा कि उनकी कक्षा में कई बच्चे 'दो सौ आठ' को 2008 लिखते हैं। मुबारक अली सर ने बताया कि उनकी कक्षा के बच्चे बिना हासिल वाला जोड़-घटाव कर लेते हैं, लेकिन जैसे ही हासिल का सवाल आता है तो उनकी गलतियाँ बढ़ जाती हैं। इसी तरह अन्य शिक्षकों ने भी बताया कि बच्चे एक से सौ तक की गिनती बोल लेते हैं, लेकिन लिखने में परेशानी आती है। यदि उतनी ही मात्रा लाने को कहा जाए तो वे गड़बड़ करते हैं। इस कार्यशाला में इन सभी मुद्दों पर कुछ बात हो पाई थी, लेकिन समयाभाव के कारण तय किया गया कि एक और कार्यशाला इसी मुद्दे पर रखी जाएगी। जहाँ विस्तार से इन समस्याओं पर बात की जाएगी।

आप अपनी कॉपी पर 25 तक संख्याएँ लिखिए। अब इन्हें आगे बढ़ाते हुए 58 तक संख्याएँ लिखिए। क्या ऐसा करते हुए आपको कोई परेशानी हुई? क्या यही काम करते हुए पहली और दूसरी कक्षा के बच्चों को किसी तरह की चुनौती आती होगी? अपने आस-पास के किसी प्राथमिक विद्यालय में जाकर कुछ दिन कक्षा 1 और 2 के बच्चों के साथ काम कीजिए और पता लगाइए कि उन्हें किस तरह कि चुनौतियाँ आती होंगी? आपने बिना किसी परेशानी के 58 तक संख्याएँ लिखी हैं। ज़रा सोचिए, ऐसा करते हुए आप संख्या बनाने (लिखने) के कौन-कौन से सिद्धांतों और अवधारणाओं का उपयोग कर रहे हैं?

इसी काम को अब हम एक नए तरीके से करने का प्रयास करते हैं। हमारे पास दस अंक— 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 हैं। इन्हीं दस अंकों का उपयोग करते हुए हम अपनी संख्याएँ लिखते हैं। संख्या 1 से 58 तक लिखने के दौरान आपने इन्हीं दस अंकों का उपयोग किया है। इन्हीं अंकों के नए-नए संयोजन बनाकर हम बड़ी-से-बड़ी संख्या लिख सकते हैं।

मान लीजिए, आपके पास सिर्फ पाँच ही अंक हैं— 0, 1, 2, 3, 4। इन्हीं पाँच चिह्नों की सहायता से आपको आगे की संख्याएँ बनानी हैं। अब आप एक बार फिर एक से बीस तक संख्याएँ (इन्हीं पाँच चिह्नों का उपयोग करते हुए) लिखने का काम कीजिए। यदि आवश्यकता हो तो आप 'समूहीकरण' और 'स्थानीय मान' की अवधारणाओं का उपयोग यहाँ इस नई परिस्थिति में भी कर सकते हैं।

- एक से बीस तक बनाई गई नई संख्याओं को लिखिए। यह भी बताइए कि इस पद्धति में आप कौन-से नियमों की पालना कर रहे हैं? ये नियम आपको क्यों बनाने पड़े?
- अपने साथियों द्वारा बनाई गई संख्या पद्धतियाँ भी देखिए। क्या सभी ने एक जैसी संख्याएँ लिखी हैं? उनके द्वारा बनाए गए नियमों से आप कितने सहमत हैं?

एकदिवसीय कार्यशाला की तैयारी

आगामी एकदिवसीय कार्यशाला की तैयारी पर विचार-विमर्श करने के लिए आज पंकज और बलविंदर कौर ने गणित विषय के साथियों के साथ एक बैठक की। इस बैठक में कई महत्वपूर्ण मुद्दों पर बात की गई। उनकी मीटिंग के मिनट्स इस प्रकार हैं:

1. कुछ स्कूलों में जाकर बच्चों द्वारा संख्या लिखने की चुनौतियों की पहचान करना।

2. बच्चों द्वारा संख्या लिखने की प्रक्रिया में आने वाली चुनौतियों की विविधता और इनके कारणों को समझना ।
3. संख्याओं के ऐतिहासिक विकासक्रम को समझना । दशमिक संख्या पद्धति को समझना ।
4. कुछ अन्य संख्या पद्धतियों से तुलना करना ।
5. पाठ्यपुस्तक तथा अन्य स्रोतों द्वारा सुझाए गए उपाय संकलित करना ।
6. इस काम में उपयोगी शिक्षण अधिगम सामग्री का उपयोग ।

गणित विषय के साथी ने पंकज और बलविंदर को कुछ महत्वपूर्ण पठन सामग्री (reading material) भी दी । दोनों ने इसे ध्यान से पढ़ा । अगले दिन पंकज और बलविंदर आस-पास स्थित तीन प्राथमिक स्कूलों में गए । इन स्कूलों में अक्सर आना-जाना होता रहता है । अतः बच्चे तथा शिक्षक-शिक्षिका उनको अच्छे से पहचानते हैं । कक्षा 1, 2, 3 व 4 में पढ़ रहे कुछ बच्चों को एक साथ कक्षा में बैठाकर, उनके साथ कुछ गतिविधियाँ तथा बातचीत की गई । बलविंदर सवालियों को बोर्ड पर लिख देती थी और बच्चों के साथ मौखिक रूप से (oral) या बोर्ड पर बुलाकर हल करवाती थी । इस दौरान पंकज ध्यान से बच्चों की तरफ से कही जा रही बात को सुनता और अपनी डायरी में दर्ज कर लेता था । इस सामूहिक शिक्षण के बाद सभी बच्चों को उनकी कक्षा स्तर (level) के अनुरूप बनाया गया कार्यपत्रक (worksheet) हल करने को दिया गया । सभी बच्चों ने स्वयं तथा अपने साथियों की मदद से ये कार्यपत्रक हल किए । दफ्तर लौटकर पंकज और बलविंदर ने आज के अपने अनुभवों पर बातचीत की और बच्चों द्वारा दिए गए जवाबों का विश्लेषण (analysis) किया ।

बच्चों के जवाब इस प्रकार थे:

कक्षा 1 में पढ़ने वाले राहुल ने 1 से 50 तक गिनती लिखने का काम किया था । उसे संख्याओं के पैटर्न की पक्की समझ नहीं है । साथ ही किसी संख्या में आने वाले अंकों (digits) के क्रम को लिखने में भी गड़बड़ हो रही है । राहुल ने 11 तक की संख्या को ठीक लिखा है, लेकिन इससे आगे 12, 13, 14, 15, 16 आदि को लिखने के दौरान वह गलती कर रहा है । यहाँ पर हम कह सकते हैं कि राहुल को दो अंक की संख्या (two-digit number) में उपयोग किए जाने वाले अंकों के बारे में जानकारी है, लेकिन उनको क्रम से लिखने में गलती हो रही है । आगे जाकर 25 के बाद की संख्या में वह पैटर्न को आगे नहीं बढ़ा सका है ।

	Monday	Tuesday	Wednesday	Thursday	Friday	Saturday	Sunday
1	2	3	4	5	6		
7	8	9	10	11	12	13	
14	15	16	17	18	19	20	
21	22	23	24	25	26	27	
28	29	30	31				

source: मोहम्मद अज़ान की कार्यपुस्तिका,
कक्षा 1, राजसमन्द

कक्षा 2 की सीमा ने इकतीस (thirty one) को अंकों में लिखते हुए 13 लिखा है । 'सीमा ने ऐसा क्यों किया होगा?' – पंकज ने कहा ।

'उसे यह तो पता है कि 3 और 1 के संयोजन से इकतीस बनता है, लेकिन सही क्रम नहीं ध्यान रहा होगा' – बलविंदर ।

गोपाल कक्षा तीन में पढ़ रहा है। उसने 139 के ठीक बाद की संख्या को 1310 लिखा है। इसी तरह कक्षा 4 में पढ़ रही सकीना ने 2010 से ठीक पहले की संख्या के लिए 209 लिखा है। हल लिखने का इनका तरीका देखकर ही समझ में आ गया था कि इस तरह की गलतियाँ क्यों हो रही हैं।

पंकज ने अपनी डायरी में नोट की गई बातों को देखकर बताया— 'बोर्ड पर जब 67 लिखकर पहली कक्षा में पढ़ने वाले बच्चों से पूछा गया था कि यह कितना है, पहली कक्षा में पढ़ रहा रामधीर कुछ देर चुप रहा था, फिर बलविंदर की तरफ घूमकर पूछा... साठ की लाइन में आएगा... फिर उसने इकसठ, बासठ, तिरसठ, चौसठ, पैंसठ, छच्छठ, ... सड़सठ कहा था। इसी तरह कक्षा 2 में पढ़ने वाले राजू ने 98 और 103 में बड़ी संख्या बताते हुए बोर्ड पर लिखा था $98 > 103$ । राजू से जब पूछा गया कि उसने यह जवाब क्यों दिया है तो वह बिना कुछ बोले चुपचाप खड़ा रहा था।

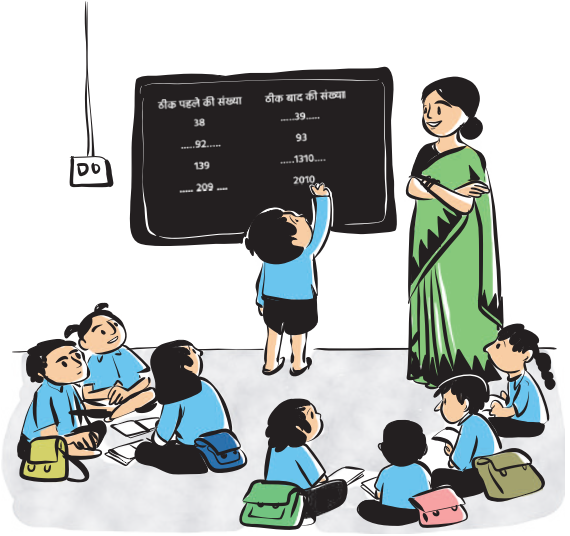
कक्षा 4 में पढ़ने वाले गोविन्द ने कार्यपत्रक में दिए गए जोड़-घटाव के सवालों को कुछ इस प्रकार हल किया था।

$$\begin{array}{r} 42 \\ -18 \\ \hline 34 \end{array} \quad \begin{array}{r} 304 \\ -57 \\ \hline 353 \end{array} \quad \begin{array}{r} 207 \\ +45 \\ \hline 657 \end{array}$$

पंकज और बलविंदर बच्चों से प्राप्त इस तरह के जवाबों को समझने के लिए कुछ देर तक आपस में बातचीत करते रहे। यह जवाब देख कर उन्हें भी अपने बचपन की गणित कक्षाएँ याद आ गई थीं।

सवाल : बच्चे इस तरह के जवाब क्यों दे रहे हैं? बतौर शिक्षक उनकी ऐसी चुनौतियों को हम कैसे कम कर सकते हैं?

आज का पूरा दिन बलविंदर और पंकज ने अपनी स्वयं की तैयारी (preparation) में लगाया। आज उन्हें गणित विषय में पहले से काम कर रही सुमेधा का साथ भी मिल गया था। सुमेधा के पास संख्या और स्थानीय मान (place value) के मुद्दे से सम्बंधित बहुत अच्छे लेख और किताबें थीं। उन्होंने कुछ विषयों पर पीपीटी भी बना रखी थी। तीनों ने आपस में मिलकर कुछ मुद्दों को समझा। उन्होंने सुमेधा द्वारा उपलब्ध कराई गई सामग्री को पढ़ा और उसपर बात भी की।



2.3.2 आलेख: संख्याओं का इतिहास (History of Numbers)

इंसानों ने मात्रा को कब से समझना शुरू किया होगा, यह कहना मुश्किल है। अब तक उपलब्ध प्रमाण बताते हैं कि मात्रा की इस समझ और इससे जुड़े हिसाब-किताब को एक-दूसरे को समझाने/बताने के लिए बोलकर, संकेतों द्वारा तथा लिखकर अभिव्यक्त करने के तरीके खोज लिए गए थे। दुनिया में अलग-अलग तरीके से मात्रा (quantity) दर्शाने या एक दूसरे को समझाने/बताने के तरीके ईजाद किए गए हैं। ये तरीके देखकर हम आज उपयोग की जा रही संख्याओं और उनमें निहित कुछ व्यवस्थित नियमों के महत्त्व को समझ सकते हैं।

दाशमिक संख्या और स्थानीय

मान: लिखने के तरीकों में हम सबसे ज़्यादा परिचित अपनी दाशमिक संख्या पद्धति (decimal number system) से हैं। अपनी रोज़मर्रा की

इक्यावन	बावन	तिरपन	चौवन	पचपन	छप्पन	सत्तावन	अट्ठावन	उनसठ	साठ
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
इकसठ	बासठ	तिरसठ	चौसठ	पैसठ	छियासठ	सडसठ	अडसठ	उनहत्तर	सत्तर
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
इकहत्तर	बहत्तर	तिहत्तर	चौहत्तर	पचहत्तर	छिहत्तर	सतहत्तर	अठहत्तर	उनासी	अरसी
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
इक्यासी	बयासी	तिरासी	चौरासी	पचासी	छियासी	सतासी	अट्ठासी	नवासी	नब्बे
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
इक्यानवे	बानवे	तिरानवे	चौरानवे	पचानवे	छियानवे	सतानवे	अठानवे	निन्यानवे	सौ
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

ज़िन्दगी में हम इसका ही उपयोग करते हैं। इस संख्या पद्धति में दस चिह्न (symbols) हैं- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 तथा इनको लिखने के कुछ नियम (rules) हैं। इन नियमों को हम दाशमिक संख्या पद्धति में स्थानीय मान (place value) के नियमों के रूप में जानते हैं। सरल शब्दों में कहा जाए तो हम मात्राओं (वस्तुओं या घटनाओं आदि) को दस के समूहों (grouping of ten) में देखते हैं। यहाँ इकाई, दहाई, सैकड़ा, हज़ार... की व्यवस्था का पालन किया जाता है। मसलन अधिकतम 9 इकाइयाँ (units) हो सकती हैं। दस होते ही एक समूह (group) बनाना होता है, जिसे हम दहाई (tens) कहते हैं। इसी तरह दस दहाई होते ही एक सैकड़ा (hundred) तैयार होता है।

हम संख्या 257 को ऐसे ही क्यों लिखते हैं? सोचिए, इसके पीछे कौन-से नियम काम कर रहे हैं?

- क्या हम 752 को 'दो सौ सत्तावन' पढ़ सकते हैं?
- यदि हमारे पूर्वजों ने यह तय किया होता कि वे इकाई, दहाई और सैकड़ा को इसी क्रम में लिखेंगे, तब 752 को हम क्या कहते?

स्थानीय मान के इस विचार को एक उदाहरण से समझते हैं। मान लेते हैं कि आपके घर पर आपका निजी पुस्तकालय है। इस पुस्तकालय में 'दो सौ सत्तावन' किताबें हैं। आपने जैसे ही 'दो सौ सत्तावन' कहा, किसी अन्य व्यक्ति (जो दाशमिक संख्या पद्धति की समझ रखता है) को समझ में आ जाएगा कि कुल कितनी किताबें आप के पास हैं। अब यदि इस मात्रा को अंकों में लिखने को कहा जाए तो 257 लिखा जाएगा। दाशमिक संख्या पद्धति को समझने वाला अन्य व्यक्ति इस 257 को देख कर भी मात्रा को समझ लेगा।

सवाल यह उठता है कि आप की अलमारियों में रखी किताबों को किस नियम के तहत 257 लिखा गया है? या शब्दों में कही जा रही बात 'दो सौ सत्तावन' को हम किन नियमों के तहत '257' के रूप में भी लिख पा रहे हैं? आप सोच रहे होंगे कि यह कैसा बेतुका सवाल है। आप तो रोज़ ही ये संख्याएँ इस्तेमाल कर रहे हैं। इनको लिखने का नियम भी अच्छे से समझते हैं। दो सौ सत्तावन ही क्या, कोई भी संख्या लिखने को कहा जाए तो आप झट से लिख ही लेते हैं। फिर भला यह नियम समझने की बात के क्या मायने हैं? आइए, अगले उदाहरण में इसी सवाल को नए तरह से देखने-समझने का प्रयास करते हैं।

क्या आप जानते हैं कि 'दो सौ सत्तावन' को कई अलग-अलग तरीकों से लिखा जा सकता है?

- यहाँ पर दाशमिक पद्धति, रोमन, चीनी, अरबी और मिस्र संकेतों द्वारा 'दो सौ सत्तावन' लिखा है। क्या आप इनके अलावा भी 'दो

257

CCLVII = 𐤒𐤕 五+t

𐑦𐑮𐑲 ୧୧ ୩ 𑀘𑀘𑀘

सौ सत्तावन' लिखने का कोई तरीका जानते हैं? या सोच सकते हैं?

आपको पता है कि हमारे पूर्वजों ने 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 तक चिह्नों को लेकर संख्या लिखना सीखा। बाद में उन्होंने 0 का उपयोग करना भी शुरू किया। इस तरह इन संकेतों पर कुछ नियम लागू करने से हमारी संख्या पद्धति बनी है। आज हम 1, 2, 3 से लेकर 87, 88....99, 100.....537....9087....आदि कोई भी संख्या लिख सकते हैं। तो यहाँ हमारे पास कुल दस चिह्न हैं और स्थानीय मान का नियम है। बस इतने पर ही हम अपनी समझ को इस्तेमाल करके शून्य से अनंत (0 to infinite) तक की संख्याएँ लिख सकते हैं।

सवाल : 0 का उपयोग क्यों किया होगा? इसकी क्या आवश्यकता पड़ी होगी? बिना 0 के वे अपनी संख्याओं को 1 से 9 के आगे कैसे बढ़ा पाते रहे होंगे?

नई संख्या पद्धति का निर्माण :- अब सवाल यह है कि मान लो यदि हमारे पूर्वजों के पास सिर्फ पाँच ही चिह्न होते (0, 1, 2, 3 और 4) तथा समूहीकरण (grouping) के सिद्धांत पर आधारित स्थानीय मान की ऐसी ही समझ होती, तो उनकी संख्या पद्धति कैसी होती? वे एक से लेकर पच्चीस तक की मात्रा को कैसे लिख रहे होते? इन सवालों पर विचार कीजिए।

सत्रह	
छब्बीस	
एक सौ अट्ठाईस	

यह भी सोचिए कि यदि चिह्न और संख्या नाम भी आपको ही खोजने/बनाने होते तब क्या होता?

मात्राओं को लिखने की अपनी संख्या पद्धति बनाने के दौरान आप को अहसास हो गया होगा कि हमारे पूर्वजों ने कितना महत्त्वपूर्ण काम किया है। उन्होंने हमारे लिए मात्राओं (quantity) को लिखने और बोलने (writing and speaking) की एक ऐसी व्यवस्था बनाकर दी है, जिसे हम जहाँ तक चाहे बढ़ा सकते हैं। यह कभी खत्म होने वाली नहीं है। अब ज़रा कुछ और लिखित व्यवस्थाओं पर नज़र डाल लेते हैं।

रोमन संख्याएँ और उनके नियम: अपने स्कूली दिनों में आपने रोमन संख्याओं के बारे में अवश्य पढ़ा होगा। हमारे हाथ और घर की दीवार पर लगी कुछ घड़ियों में भी यही संख्याएँ लिखी होती हैं। रोमन संख्याओं को लिखने के लिए कुल सात चिह्नों तथा कुछ नियमों का उपयोग किया जाता है।



source: newgateworld.com

इन संख्याओं को रोमन पद्धति में लिखिए:

4, 9, 10, 11, 39, 109, 497

इन रोमन संख्याओं को दाशमिक संख्याओं में बदलिए। क्या आपको किसी तरह की चुनौती आ रही है?

XXIV XVII XXIX

क्या आप बता सकते हैं कि यह रोमन संख्या पद्धति किन नियमों पर आधारित है?

रोमन संख्याओं के संख्यांक इस प्रकार हैं:

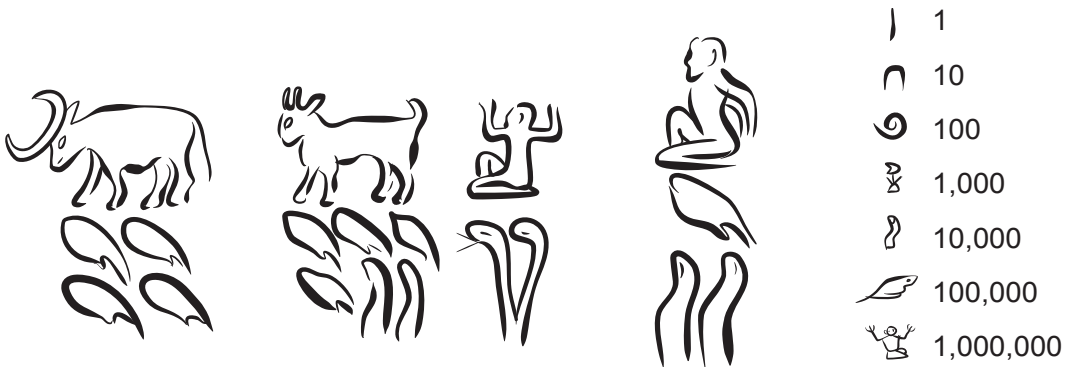
I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

रोमन संख्याओं को लिखने के नियम-

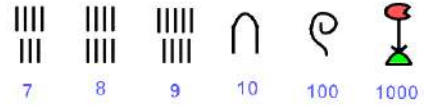
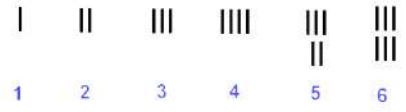
- यदि किसी संख्यांक की पुनरावृत्ति होती है, तो जितनी बार वह आता है, उसका मान उतनी ही बार जोड़ दिया जाता है। उदाहरण के लिए, XXX बराबर 30 है।
- कोई संख्यांक तीन से अधिक बार नहीं आता है, परन्तु संख्यांक V, L और D की कभी पुनरावृत्ति नहीं होती है।
- यदि छोटे मान वाला कोई संख्यांक बड़े मान वाले संख्यांक के दाईं ओर आता है तो बड़े मान में छोटे मान को जोड़ दिया जाता है। उदाहरण:
VI = 5+1=6 तथा LXV = 50+10+5= 65
- यदि छोटे मान वाला कोई संख्यांक बड़े मान वाले किसी संख्यांक के बाईं ओर आता है तो बड़े मान में से छोटे मान को घटा दिया जाता है। उदाहरण:
IV = 5-1=4 तथा IX = 10-1=9
- संख्यांक V, L और D को कभी भी बड़े मान वाले संख्यांक के बाईं ओर नहीं लिखा जाता है। अर्थात् V, L और D को कभी भी घटाया नहीं जाता है।
- संख्यांक I को केवल V और X में से घटाया जा सकता है। संख्यांक X को केवल L, C और M में से ही घटाया जा सकता है।

मिस्र संख्याएँ और उनके नियम: तकरीबन 3000 ईसा पूर्व बने मिस्र के पिरामिडों पर उकेरे चित्र आज के लोगों के लिए एक अबूझ पहेली थे। कुछ चित्र देखकर लोग समझ पाते थे, लेकिन कुछ के बारे में समझना बड़ा मुश्किल होता था। ऐसा ही एक चित्र था जिसे देखकर लोग इसके मायने समझने का प्रयास करते थे। बाद में किए गए अध्ययनों से पता चला कि यह चित्र फ़राओ द्वारा एक युद्ध में जीते गए 4 लाख बैल या गाय, 14 लाख 22 हजार भेड़-बकरियाँ और 1 लाख 20 हजार गुलामों को दर्शा रहा है। फ़राओ की इस महानता को उसकी कब्र (पिरामिड) की दीवारों पर इन चित्रों द्वारा उकेरा गया है।

इन चित्रों का अर्थ खोजने के बाद पाया गया कि आज से 5000 साल पहले की मिस्र सभ्यता के पास मालाओं को लिखने का अपना एक तरीका था। जहाँ चित्रों का उपयोग करते हुए संख्या पद्धति बनाई गई थी।



यहाँ संख्या 647 और 405 का जोड़ किया गया है। क्या आप बता सकते हैं कि इस जोड़ का उत्तर कितना है?



source: द हिस्टोरिकल रूट्स आफ एलीमेंट्री मैथमैटिक्स,
डोवर प्रकाशन



सवाल 1: नीचे दी गई संख्याओं को मिस्र संख्या पद्धति में लिखिए।

205 5958 75 5 85 989

सवाल 2: नीचे दी गई मिस्र संख्याओं को दशमिक संख्या में लिखिए।

इजिप्ट संख्याएँ	दशमलव संख्या पद्धति में	इजिप्ट संख्याएँ



यह संख्या पद्धति किस तरह के नियमों पर आधारित है? क्या मिस्र संख्या पद्धति में दिए गए संकेतों से कोई भी बड़ी-से-बड़ी संख्या को लिखा जा सकता है?

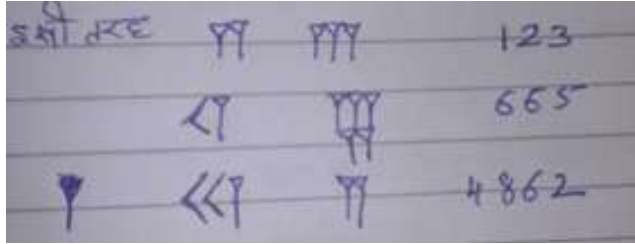
बेबीलोन संख्याएँ और उनके नियम:

बेबीलोनियन सभ्यता के लोगों के पास भी अपनी एक संख्या पद्धति थी। इस सभ्यता के लोग सिर्फ दो चिह्नों से ही अपनी सारी संख्याएँ बना लेते थे। उदाहरण के लिए 1 से 30 तक यहाँ लिखा है। इसी प्रकार आगे बढ़ते हुए 59 तक लिखा जाता था। बेबीलोन की सभ्यता में समूहीकरण 60 पर होता है। इसका मतलब यह हुआ कि 'साठ' वस्तुएँ होते ही एक

	1		11		21
	2		12		22
	3		13		23
	4		14		24
	5		15		25
	6		16		26
	7		17		27
	8		18		28
	9		19		29
	10		20		30

समूह बना लिया जाता है। ठीक उसी तरह जैसे दशमिक संख्या पद्धति में दस वस्तुओं का एक समूह बनता है। साठ वस्तुओं के इस एक समूह को दर्शाने के लिए अब पुनः वही चिह्न उपयोग किया जाता है जिससे एक की माला को दर्शाया गया था।





‘इकसठ’ की माला को दर्शाने के लिए  लिखना होगा। यह प्रदर्शन पहली नज़र में देखने पर ‘दो’ के लिए किए जा चुके प्रदर्शन जैसा ही लग सकता है। लेकिन गौर से देखने पर हम पाएंगे की वहाँ पर संकेत  एक दूसरे के पास थे, जबकि नए संकेत में दोनों निशानों के बीच कुछ खाली स्थान रखा गया है। इस तरह खाली स्थान के बाईं तरफ का निशान ‘साठ का समूह’ और दाहिनी तरफ का निशान ‘इकाई’ दर्शा रहा है। इसी तरह कुछ और उदाहरण हैं—



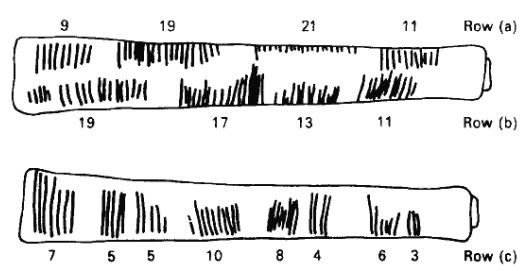
सवाल क: इन संख्याओं को बेबीलोनियन संख्या पद्धति में लिखिए।

205 5958 600 75

सवाल ख : इन संख्याओं को दशमिक संख्या पद्धति में लिखिए।

बेबिलोनियन संख्या	दस आधारित संख्या	बेबिलोनियन संख्या	दस आधारित संख्या
			
			

इशांगो हड्डी: अब से 35 हज़ार साल पहले का इंसान जानवरों की हड्डियों पर इस तरह की लकीरें उकेरकर माला व किसी घटना को दर्ज करता था। गणित के इतिहास में इंसान द्वारा मालाओं को दर्ज करने का यह सबसे प्राचीन प्रमाण माना जाता है। शुरुआती दौर की हड्डियों में ये लकीरें बेतरतीब पाई जाती हैं, लेकिन समय के साथ इन लकीरों को बनाने में भी समूहीकरण के विचार का उपयोग किया गया है। बाद के समय में ये लकीरें पाँच-पाँच के समूह में हैं। इन हड्डियों को देखकर हम कह सकते हैं कि अब से 35 हज़ार साल पहले के इंसान के जीवन में भी ‘एक-एक की संगति’ (one to one correspondence) और ‘समूहीकरण’ (grouping) का विचार आ चुका था और वह अपने रोज़मर्रा के हिसाब-किताब और

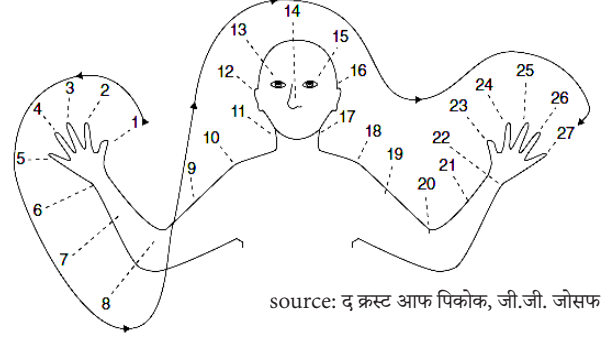


source: द हिस्टोरिकल रूट्स आफ एलीमेंट्री मैथमैटिक्स, डोवर प्रकाशन

उसे दर्ज करने के तरीकों में इनका उपयोग करता था। आज भी आप अपनी कक्षा के किसी बच्चे को लकीरें बनाकर गिनती करते हुए देख सकते हैं। यह बच्चा अनायास ही संख्याओं के ऐतिहासिक विकासक्रम का ही अनुसरण कर रहा है।

मालाओं की संकेतों द्वारा अभिव्यक्ति के तरीके और पापुआ न्यू गिनी का जनजाति समूह:

इस जनजाति समूह के लोगों के बीच मालाओं को लेकर विचारों का आदान-प्रदान संकेतों के रूप में ही होता है। शरीर के विभिन्न हिस्सों को माला दर्शाने के संकेत के रूप में माना गया है। दाहिने हाथ के अंगूठे से 'एक' की शुरुआत है। उंगली, कलाई, कोहनी, कन्धा, गर्दन, कान, नाक, आँख आदि सब किसी-न-किसी माला को अभिव्यक्त करते हैं।



source: द क्रस्ट आफ पिकोक, जी.जी. जोसफ

इंका सभ्यता की क्यूपु पद्धति: इंका सभ्यता के लोग रस्सियों पर गाँठ बांध-बांध कर माला को दर्शाते थे। इन गाँठों को बांधने का तरीका तथा एक गाँठ से दूसरी गाँठ के बीच की दूरी के आधार पर मालाओं को समझा जाता था।



source: द क्रस्ट आफ पिकोक, जी.जी. जोसफ

भाषा के रूप में: पापुआ न्यू गिनी की एक जनजाति के लोगों के पास अपने दैनिक जीवन में उपयोग की जा रही सीमित मालाओं की अभिव्यक्ति के लिए महज़ कुछ शब्द ही थे- उरपन (URAPAN), ओकोसा (OKOSA), ओकोसा उरपन (OKOSA URAPAN), ओकोसा ओकोसा (OKOSA OKOSA), ओकोसा ओकोसा उरपन (OKOSA OKOSA URAPAN), ओकोसा ओकोसा ओकोसा (OKOSA OKOSA OKOSA), रास (RAS)

यहाँ उरपन का प्रयोग एक तथा ओकोसा का प्रयोग दो के लिए किया जा रहा है। इस तरह ओकोसा उरपन का अर्थ दो और एक (तीन) है। छह से अधिक की सारी मालाएँ उनके लिए रास हैं। रास का मतलब है- ढेर सारा। हम देख सकते हैं कि यहाँ पर न तो लिखित संकेत हैं और न ही कोई और सांकेतिक प्रदर्शन है। सिर्फ शब्दों के उपयोग से ही मालाओं को अभिव्यक्त किया जा रहा है।

यहाँ जिन संख्या पद्धतियों (number systems) की बात की गई है, उन सभी का उपयोग शुरुआती दौर में किसी खास इलाके या खास समूह के बीच ही हुआ था, लेकिन धीरे-धीरे इन पद्धतियों का फैलाव इधर-से-उधर हुआ। इस तरह से लोगों को बेहतर तरीके का चुनाव करने का अवसर मिला, साथ ही किसी संख्या पद्धति को और अधिक समृद्ध भी किया गया। आज आप ऐसे कई भौगोलिक क्षेत्रों (इलाके, राज्यों, देशों या सभ्यताओं) के बारे में पढ़ सकते हैं, जिन्होंने अपनी संख्या पद्धति का इस्तेमाल भी जारी रखा है। साथ ही दुनिया के अन्य देशों से संपर्क संवाद करने के लिए वे अंतर्राष्ट्रीय संख्या पद्धति (International Numeration System) का उपयोग भी कर रहे हैं। यह अंतर्राष्ट्रीय संख्या पद्धति ही दशमिक संख्या पद्धति है। भौगोलिक रूप से इसका विकास भारत और अरब के मिले-जुले क्षेत्र में हुआ है। इसीलिए यह संख्या पद्धति हिन्दू-अरब संख्या पद्धति (Indo-Arabic Number System) कहलाती है।

इन सभी संख्या पद्धतियों का विश्लेषण कीजिए। यह जानने का प्रयास कीजिए कि ऐसे कौन से कारण रहे होंगे जिससे पूरे विश्व में हिन्दू-अरब संख्याओं का प्रसार हो सका है।

जैसा कि हम जानते हैं, हिन्दू अरब संख्या पद्धति में 1 से लेकर 9 तक चिह्न थे। इन्हीं चिह्नों का उपयोग कर वे आगे की संख्याएँ बनाना जानते थे। लेकिन उनके पास 0 नहीं था। ऐसा बताया जाता है कि 0 का आविष्कार आर्यभट्ट ने किया था। उनका जन्म 476 ईसवी माना गया है।

प्रश्न: क्या आप बता सकते हैं कि आर्यभट्ट के जन्म से पहले जब शून्य नहीं रहा होगा तब दस, बीस और सौ को कैसे लिखा जाता था? आखिर शून्य की आवश्यकता क्यों पड़ी होगी?

पंकज और बलविंदर को संख्याओं के इतिहास पर आधारित यह लेख और सुमेधा से हुई बातचीत बहुत रोचक लगी थी। कुछ संख्या पद्धतियों के नियमों को उन्होंने समझा था, लेकिन कुछ पद्धतियाँ उनके लिए भी चुनौती थीं। अब वे संख्याओं को लिखने व बोलने में छोटे बच्चों को आ रही चुनौतियों का कारण कुछ-कुछ समझ पा रहे थे। बच्चों को दशमिक संख्या पद्धति (decimal number system) के नियमों की ठीक-ठीक जानकारी नहीं थी या फिर वे जल्दबाज़ी में सही ढंग से नियमों का पालन नहीं कर पा रहे थे। सुमेधा ने बताया कि इनमें से ज़्यादातर चुनौतियाँ स्थानीय मान (place value) की समझ से सम्बंधित हैं।

कक्षा 1 से लेकर कक्षा 3 तक की गणित की पाठ्यपुस्तकों में स्थानीय मान की अवधारणा को छोटे-छोटे चरणों में तोड़कर सिखाया जाता है— समूहीकरण (grouping), संख्याओं के लिखने में निहित पैटर्न (pattern), इकाई-दहाई-सैकड़ा की व्यवस्था, संख्या का विस्तारित रूप (expanded form), दशमिक संख्या पद्धति (decimal number system) आदि को कक्षावार स्तर अनुरूप बढ़ते क्रम में बताया जाता है। ये सब बताते हुए सुमेधा ने कक्षा 1 से लेकर कक्षा 5 तक की गणित की पाठ्यपुस्तकों में दिए गए अभ्यासों को दिखाया। पंकज और बलविंदर इन सब बातों को गौर से सुन रहे थे। साथ ही अपनी डायरी में महत्वपूर्ण बातों को लिखते भी जा रहे थे। इन्हीं गतिविधियों में से कुछ का चुनाव करके उन्हें एकदिवसीय पंचायत स्तरीय कार्यशाला के लिए अपनी सत्र योजना को तैयार करना है।

2.3.3 स्थानीय मान और इससे सम्बंधित गतिविधियाँ (Activities on Place Value)

स्थानीय मान को समझने में मददगार अभ्यास: ऊपर की गई अब तक की बातचीत से यह समझ में आता है कि स्थानीय मान एक जटिल अवधारणा है। इसे समझने के लिए एक अपेक्षित उम्र और मानसिक स्तर की आवश्यकता है। यह काम शायद कक्षा 2 या 3 के बच्चों के साथ संभव है। लेकिन क्या हम कक्षा 1 के बच्चों को संख्याएँ पहचानना और लिखना नहीं सिखाएंगे? क्या हम इस बात का इंतज़ार करें कि बच्चे स्थानीय मान को समझने लायक उम्र तक आ जाएँ, तभी हम उन्हें संख्याएँ बताएँ? या हम यह करें कि उनको एक स्तर तक संख्याएँ सिखाएँ और कक्षा 2 और 3 तक आने के दौरान स्थानीय मान की अवधारणा से भी परिचित कराते जाएँ। फिलहाल इस बारे में दो तरह के मत हैं।

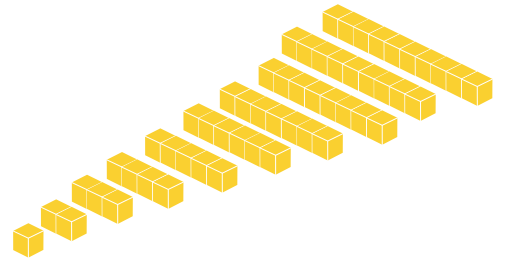
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

स्थानीय मान की समझ से (Place value approach):

पहला, जो यह मानता है कि बच्चों को संख्याएँ सिखाने के साथ ही उसमें निहित स्थानीय मान का नियम भी बताया जाना चाहिए। वे ठोस वस्तुओं, जैसे- जोड़ो क्यूब, तीली बण्डल और डीन्स ब्लॉक आदि का उपयोग करते हुए स्थानीय मान के नियमों को समझें।

पूर्ण संख्याओं की समझ से (Whole number approach): दूसरा, जो यह मानता है कि बच्चे संख्या नामों का इस्तेमाल कर चीज़ों को गिनना सीखें, माला को समझें, उन्हें लिखने के लिए इस्तेमाल हो रहे संख्या चिह्नों को पहचानें। यह काम कक्षा 1 में पहले 1 से 20 तक संख्याओं का उपयोग करते हुए किया जाए। इसी तरह आगे बढ़ते हुए 50 तक पहुँचा जाए। इस दौरान गिनने, संख्या बोलने, संख्या लिखने आदि से सम्बंधित गतिविधियाँ भी करवाई जाएँ। इस तरह 30-35 तक पहुँचने के दौरान ही बच्चों को संख्या लिखने में निहित पैटर्न की तरफ ध्यान दिलाया जाए। यदि ये सब ठीक तरह से नियमित रूप से होता रहा तो 35 से आगे की संख्याओं का निर्माण बच्चे स्वयं कर लेंगे।

गतिविधि: बच्चों के साथ काम करते हुए गणित किट में मौजूद जोड़ो क्यूब की सहायता से 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 बनाएँ। बच्चों से क्यूब गिनकर संख्या बताने को कहें। इस तरह जोड़ो क्यूब की सहायता से हम इकाई, दहाई और सैकड़ा का निर्माण कर सकते हैं।

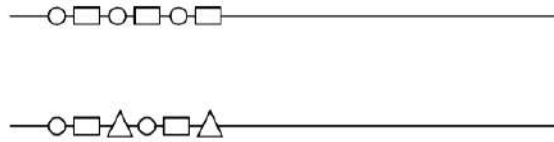
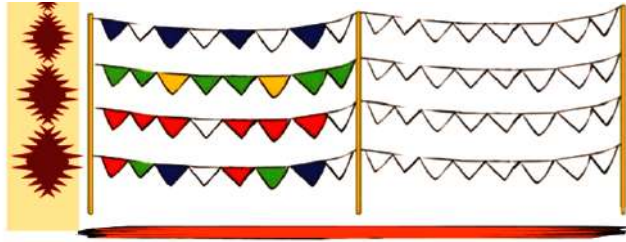


बच्चों से कहिए कि वे जोड़ो क्यूब की सहायता से 13, 27, 50, 63, 76, 90 और 99 को बनाएँ और एक-

दूसरे द्वारा बनाई गई संख्या को गिनकर जाँच करें। आगे चलकर इन्हीं जोड़ी क्यूब की सहायता से जोड़ने-घटाने पर भी काम किया जा सकता है।

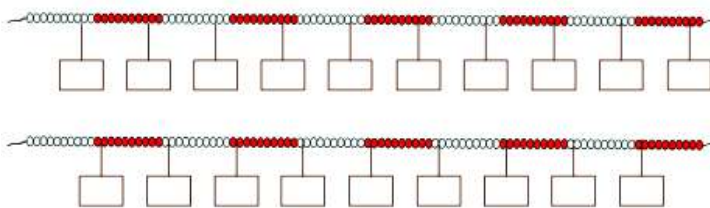
परंपरागत स्कूलों में पढ़ने वाले ज़्यादातर बच्चों (हमारी पीढ़ी के तकरीबन सभी बच्चों) ने इसी दूसरे तरीके से संख्याएँ सीखी हैं। कक्षा के श्यामपट्ट पर 1 से 100 तक की संख्याएँ लिखी रहती थीं। एक बच्चा आगे खड़ा होकर संख्या बोलता था, बाकी सब उसके पीछे-पीछे दोहराते रहते थे। इन्हीं संख्याओं को देखकर जस-का-तस अपनी कॉपी में उतारते भी रहते थे। यह काम इतनी बार किया जाता था कि 1 से 100 तक लिखने की व्यवस्था (संख्या लिखने का पैटर्न) सभी बच्चों के मन में रच-बस जाया करता था। इन संख्याओं में इकाई, दहाई, सैकड़ा जैसी भी कोई चीज़ होती है, यह बात बहुत बाद में चौथी, पाँचवीं या इससे ऊपर की कक्षाओं में ही समझ में आती थी। कुछ राज्यों ने अपने शिक्षकों को संख्या सिखाने के लिए अबेकस या मोतीमाला जैसी शिक्षण सहायक सामग्री भी उपलब्ध कराई है। इनके इस्तेमाल के तरीकों पर हमने पिछले अध्याय में ही कुछ बात की है।

जैसा कि हमने ऊपर बात की है, संख्या नामों के बोलने और लिखने की व्यवस्था में एक पैटर्न निहित है। यह पैटर्न अंग्रेजी संख्या नामों में तो बहुत स्पष्ट है। हिन्दी संख्या नामों में बीच-बीच में यह पैटर्न अवरुद्ध भी होता है या भ्रमित करता है (जैसे- उनतीस, उनसठ)। इसलिए पैटर्न की समझ होना बहुत आवश्यक हो जाता है। कई पाठ्यपुस्तकें कक्षा 1 से ही संख्या-पूर्व अवधारणा के अंतर्गत ही पैटर्न पर आधारित अभ्यास करने का अवसर देती हैं। यहाँ हम पहली कक्षा की पुस्तक से लिए गए अभ्यासों के उदाहरण देख सकते हैं। बच्चों को फर्रियों में रंग भरना है तथा अधूरी माला में मोती पिरोकर माला पूरी करनी है। दोनों ही उदाहरणों में पैटर्न की समझ का विकास हो रहा है।



source: गणित की मजेदार दुनिया, कक्षा 1, राजस्थान

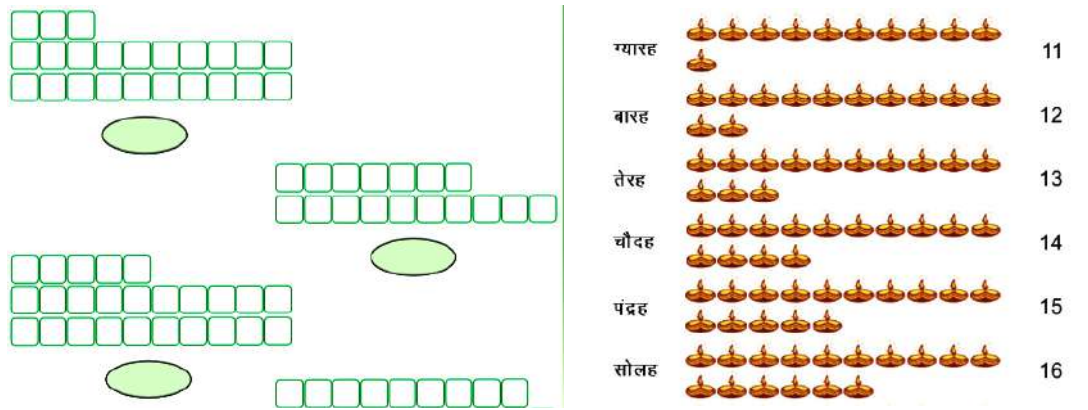
मोतीमाला के अभ्यास: मोतीमाला के अभ्यासों, जैसे- गिनना, संख्या नाम बोलना और संख्या कार्ड टांगना करने के दौरान भी बच्चों में अप्रत्यक्ष रूप से 10-10 के समूहीकरण पर समझ का विकास हो रहा होता है।



source: गणित की मजेदार दुनिया, कक्षा 1, राजस्थान

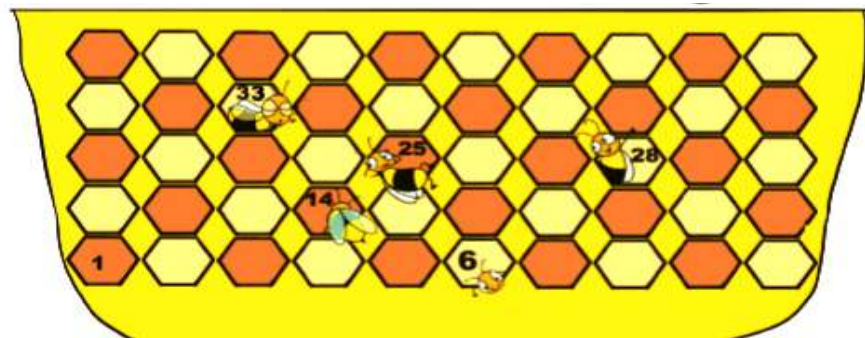
आपने देखा होगा कि शुरू में चौबीस मोती गिनने को कहे जाने पर बच्चे एक-एक कर मोतियों की गिनती करते हैं, लेकिन कुछ समय बाद ही वे स्वयं ही 10 सफ़ेद, 10 लाल और 4 सफ़ेद मोती हटाकर 24 बना लेते हैं। चौबीस में दस-दस के 2 समूह हैं और 4 मोती और हैं, यह समझ आना ही एक तरह से स्थानीय मान की तरफ बढ़ने की निशानी है।

कई शिक्षकों ने अपनी कक्षा में मोतीमाला का उपयोग संख्याएँ और स्थानीय मान सिखाने के लिए किया है। उनका मानना है कि यह टीएलएम संख्या नाम, मात्रा और संख्या चिह्न को एक साथ समझने के अवसर देता है तथा कक्षा में बच्चों की रुचि भी बनी रहती है। बच्चे मोतियों को गिनते हैं, संख्या नाम बोलते हैं, संख्या के कार्ड टांगते हैं। इस तरह संख्या नाम, मात्रा और संख्या चिह्न की पक्की समझ बन जाती है।



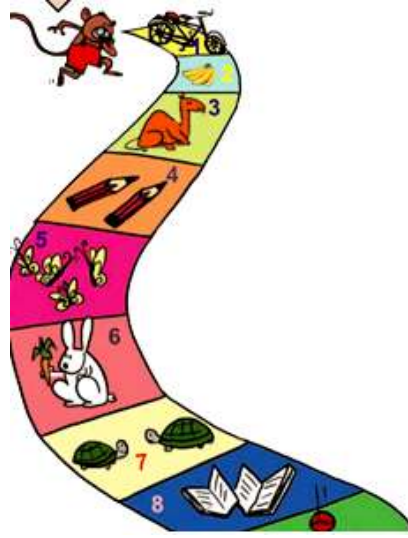
अब जब उनकी चौखाने वाली कॉपी पर ये संख्याएँ लिखाई जाती हैं तो वे उनके लिए उतनी अपरिचित नहीं रह जातीं जितना सिर्फ रटने के दौरान रहा करती हैं। अपनी कॉपी में एक निर्धारित व्यवस्था में बार-बार ये संख्याएँ लिखकर बच्चे लिखने में निहित पैटर्न को पकड़ने लगते हैं। इस तरह कुछ दिनों बाद उनसे अपेक्षा की जाती है कि वे 35 से ऊपर की संख्याओं का निर्माण स्वयं कर लेंगे। बच्चे संख्याओं के लिखने में निहित पैटर्न को अच्छी तरह समझ सकें, इसके लिए पहली कक्षा की पाठ्यपुस्तक से ही इस प्रकार के कौशलों को अर्जित करने के अभ्यास दिए गए होते हैं। इस तरह के कुछ अभ्यासों के उदाहरण यहाँ दिए गए हैं।

यह मधुमक्खी का छत्ता है। सभी मधुमक्खियों के लिए छत्ते में एक घर निर्धारित है। यहाँ 1 से 10, फिर 10 से 20 और 20 से 30 संख्याएँ लिखनी हैं।



source: गणित की मजेदार दुनिया, कक्षा 1, राजस्थान

क्रम और कुल की समझ: संख्याओं को दो प्रकार के सन्दर्भों में उपयोग किया जाता है। इसे हम कुल तथा क्रम के रूप में समझते हैं। हम अपने जीवन में इस तरह की बात कहते हैं कि मैं दौड़ में चौथे नंबर पर रहा था या मेरे पास चार आम हैं। पहले उदाहरण में संख्या का उपयोग किसी व्यक्ति या वस्तु के क्रम (ordinality) को बताने के लिए हो रहा है, जबकि दूसरे उदाहरण में वस्तुओं की कुल मात्रा (cardinality) बताई जा रही है। इस गतिविधि में बच्चों को किताब, कछुआ, खरगोश, पेंसिल आदि का क्रम बताना है। गिनने के पाँच सिद्धांतों पर बात करते समय हमने इस मुद्दे पर विस्तार से बात की थी।

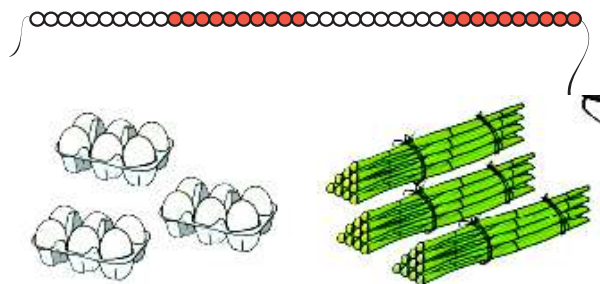


source: गणित की मजेदार दुनिया, कक्षा 1, राजस्थान

2.3.4 समूहीकरण और स्थानीय मान की समझ (Grouping and Place Value):

संख्याओं का इतिहास से सम्बंधित आलेख में आपने ध्यान दिया होगा कि प्रत्येक सभ्यता द्वारा बनाई गई संख्या पद्धति के नियमों में समूहीकरण की अवधारणा का बहुत महत्त्व रहा है। दशमिक संख्या पद्धति में 10 वस्तुओं (base 10 system) का समूहीकरण होता है। ओसाका, उरपन जैसे शब्द बोलने वाला जनजातीय समूह 2 वस्तुओं का समूहीकरण कर रहा है। आज की कंप्यूटर प्रणाली को समझने वाले इसे द्विआधारी (binary) पद्धति कहेंगे। इसी तरह बेबीलोनियन सभ्यता में 60 वस्तुओं (base 60) का समूहीकरण हो रहा है। अपनी घड़ी में दिख रहे समय पर गौर करें तो हम पाएंगे कि 60 सेकेण्ड मिलकर 1 मिनट और 60 मिनट से मिलकर 1 घंटा बन रहा है। समय का यह समूहीकरण भी 60 आधारित है।

हमें अपने बच्चों को दस आधारित संख्या पद्धति (base ten number system) समझाना है, क्योंकि हमारी संख्याएँ दस आधारित हैं। लेकिन क्या हमारे जीवन में सब कुछ दस आधारित ही है? ऐसा नहीं है। केलों का दर्जन (12) में बेचा जाना, अण्डों की कैरेट में 30 अण्डे रखा जाना, कुछ गाँवों में ज़मीनों की नाप-जोख बिस्वा (20) में किया जाना, प्रत्येक पंसेरी में 5 सेर का होना आदि यह दर्शाता है कि हमारे समाज में भी अलग-अलग किस्म के समूहीकरण की व्यवस्था मौजूद है। कक्षा-कक्ष में सीखने की प्रक्रिया में बच्चों के लिए भी ऐसी ही वास्तविक (या वास्तविकता के करीब) रहने वाली परिस्थितियों का निर्माण किया जाना चाहिए। अतः पाठ्यक्रम में भी ऐसे ही वास्तविक किस्म के समूहीकरण से होते हुए उन्हें अपेक्षित 10 के समूहीकरण की तरफ लाया जाना बेहतर होता है। यहाँ उन्हें अलग-अलग आधार वाले समूहीकरण से परिचित कराया जाता है।



कक्षा 2 की पुस्तक में दिया गया अभ्यास-
हर एक मोती को बिना गिने पता करो कि
माला में कितने मोती हैं?

हर एक अण्डा बिना गिने, सोचो कि कुल कितने
अण्डे हैं?

इसी तरह, बण्डलों में रखे गन्ने कुल कितने हैं?

इस तरह के अभ्यासों के माध्यम से बच्चों को समूहीकरण की व्यवस्था के लाभ से अवगत कराया जाएगा।

प्रश्न: इस प्रकार का समूहीकरण हम अपने दैनिक जीवन में कहाँ-कहाँ देखते हैं? और इसके क्या लाभ हैं?

दस आधारित समूहीकरण: कक्षा 3 में समूहीकरण की अवधारणा का उपयोग करते हुए बच्चों के लिए एक रोचक सन्दर्भ गढ़ा गया है। आलू बेचने वाला एक दुकानदार है, उसकी दुकान पर बहुत से ग्राहक आते हैं, इसलिए वह आलुओं को पहले से ही अलग-अलग समूहों में रखता है। खुले आलू, 10 आलुओं का पैकेट, 10 आलुओं के 10 पैकेट होते ही उसको एक बड़ा पैकेट बना देना, जिसमें कुल 100 आलू हैं। ग्राहक अपनी ज़रूरत के अनुसार आलू की संख्या बोलते हैं। दुकानदार तुरंत उतने ही आलू दे देता है, जैसे- 146 आलू के लिए सौ आलू का 1 पैकेट, दस आलू के 4 पैकेट और 6 आलू देने से 146 हो गए हैं।

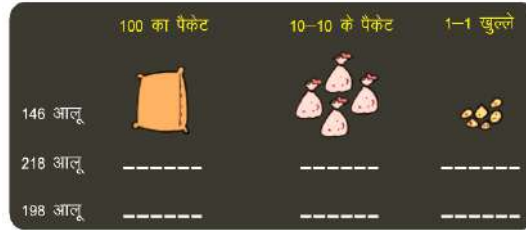


मोटा भाई ने आलू बेचे।



source: गणित की मजेदार दुनिया, कक्षा 3, राजस्थान

अब इसी सन्दर्भ पर आधारित सवाल हल करने हैं, जिसमें बच्चों को पैकेट का चित्र बनाकर आलू की मात्रा दर्शाना है।



source: गणित की मजेदार दुनिया, कक्षा 3, राजस्थान

कुछ पाठ्यपुस्तकों में स्थानीय मान की समझ को पक्का करने के लिए एक और गतिविधि दी जाती है। यह अलग-अलग रंग की कुछ आकृतियों का इस्तेमाल करके संख्याएँ बनाने का खेल है। इस खेल में वृत्त,

खेल में – ★ – एक हजार (1000), ■ – एक सैंकड़ा (100),
 ▲ – एक दहाई (10), ○ – एक इकाई (1)

- खेल शुरू करने से पहले थोड़ा अभ्यास।
- इन प्रतीक चित्रों की सहायता से बनी संख्याएँ देखो।

1. एक ★ और एक ■ = $1000 + 100 = 1100$
2. दो ■ और एक ▲ = $200 + 10 = 210$
3. दो ★ और तीन ○ = $2000 + 3 = 2003$



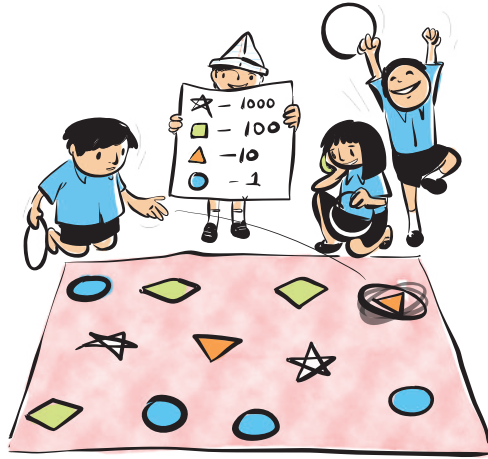
=



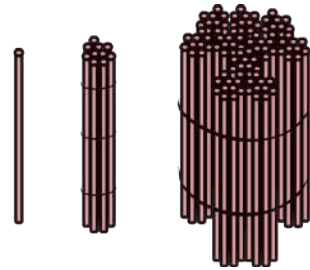
=

source: गणित की मजेदार दुनिया, कक्षा 5, राजस्थान

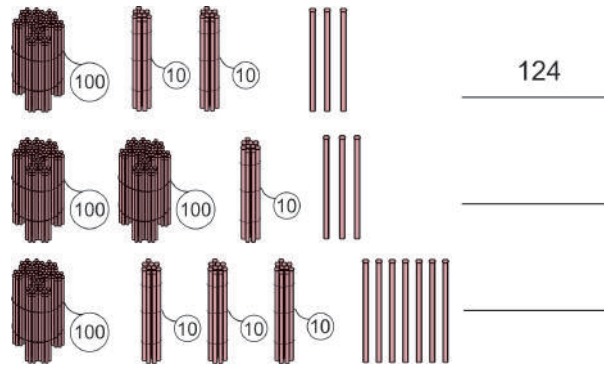
त्रिभुज, चतुर्भुज और सितारे को क्रमशः इकाई, दहाई, सैकड़ा और हज़ार की मात्रा के रूप में माना जाता है। एक चार्ट पर ऐसी खूब सारी आकृतियाँ बनी होती हैं। बच्चे बारी-बारी से चूड़ी फेंकते हैं। चूड़ी के घेरे के भीतर आ रही सभी आकृतियों का हिसाब करके संख्या बनती है। प्रतिभागी अपनी-अपनी संख्याएँ लिखकर जोड़ते रहते हैं। जो सबसे बड़ी संख्या बना पाता है वह विजेता बनता है। यहाँ दिए अभ्यास में चूड़ी के भीतर आ रही आकृतियों को देखकर संख्या बनानी है।



तीली-बण्डल का उपयोग: तीली-बण्डल का गणित शिक्षण में महत्वपूर्ण योगदान रहा है। कभी-कभी तो लगता है कि तीलियाँ बनाई ही इसलिए गई होंगी ताकि गणित के शिक्षक अपनी कक्षाओं में अच्छे से गणित पढ़ा सकें। स्थानीय मान सिखाने में इससे बेहतरीन कुछ भी नहीं है। हम बण्डलों को खोल सकते हैं, उन्हें दोबारा बना सकते हैं। उठाकर इधर-से-उधर रख सकते हैं और इनकी कीमत भी बहुत मामूली होती है। कुछ राज्यों में तो शिक्षकों की दो-तीन पीढ़ियों ने तीली बण्डल का उपयोग करके ही गणित शिक्षण किया है। यहाँ कक्षा 3 की पुस्तक के एक और अभ्यास में 10 के समूहीकरण पर आधारित इस विचार को इस्तेमाल करते हुए तीली के बण्डल और गट्टर तैयार किए गए हैं। खुली तीलियाँ हैं, दस तीलियों का बण्डल बांधकर एक दहाई बनी है, दस तीलियों के 10 बण्डल होते ही उसे एक बड़े गट्टर के रूप में बांध लिया गया है। इस प्रकार खुली तीली, बण्डल और गट्टर का उपयोग करते हुए 124 को प्रदर्शित किया गया है।

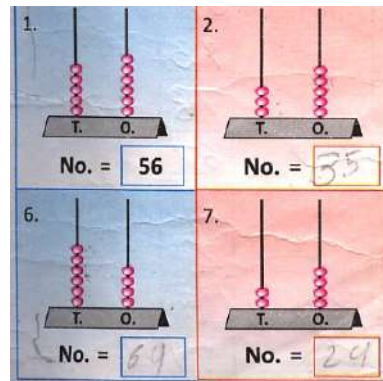


124 के लिए, 1 गट्टर, 2 बण्डल और 4 खुली तीली। बण्डल और गट्टर देखकर खाली स्थान पर संख्या लिखो।



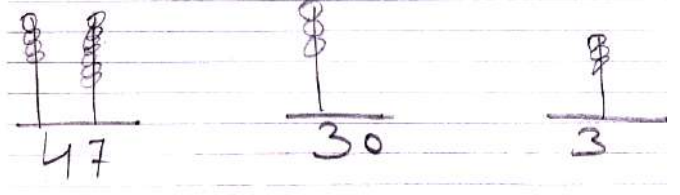
2.3.5 गट्टर, बण्डल और खुली तीलियाँ रखने के पीछे का सिद्धांत

कक्षा 1 के लिए उपयोग की जाने वाली गणित की पाठ्यपुस्तक में स्थानीय मान की अवधारणा समझाने के लिए एक अभ्यास दिया गया था। गणक के चित्र देखकर बच्चों को नीचे बने खाली बक्सों में संख्या लिखना होता था। इसी कक्षा में पढ़ने वाले रोहित ने अपनी किताब में सारे बक्सों में संख्या लिख ली थी। सभी उत्तर ठीक थे। शिक्षक ने उसकी समझ का आकलन करने के



source: जीरो माने कुछ नहीं, सन्दर्भ, एकलव्य

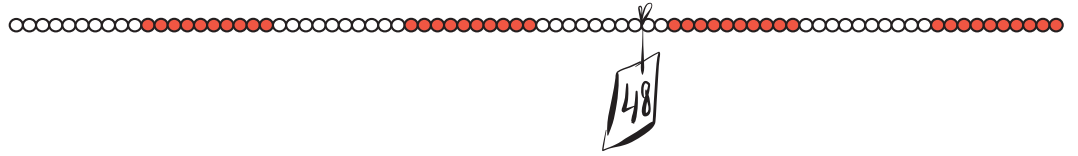
लिए कहा- जाओ, बाहर से 35 कंकड़ ले आओ। रोहित बाहर गया तथा कुछ कंकड़ लेकर लौट आया। उसके हाथ में सिर्फ 8 कंकड़ थे। वह 35 के लिए 3 और 5 कंकड़ लेकर आया था।



source: जीरो माने कुछ नहीं, सन्दर्भ, एकलव्य

गणक के अभ्यास में उसे सीक में पिरोए मोती गिनकर नीचे उतना ही लिखना होता था। इकाई में पिरोए पाँच मोती गिनकर 5 लिखने और दहाई में पिरोए तीन मोती गिनकर 3 लिखने से अपने आप ही संख्या 35 बन जाती थी। लेकिन रोहित 35 की माला के बारे में जान ही नहीं पाता था। उसे 35 लिखने के साथ ही पैतीस चीज़ों को गिनने का अवसर ही नहीं मिल पाता था। सीधे-सीधे गणक का इस्तेमाल संख्या ज्ञान या स्थानीय मान समझाने के लिए किया जाना उचित नहीं है। यह स्थानीय मान समझ में आ जाने के बाद इस्तेमाल की जाने वाली सामग्री है। अतः बहुत-से शिक्षकों ने 1 से 100 तक की संख्याओं का ज्ञान कंकड़, तीली-बण्डल या मोतीमाला का उपयोग करके किया है। इन सामग्रियों में 35 के लिए पैतीस चीज़ें गिनने या देखने का अवसर मिलता है।

उदाहरण के लिए, इस अभ्यास में मोतीमाला पर कार्ड टांगना है। बच्चे शुरू में एक-एक मोती गिनकर 48 तक पहुँचेंगे। आगे चलकर उनका ध्यान लाल और सफ़ेद रंग के मोतियों की माला की तरफ जाएगा और वे समझ सकेंगे कि 48 बनाने का काम $10+10+10+10+8$ मोतियों को जोड़कर भी किया जा सकता है।



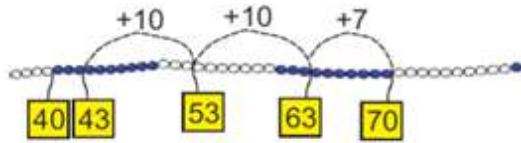
समझ के अगले स्तर में वे समूहीकरण के अपने अनुभव का उपयोग कर जान सकेंगे कि 4 बार दस के समूह हैं और 8 बार खुले मोती हैं। इस तरह संख्या 48 बनने की प्रक्रिया को वे स्वयं समझ सकेंगे। मोतीमाला की सहायता से ऐसे ही और भी अभ्यास का अवसर बच्चों को मिलना चाहिए। मोतीमाला से काम करते हुए बच्चों को स्वयं समूह बनाने की आवश्यकता नहीं पड़ती है, क्योंकि यहाँ पहले से ही समूह बने हुए मिलते हैं। दस लाल और दस सफ़ेद रंगों के मोतियों का समूह कक्षा में दूर से ही पहचाना भी जा सकता है। इसीलिए दूर बैठे बच्चे भी देख कर सही जवाब दे पाते हैं।

हमें बच्चों को हमेशा बने-बनाए समूह ही नहीं दिखाना चाहिए, बल्कि उन्हें स्वयं समूह बनाने और उन्हें स्थानीय मान के अनुरूप रखने का अवसर भी देना चाहिए। यह काम तीली-बण्डल से बहुत अच्छी तरह संभव है। उन्हें इस नियम को आत्मसात करना होगा कि दस वस्तुएँ होते ही हमें उनका एक समूह बना देना है। उदाहरण के लिए, सत्रह तीलीयाँ देकर उन्हें समूहीकरण करने को कहा जाए। सत्रह तीलियों को गिनने के दौरान जैसे ही दस तीलियाँ होती हैं, हमें उनका एक बण्डल बांधना होगा। अब शेष सात तीलियाँ बचेंगी। स्थानीय मान के अनुरूप हमारे पास खुली तीली और बण्डल को रखने का स्थान निर्धारित है। जहाँ हम शून्य से लेकर नौ तक

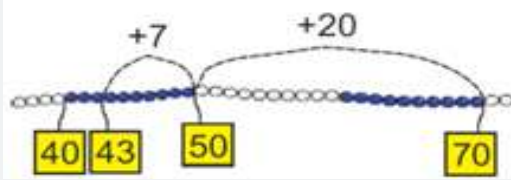
खुली तीलियाँ रख सकते हैं, उस स्थान को इकाई कहते हैं। इस स्थान की बाईं तरफ बढ़ने पर हमें दहाई के लिए निर्धारित स्थान मिलेगा। यहाँ हम शून्य से लेकर नौ तक दहाइयाँ रख सकते हैं। नियम के अनुसार जैसे ही दहाइयों की संख्या दस हो जाएगी, हमें उनको इकट्ठा कर एक बड़ा गट्टर बनाना होगा। यह गट्टर सैकड़ा के स्थान पर रखा जाएगा।

गतिविधि 1: बच्चों को बारी-बारी से बुलाकर मोतीमाला पर संख्या कार्ड टांगने को कहें। संख्या 43 से 70 तक पहुँचने के कई तरीके हैं। बच्चों को इन विभिन्न तरीकों से परिचित कराएँ।

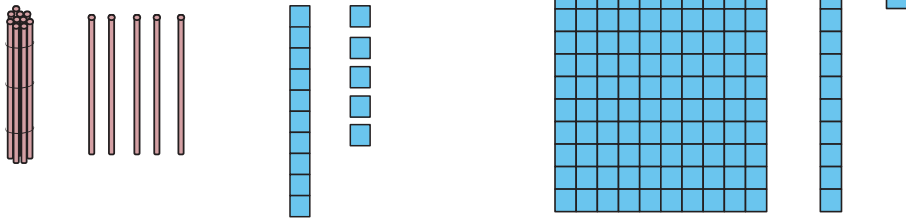
चित्र 1 में, 43 में 10 जोड़कर 53 पर पहुँचा जा रहा है, फिर 53 में दस और जोड़कर 63 पर पहुँचा जा रहा है। फिर 63 में 7 जोड़कर हम 70 पर पहुँच रहे हैं।



चित्र 2 में, 43 में 7 जोड़ कर 50 पर पहुँचा जा रहा है, फिर 50 में 20 जोड़कर 70 तक पहुँच रहे हैं। इस तरह से और भी कई अभ्यास कराएँ। आगे चलकर बच्चों को खाली संख्या रेखा से परिचित कराएँ और इसी तरह से संख्या की कूद कराएँ।



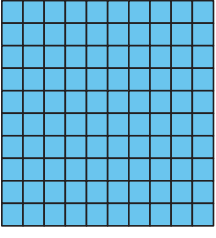
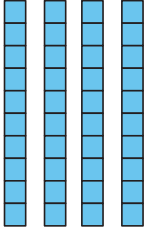

संख्या 15 को हम डीन्स ब्लॉक द्वारा भी दर्शा सकते हैं। यहाँ इकाई के लिए निर्धारित स्थान पर 5 इकाइयाँ और दहाई के लिए निर्धारित स्थान पर 1 दहाई रखनी होगी।



एक अन्य उदाहरण के रूप में मान लेते हैं, हमारे पास एक सौ पाँच खुली तीलियाँ हैं, इनका समूहीकरण करते हुए हमें 10 दहाइयाँ और 5 इकाइयाँ मिलेंगी। अब क्योंकि दहाइयों की संख्या 10 हो गई है तो स्थानीय मान के नियम के अनुसार इनको मिलाकर एक बड़ा गट्टर बनाना होगा, इस गट्टर को हम सैकड़ा कहेंगे। इन इकाई, दहाई और सैकड़ा की संख्या को लिखते समय हमारे पास 1 सैकड़ा, 0 दहाई और 5 इकाई है। इसे हम 105 के रूप में भी लिख सकते हैं।

सैकड़ा	दहाई	इकाई
1	0	5

नीचे संख्या 145 को डीन्स ब्लॉक की सहायता से दर्शाया गया है। यहाँ 1 सैकड़ा, 4 दहाई और 5 इकाई अपने-अपने निर्धारित स्थान पर रखे गए हैं।

सैकड़ा	दहाई	इकाई
		
1	4	5

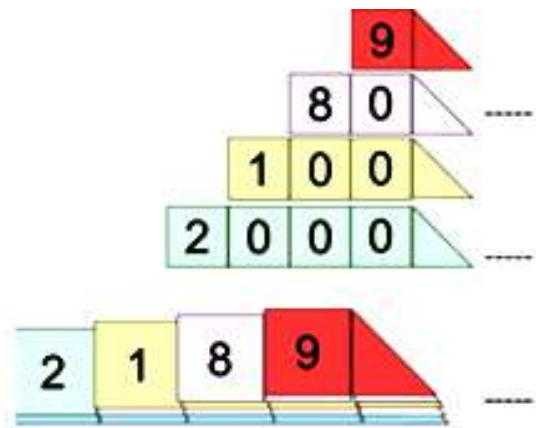
संख्याओं को लिखने की इस पद्धति को ही दस आधारित संख्या पद्धति या हिन्दू अरब संख्या पद्धति कहते हैं।

सवाल : इन संख्याओं को तीली बण्डल की सहायता से दर्शाइए।

129 236 208

संख्याओं का विस्तारित रूप लिखना: शिक्षण अधिगम सामग्री का उपयोग करते हुए एक शिक्षक के रूप में हमें सदैव बच्चों की समझ के विकास पर तवज्जो देना चाहिए। यह ध्यान रखना चाहिए कि बच्चे कहीं इन सामग्रियों के ही मोहताज न हो जाएँ। उन्हें सामग्री के बिना भी संख्याएँ बनाने, लिखने और सवाल हल करने के मौके देने चाहिए। इस तरह हम उनके द्वारा किए गए काम का सतत और व्यापक आकलन भी कर सकते हैं। इस दौरान हम ऐसी गतिविधियों का चुनाव कर सकते हैं, जिसमें कोई अतिरिक्त सामग्री नहीं इस्तेमाल की जा रही है। सिर्फ संख्याओं को जोड़ने और तोड़ने (regrouping and decomposing) को आधार बनाकर ही काम किया जा रहा है। इस तरह के अभ्यासों को हम 'संख्याओं को विस्तारित रूप में लिखना' या 'विस्तारित रूप देखकर संख्या बनाना' कह सकते हैं। बच्चों से अपेक्षा यह की जाती है कि वे संख्या 376 को विस्तारित रूप में लिखें ($376 = 300 + 70 + 6$) या फिर $400 + 7$ को देखकर 407 के रूप में लिख सकें।

इस काम को करते हुए कुछ बच्चों को मदद की आवश्यकता पड़ सकती है। इस दौरान हम ऐरो कार्ड (Arrow Card) का उपयोग कर सकते हैं। इन ऐरो कार्ड में इकाई, दहाई और सैकड़ा के अनुरूप कार्ड बनाए जाते हैं। सभी कार्डों में बना नोकदार हिस्सा यह मार्गदर्शन देता है कि संख्याओं को किस तरह से पकड़ें। उदाहरण में 2 हजार, 1 सैकड़ा, 8 दहाई और 9 इकाई वाले ऐरो कार्ड को मिलकर संख्या दो हजार एक सौ नवासी लिखी गई है। बच्चे स्वयं अपने हाथों से भी अपने-अपने लिए ऐरो कार्ड का सेट बना सकते हैं। यह बहुत आसान है।



अपनी कक्षा के लिए ऐरो कार्ड बनाएँ। इस चित्र के अनुसार चार्ट पेपर पर पट्टियाँ बना लें। अब इनमें 1 से 9, 10 से 90 और 100 से 900 तक संख्याएँ लिखें। प्रत्येक संख्या की पट्टी के कोने काटकर हटाना होगा। अतः इसके लिए भी निशान लगा लें। कैंची की सहायता से सभी पट्टियों को काटकर अलग कर लें।

गतिविधि 1: हम बड़ी पट्टी के ऊपर छोटी पट्टी रखते हुए नई संख्याएँ बना सकते हैं। उदाहरण के लिए, संख्या 364 को बनाने के लिए 300 के ऊपर 60 और फिर 60 के ऊपर 4 रखा गया है। बच्चों के साथ ऐरो कार्ड की सहायता से ऐसी और संख्याएँ बनाने का अभ्यास करें।



गतिविधि 2: बच्चों के दो समूह बनाएँ। उनके बीच में ऐरो कार्ड रख कर संख्याएँ बोलिए— तेरह, सत्रह, उन्नीस, सत्ताईस, इकत्तीस, उनसठ आदि। दोनों समूह के बच्चों में से एक-एक आकर संख्या बनाएंगे।

देखिए कि किस समूह के बच्चे पहले संख्या बना रहे हैं। अलग-अलग बच्चों को काम करते देख उनकी चुनौतियों की पहचान कीजिए और उनके साथ व्यक्तिगत रूप से काम कीजिए। इस तरह संख्याओं के विस्तारित रूप से परिचित कराइए और इसे लिखने के अभ्यास भी कराइए। संख्या देखकर विस्तारित रूप लिखना और विस्तारित रूप देख कर संख्या बनाने के अभ्यास कराए जाएँ।

364 का विस्तारित रूप लिखो। $300+60+4$

600+50+9 से संख्या बनाओ। 659

ऐसे और भी अभ्यास कराएँ।

पंकज और बलविंदर ने मोतीमाला, तीली-बण्डल, चूड़ी खेल, डीन्स ब्लॉक आदि का कम-से-कम एक सेट अपने हाथों से बनाया। साथ ही उन्होंने सुमेधा की सहायता से आगामी एकदिवसीय कार्यशाला के लिए अपनी कार्ययोजना का निर्माण भी किया। स्थानीय मान के मुद्दे पर की गई अपनी तैयारी से वे उत्साहित थे। शिक्षकों की तरफ से आने वाले सवालों के लिए भी पूरी तरह तैयार थे।

2.3.6 बच्चों की कुछ सामान्य चुनौतियाँ (Common Challenges of Learners)

- संख्या नाम इकत्तीस बोलकर इसे अंकों में लिखने को कहा जाए तो कुछ बच्चे 13 लिखते हैं। ऐसे बच्चे यह तो जानते हैं कि इकत्तीस 3 और 1 के संयोजन से लिखा जाता है, लेकिन इनका क्रम वे नहीं समझते हैं।
- इसी तरह संख्या नाम दो सौ तीन बोलकर इसे अंकों में लिखने को कहा जाए तो कई बच्चे 2003 लिखते हैं।
- संख्या 139 के तुरंत बाद की संख्या लिखने को कहा जाए तो कई बच्चे 1310 लिखते हैं।
- संख्या 2010 से ठीक पहले की संख्या लिखने को कहा जाए तो कई बच्चे 209 लिखते हैं।
- संख्याओं की तुलना करते समय कई बच्चे $98 > 103$ लिखते हैं।

- संख्या 67 में 6 का मान कितना है? यह पूछने पर कई बच्चों का जवाब होता है 6, बहुत कम बच्चे बता पाते हैं कि इसका मान 60 होगा।
- यदि कक्षा 4 या 5 के बच्चों से यह पूछा जाता है कि 67 में 6 का स्थानीय मान कितना होगा तब 6 के आगे एक अंक है तो एक जीरो लगाकर 60 बताते हैं।
 - बच्चे से पूछा जाता है, सड़सठ (sixty seven) लिखो तो बच्चा पहले यह तय करता है कि यह गिनती की कौन-सी पंक्ति में आएगा और जब यह तय कर लेता है कि इकसठ वाली पंक्ति में आएगा तो फिर इकसठ, बासठ, तिरेसठ, चौंसठ, पैसठ, सड़सठ तक गिनती बोलता है, तब 6 और 7 होंगे, 67 लिखता है।
 - जब बोर्ड पर या चार्ट पर लिखे हुए 67 के बारे में बच्चे से पूछा जाता है कि कितना है तब भी वह इकसठ वाली पंक्ति की गिनती को बोलता हुआ बताता है कि यह सड़सठ है।
- 132 में कितनी दहाइयाँ हैं? पूछने पर ज़्यादातर बच्चों का जवाब रहता है 3, जबकि बहुत कम बच्चे बता पाते हैं कि 13 दहाइयाँ भी होगी। यानी कि बच्चे संख्या की संरचना के साथ में समूहीकरण और पुनःसमूहीकरण के विचार को नहीं जोड़ पाते।
- कई बच्चे जोड़ के सवाल, जैसे 27 में 15 को जोड़ते हुए उत्तर 312 लिखते हैं। इकाइयों से मिलकर बन रही दहाई को सही स्थान पर नहीं रखते हैं।
- कई बच्चे सवाल $309+24=$ को हल करते हुए स्थानीय मान के अनुसार निर्धारित स्थान का ध्यान नहीं रखते हैं। वे बाईं तरफ से संख्या लिखकर कॉलम विधि से जोड़ कर देते हैं। इस तरह उनका उत्तर 549 आता है।
- संख्या 20 में से 15 को घटाते हुए कुछ बच्चे उत्तर में 10 लिखते हैं। इसी तरह कुछ बच्चे इसी सवाल का उत्तर 15 लिखते हैं।
- संख्या 1000 में से 19 घटाने के दौरान कई तरह की गलतियाँ करते हैं।
- स्थानीय मान की समझ पुख्ता न होने का असर संख्याएँ लिखने, जोड़-घटाव करने और गुणा-भाग के सवालों में भी देखा जा सकता है। इन सवालों को हल करते समय होने वाली कई तरह की गलतियों का मुख्य कारण स्थानीय मान की बेहतर समझ नहीं होना ही होता है।



2.3.7 उदाहरणात्मक कार्ययोजना (Illustrative Session Plan):

सत्र	विषय	समय	सामग्री	
1	मात्रा को संख्या में लिखना- संख्या नाम सुनकर संख्या लिखने और संख्या बोलने के दौरान बच्चों को होने वाली चुनौतियाँ	चुनौतियों का कारण समझना- • बच्चों की चुनौतियों को समझकर उन्हें दूर करने के लिए किए गए प्रयास साझा करना।	1 घंटा	पाठ्यपुस्तक, सीखने के प्रतिफल, टीएलएम, बच्चों द्वारा हल किए गए सवाल।
2	संख्याओं का इतिहास समझना	• विभिन्न संख्या पद्धतियों में समूहीकरण का महत्त्व। • संख्या पद्धति के नियम, इसके फायदे और खामियाँ।	2 घंटे	पाठ्यपुस्तक के पाठ, कार्यपत्रक, टीएलएम, बच्चों द्वारा हल किए गए सवाल।
3	संख्या पद्धति का निर्माण करना	• अपरिचित चिह्नों से पाँच आधारित संख्या पद्धति का निर्माण करना।	1 घंटा	पाठ्यपुस्तक के पाठ, कार्यपत्रक।
4	स्थानीय मान के नियम खोजना	• दो, तीन, चार, पाँच, सात और दस आधारित समूहों का उपयोग कर संख्याएँ बनाना।	2 घंटे	पाठ्यपुस्तक के पाठ, कार्यपत्रक, टीएलएम।
5	सामग्री का उपयोग करते हुए स्थानीय मान समझना	• तीली-बण्डल, डीन्स ब्लॉक, चूड़ी खेल, अबेकस, ऐरो कार्ड बनाना तथा इनका उपयोग करते हुए स्थानीय मान समझना।	3 घंटे	पाठ्यपुस्तक के पाठ, कार्यपत्रक, टीएलएम।
6	पाठ्यपुस्तक के सन्दर्भ तथा अभ्यासों से परिचय और कार्यपत्रकों का उपयोग	• स्थानीय मान पर आधारित अभ्यास। विस्तारित रूप में लिखना।	2 घंटे	पाठ्यपुस्तक के पाठ, कार्यपत्रक, टीएलएम, आलेख।



2.3.8 अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices):

कक्षा-कक्ष में स्थानीय मान पर आधारित काम निम्न प्रक्रियाओं के अनुसार किया जाना अपेक्षित है। ये प्रक्रियाएँ उन्हीं सात अवलोकन क्षेत्रों पर आधारित हैं, जिनके बारे में हमने अध्याय एक में बात की है। शिक्षकों के साथ स्थानीय मान की अवधारणा पर किए जाने वाले काम का आधार भी यही प्रक्रियाएँ होंगी।

अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)- स्थानीय मान

1. विषय की प्रकृति बताते हैं और सीखने-सिखाने की प्रक्रिया में ELPS उपागम को भी स्वीकारते हैं।
2. स्थानीय मान के स्तरवार सीखने के प्रतिफलों को जानते हैं और बताते भी हैं।
3. ELPS व सीखने के प्रतिफलों के आधार पर शिक्षण योजना बनाते हैं या साझा करते हैं।

अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)- स्थानीय मान

4. 1 से 9 तक तथा 0 की संख्या समझ पर गतिविधियों से शुरुआत करते हैं।
5. किसी संख्या को विभिन्न प्रकार से जोड़-तोड़ कर बनाने की प्रक्रिया को करवाते हैं।
6. वस्तुओं को गिनने में दस-दस में गिनना शामिल करते हैं।
7. संख्या समझ को आगे बढ़ाते हुए 10-10 के समूह बनाना और बची हुई खुली वस्तुओं को गिनवाने पर काम करते हैं।
8. संख्या लिखने में 9 से आगे दस को कैसे लिखा जाए, इस प्रकार की समस्या पर बच्चों के साथ बातचीत करते हैं।
9. संख्या को लिखने के खास क्रम में तीन बातों पर बातचीत व परिस्थिति निर्माण करते हैं।
 1. जगह और उस जगह का अन्य जगहों से सम्बन्ध।
 2. किसी एक संख्यांक का एक जगह पर लिखा जाना।
 3. संख्यांक का किसी खास जगह पर लिखने से उसकी बनने वाली कीमत।
10. 0 की संख्या समझ को आगे बढ़ाते हुए, इसे स्थानधारक के तौर पर समझने यानी संख्या लिखने में किसी भी स्थान पर इकाई / दहाई / सैकड़ा आदि की अनुपस्थिति को 0 से दर्शाने से संबंधित बातचीत व गतिविधि करते हैं।
11. स्थानीय मान की समझ विकसित करने के लिए तीली-बण्डल, गिनमाला, संख्या कार्ड, डीन्स ब्लॉक, संख्या पट्टी का प्रयोग करते हैं।
12. ठोस वस्तुओं से की जाने वाली गतिविधियों को बोर्ड पर लाने के लिए उनके निरूपण का प्रयोग करते हैं।
13. संख्या समझ के लिए संख्या अनुमान, संख्या निरूपण और संख्या पर आधारित विभिन्न पैटर्न्स व पहेलियों पर बच्चों को चुनौती देते हैं।
14. ठोस वस्तुओं जैसे डीन्स ब्लॉक, संख्या कार्ड, मोतीमाला आदि की मदद से शुरु करते हुए बोर्ड पर उन्हीं के चित्रों का निरूपण कर संख्या व स्थानीय मान की समझ बनाते हैं।
15. सीखे हुए की समझ जानने हेतु ठोस वस्तुओं, चित्रों व प्रतीकों पर आधारित प्रक्रियाएँ करते हैं।
16. बच्चों को विभिन्न पहेलियाँ व पैटर्न्स बनाने के लिए प्रेरित करते हैं।
17. आकलन के विभिन्न तरीकों, जैसे गृहकार्य, वर्कशीट, प्रोजेक्ट आदि का प्रयोग शिक्षण की प्रक्रिया के हिस्से के तौर पर करते हैं।
18. हर बच्चे की समझ के आधार पर समूहवार योजना बनाते हैं। समूह बनाने में इस बात पर गौर करते हैं कि बच्चों का स्तर एक जैसा हो और उनके लिए तरीके अलग हों।
19. प्रक्रिया के प्रत्येक चरण में वर्कशीट या खेल के माध्यम से समझ जाँचते हैं। जैसे बच्चों को संख्या कार्ड देना और स्थानीय मान के फर्श पर बने डिब्बों में खड़ा कर संख्या पूछना और फिर उनके स्थान बदलना और पूछना।
20. हर बच्चे के जवाबों का विश्लेषण कर उससे बातचीत करते हैं।



2.3.9 उदाहरणात्मक पाठ योजना (Illustrative Lesson Plan)

टॉपिक	उद्देश्य	समय	प्रक्रिया	सामग्री
दहाई, सैकड़ा व हज़ार की समझ	100 और 10 व एक इकाई के बीच के संबंध से परिचय कराना।	3 से 4 कालांश	<ul style="list-style-type: none"> शुरुआत में शिक्षकों को स्ट्रॉ को गिनना चाहिए (धीरे-धीरे व जोर-जोर से बोलकर 1, 2, 3 आदि), तब तक जब तक वे 10 तक न गिन लें। फिर बच्चों को दिखाएँ कि आप 10 स्ट्रॉ का एक बण्डल बना रहे हैं। उन्हें स्ट्रॉ व बण्डल शब्द के बीच का फर्क स्पष्ट रूप से बताएँ, जैसे कि स्ट्रॉ 10 हैं पर बण्डल 1 ही है। हर बच्चे को ध्यान से दस स्ट्रॉ गिनने को और 10 स्ट्रॉओं को रबर बैंड से बांधकर एक बण्डल बनाने को कहें। शिक्षक 7 स्ट्रॉ को उठाकर पूछ सकते हैं: “10 स्ट्रॉओं का एक बण्डल बनाने के लिए मुझे और कितनी स्ट्रॉ की जरूरत है?” इसी तरह शिक्षक 12 स्ट्रॉ उठाकर पूछ सकते हैं: “मुझे 10 स्ट्रॉओं का एक बण्डल बनाना है। तो मैं क्या करूँ?” <p>(बच्चों को रंगीन चौकोर कागज़ भी दिए जा सकते हैं, जिन्हें वे गिन सकते हैं और क्लिप लगाकर एक साथ रख सकते हैं। “यह 10 कागज़ों का एक बण्डल है।” उन्हें बिंदुओं वाले कागज़ भी दिए जा सकते हैं और 10 बिंदुओं पर एक लाइन खींचने या गोला लगाने को कहा जा सकता है। “यह 10 बिंदुओं का एक समूह है।”)</p> <ul style="list-style-type: none"> अब उन्हें बण्डल व स्ट्रॉ/कागज़ दिखाया जा सकता है और उन्हें लिखने के लिए शुरुआत में 15 को देखना और फिर लिखना, ऐसे ही 14, फिर 13, फिर 12, फिर 11 व अंत में 10 किस तरह लिखा जाता है, इस पर बातचीत करें। इसके साथ ही स्थानीय मान कार्डों का इस्तेमाल करके भी उनकी समझ को पुख्ता किया जाए। <p>(शुरुआत से ही बच्चों को गतिविधि या प्रयोग की सामग्री और रिकॉर्ड करने व लिखने के प्रक्रियात्मक नियमों के बीच के रिश्ते पर ज़रूर ध्यान देना चाहिए।)</p>	लचीली स्ट्रॉ, रबर बैंड, रंगीन कागज़ की पट्टियाँ, क्लिप्स, बिंदुओं वाले कुछ कागज़, स्थानीय मान कार्ड, इकाई व दहाई स्ट्रॉ।

टॉपिक	उद्देश्य	समय	प्रक्रिया	सामग्री
दहाई, सैकड़ा व हज़ार की समझ	दहाइयों में गिनना सीखना: 1 दहाई, 2 दहाइयाँ और आगे भी इसी तरह 9 दहाइयों तक और इनके संख्या नाम दस, बीस आदि।	1 कालांश	<ul style="list-style-type: none"> ज्यादा स्ट्रॉओं के साथ ऊपर की गतिविधि को दोहराएंगे और 10-10 स्ट्रॉओं के कई सारे बण्डल बनाएंगे। (जैसा कि पहले भी बताया गया है कि आपको भाषा के पहलू पर ज़ोर देने की बहुत ज़रूरत है। उन्हें कहें: “यहाँ स्ट्रॉओं का 1 बण्डल है। इसमें कितनी स्ट्रॉ हैं?” दस। “यहाँ स्ट्रॉओं के 2 बण्डल हैं तो कितनी स्ट्रॉ हुई?” बीस।) शिक्षक अलग-अलग बच्चों को अलग-अलग संख्याओं के लिए बण्डल बनाने को कह सकते हैं व उन्हें उनके संख्या नाम पढ़ा सकते हैं। वे स्थानीय मान कार्ड का इस्तेमाल कर इनका रिकॉर्ड भी रख सकते हैं। बच्चे बिंदुओं वाले कागज के साथ भी कुछ अभ्यास कर सकते हैं। उन्हें वर्कशीट भी दी जानी चाहिए, जिसमें उन्हें दिए गए चित्रों के लिए संख्या लिखनी हो और दी गई संख्याओं के लिए चित्र बनाने हों। वो अलग-अलग दहाइयों की मोती की माला भी बना सकते हैं। बच्चों को फ्लैश कार्ड दे सकते हैं, जिनमें बण्डलों के चित्र हों और बच्चों को उनके समरूप संख्या नामों से उनके जोड़े मिलाने हों। 	लचीली स्ट्रॉ या नलियाँ, रबर बैंड। रंगीन कागज की पट्टियाँ, क्लिप्स, बिंदुओं वाले कागज। स्थानीय मान कार्ड, संख्या नामों, अंकों व सामग्रियों के लिए फ्लैश कार्ड, मोती व धागा।
संख्याओं को गिनना, रिकॉर्ड करना व लिखना। 11 से 20 तक 21 से 99 तक		3 कालांश	<ul style="list-style-type: none"> बच्चों को चीज़ों को गिनने दें। चीज़ों की संख्या 100 से ज्यादा न हो (चीज़ों को खुला रखें)। बच्चों को दिखाएँ कि चीज़ों के 10-10 के समूह बनाने से काम किस तरह आसान हो जाता है। (चीज़ों की संख्या 100 से ज्यादा न हो। चीज़ों को दस-दस व एक-एक के समूह में रखें। उन्हें अलग-अलग चीज़ों जैसे बीजों, मोतियों और एक साथ रखी चीज़ों जैसे टाइल्स की पंक्तियाँ, फूलों या मोतियों की मालाएँ, कागज के रोल जिन पर क्रम से चिह्न बने हों, दोनों को गिनने दें।) 	रंगीन कागज की पट्टियाँ, क्लिप्स, दस चौकोर खानों वाली दस पट्टियाँ, खुली चौकोर पर्चियाँ, बिन्दु वाले कागज, स्थानीय मान कार्ड, संख्याओं, संख्या नामों व चीज़ों के लिए फ्लैश कार्ड, संख्या रेखा पट्टी (0 से 99), एक स्थायी संख्या रेखा ब्लैकबोर्ड के नीचे बनाई जा सकती है, संख्या कार्ड।

टॉपिक	उद्देश्य	समय	प्रक्रिया	सामग्री
दहाई, सैकड़ा व हज़ार की समझ			<ul style="list-style-type: none"> • उन्हें दस-दस व एक-एक के कुछ समूह दिखाएँ। आपने उनके सामने जितनी भी स्ट्रॉ रखी हों, उन्हें उनसे कम स्ट्रॉ दिखाने को कहें। उन्हें कोई भी एक संख्या दें और उनसे उसकी दहाइयों व इकाइयों के लिए ज़रूरी संख्या उठाने को कहें। • उन्हें बिंदुओं वाला एक कागज़ दें और बच्चों को आपकी बताई हुई संख्या के दहाई व इकाई के अंक के बराबर बिंदुओं को गोला लगाने को कहें। उन्हें ऐसी कई सारी गतिविधियाँ करने दें जिसमें उन्हें कई अलग-अलग संख्याओं को लिखना व उनका रिकॉर्ड रखना हो। • शिक्षक कोई भी एक संख्या बताकर बच्चों को उस संख्या वाला पेज खोलने को कह सकते हैं। बच्चों को ऐसी वर्कशीट्स भी दी जानी चाहिए जिनमें उन्हें दिए गए चित्रों की संख्या लिखनी हो और दी गई संख्या के लिए चित्र बनाने हों। इसे बताने के लिए थोड़ा मूर्त चीजों का इस्तेमाल करना तब तक ज़रूरी है जब तक कि बच्चे पूरी तरह अगले स्तर पर जाने के लिए तैयार न हो जाएँ। 	
संख्याओं को क्रम से जमाना।		1 कालांश	<ul style="list-style-type: none"> • कमरे में एक डोरी बांध दें। बिना कुछ सोचे-विचारे कुछ संख्या कार्ड उठा लें और हर बच्चे को इनमें से एक संख्या कार्ड उठाने दें। बारी-बारी से हर बच्चा इस बात का ध्यान रखते हुए अपने कार्ड को डोरी पर इस तरह टांगे कि वो सभी कार्ड बढ़ते क्रम में हों। <p>अथवा</p> <ul style="list-style-type: none"> • शिक्षक कोई भी एक कार्ड उठाकर डोरी पर टांग सकते हैं और कुछ इस तरह के सवाल पूछ सकते हैं: “इसके सबसे करीब का कार्ड किसके पास है?”, “इससे सबसे दूर का कार्ड किसके पास है?”, “इससे सबसे पास की दहाई वाला कार्ड किसके पास है?”, “इससे 5 ज़्यादा संख्या वाला कार्ड किसके पास है?”, “इससे 10 कम संख्या वाला कार्ड किसके पास है?”, “किसके पास वो कार्ड हैं जिसमें इसकी इकाई व दहाई आपस में अदल-बदल गई हों? इस तरह के सवाल बच्चों को संख्याओं की तुलना करने, जोड़-घटाव पर चर्चा करने व स्थानीय मान पर खासा ध्यान देने के लिए प्रेरित करेंगे। 	लंबी डोरी, संख्या कार्ड (गणित किट से)।

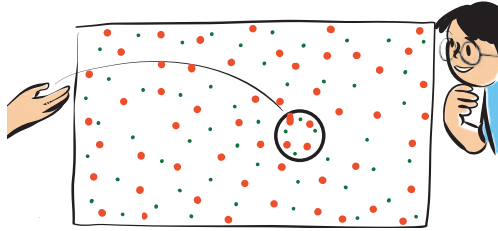
टॉपिक	उद्देश्य	समय	प्रक्रिया	सामग्री
दहाई, सैकड़ा व हज़ार की समझ	संख्या की समझ, सन्निकटन व अनुमान लगाने का कौशल विकसित करना।	1 कालांश	<ul style="list-style-type: none"> हर बच्चे को मुट्ठी भर बीज उठाने और उन्हें मेज पर उड़ेलने को कहें। बच्चों को इन बीजों की संख्या का अनुमान लगाने और इन्हें लिखने को कहें। फिर बच्चों से कहें कि अब वे दस-दस के समूह बनाकर इन्हें गिनें। बच्चों को पाठ्यपुस्तक का कोई भी एक पन्ना खोलने को कहें। उनसे उस पन्ने में दिए गए शब्दों की संख्या का अनुमान लगाने को कहें। (सुनिश्चित करें कि ऐसा पन्ना खुलवाएँ जिसमें 100 से ज़्यादा शब्द न हों।) बच्चों को पाठ्यपुस्तक के कोई एक पैराग्राफ में दिए शब्दों का अनुमान लगाने को कहें। बच्चों को अपने अनुमान का रिकॉर्ड रखने को कहें और फिर शब्दों को गिनने को कहें ताकि वो जाँच सकें कि उनका अनुमान सही संख्या के कितने निकट का था। बच्चों से एक अखबार लाने को कहें। उनसे केवल अनुमान के आधार पर 50 शब्दों पर गोला लगाने के लिए कहें। फिर उन्हें शब्दों को गिनने दें और जाँचने दें कि उनका अनुमान सही संख्या के कितना निकट था। 	अखबार, कुछ पाठ्यपुस्तकें, बीजों का संग्रह।
	शीर्षक के ज़रिए स्थानीय मान तय करना: दहाइयाँ (द), इकाइयाँ (इ)	1 कालांश	<ul style="list-style-type: none"> बच्चों को दी हुई संख्या को स्थानीय मान कार्ड पर पट्टियों व पर्चियों की मदद से दिखाने दें। ऐरो कार्ड का इस्तेमाल करके उन्हें संख्या बनाने दें, जैसा कि ऊपर चित्र में दिखाया गया है। पूर्ण व भागों के एकीकरण के लिए पहले इन्हें एक के नीचे एक रखें और फिर एक के ऊपर एक। बच्चों को दिए गए चित्र के लिए संख्या लिखने को दें और फिर ऐरो कार्ड से उसे बनाने को कहें। 	दस चौकोर खानों वाली दस पट्टियाँ और खुल्ली चौकोर पर्चियाँ, स्थानीय मान कार्ड, ऐरो कार्ड।

टॉपिक	उद्देश्य	समय	प्रक्रिया	सामग्री
दहाई, सैकड़ा व हज़ार की समझ	सैकड़े से परिचय कराना।	2 कालांश	<ul style="list-style-type: none"> चौकोर पर्चियों की गिनती से शुरुआत करें (धीरे-धीरे और ज़ोर से बोलते जाएँ: 91, 92, 93, आदि...) और 99 तक गिनते जाएँ और फिर बच्चों को बताएँ कि एक और चौकोर पर्ची जोड़ने पर यहाँ दस चौकोर खानों वाली 10 पट्टियाँ हो जाएंगी (क्योंकि 10 खुली इकाइयों को दस चौकोर खानों वाली एक पट्टी से बदला जा सकता है)। फिर उन्हें बताएँ कि ऐसी 10 पट्टियाँ साथ मिलकर एक सैकड़ा बनाती हैं (इन्हें सौ चौकोर खानों वाले एक बोर्ड से बदला जा सकता है) और यह दिखाएँ कि इसे लिखा कैसे जाता है। (बच्चों को खुद से जाँचने दें कि सौ चौकोर दस पट्टियों से मिलकर बने हैं।) उन्हें यह ज़रूर देखना चाहिए कि एक सैकड़ा 10 दहाइयों व 100 इकाइयों के बराबर है। स्थानीय मान कार्ड लें और 91 से लेकर 99 तक के कार्ड क्रम से बदलते हुए इस बात पर बच्चों का ध्यान दिलाएँ कि कैसे इकाई व दहाई दोनों के स्थान पर एक-एक 9 है, और कैसे एक और इकाई के जोड़ने पर एक नया स्थान (सैकड़ा) बन जाता है और इकाई व दहाई दोनों स्थान पर शून्य हो जाते हैं। 	सौ चौकोर खानों वाले कागज़, दस चौकोर खानों वाली दस पट्टियाँ और चौकोर पर्चियाँ, स्थानीय मान कार्ड, 100 खानों वाला चौकोर बोर्ड।
101 से 999 तक की संख्याएँ पढ़ाना। हज़ार व उससे बड़ी संख्याएँ।		1 कालांश	<p>हर बच्चे के पास स्वयं का बना एक स्थानीय मान किट (जिसमें सैकड़े, दहाई व इकाई की सामग्री, एरो कार्ड, स्थानीय मान कार्ड) ज़रूर होना चाहिए, जो 100 से 200 के बीच की किसी भी संख्या को दर्शाने के लिए इस्तेमाल किया जा सके।</p> <p>ठोस सामग्रियों के इस्तेमाल के साथ ही उन्हें चौकोर खानों वाली कॉपी में अर्द्ध-ठोस रूप (चित्र वगैरह) से इसे दर्शाना चाहिए और संख्या को लिखना भी चाहिए।</p> <p>हज़ार से बड़ी संख्याओं के लिए ठोस सामग्रियों के इस्तेमाल की ज़रूरत नहीं है, क्योंकि बच्चा अलग-अलग स्थानों के बीच के संबंध को पूरी तरह समझ चुका होता है और इस समझ को आगे के स्थानों के लिए इस्तेमाल करने लायक स्थिति में पहुँच जाता है।</p>	सौ चौकोर खाने वाले कागज़, दस चौकोर खानों वाली दस पट्टियाँ और खुली पर्चियाँ, स्थानीय मान कार्ड, मोती, एरो कार्ड।

2.3.10 सार संक्षेप (Summary)

- दुनिया में विविध प्रकार की संख्या पद्धतियाँ हैं। भाषा, संकेत और लिपि का उपयोग कर एक-दूसरे से माता के बारे में सम्प्रेषण या अभिव्यक्ति की जाती है।
- हमारी संख्याएँ दस आधारित (दाशमिक संख्या पद्धति) हैं। वस्तुओं का समूहीकरण 10 पर किया जाता है। इनमें दस चिह्न हैं— 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0
- इन दस चिह्नों और कुछ नियमों का उपयोग कर हम बड़ी-से-बड़ी संख्या लिख सकते हैं।
- किसी भी संख्या को एक और सिर्फ एक ही तरीके से लिखा जा सकता है।
- संख्या लिखने की व्यवस्था में एक पैटर्न है। बच्चों को इस पैटर्न की समझ होनी चाहिए।
- स्थानीय मान पर काम करते हुए मोतीमाला, तीली-बण्डल, डीन्स ब्लॉक व एरो कार्ड का उपयोग करें।
- बिना सामग्री उपयोग किए भी बच्चे संख्याओं को लिख सकें। एक स्वरूप से दूसरे स्वरूप में जोड़-तोड़ कर पुनः समझ सकें। संख्याओं का विस्तारित रूप लिखें और विस्तारित रूप देखकर संख्या निर्माण कर सकें।

गतिविधि (activity): चूड़ी फेंको, संख्या बनाओ- चार्ट पर बड़े आकार की लाल बिन्दी और छोटे आकार की हरी बिन्दियाँ बनाओ। अपने साथी के साथ चूड़ी फेंकने का खेल खेलो। एक लाल बिन्दी 10 के बराबर है और एक हरी बिन्दी 1 के बराबर है। तुमने चूड़ी फेंक कर 4 लाल और 4 हरी बिन्दियाँ घेरी हैं। इनसे मिलकर संख्या इस प्रकार बनेगी।



बिंदियाँ
अंक

● ● ● ●	● ●
40	4

source: गणित का जादू, कक्षा 2, एनसीईआरटी



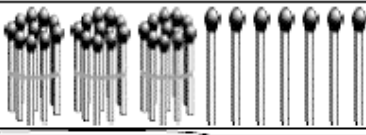

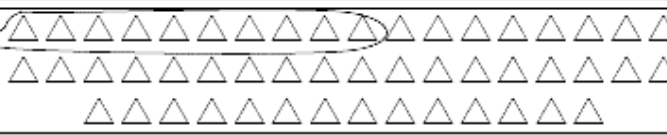
2.3.11 कार्यपत्रक (Worksheets)

प्रश्न 1. खाली स्थान में संख्या लिखो।


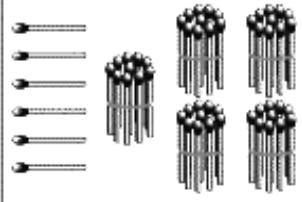
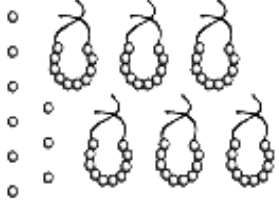
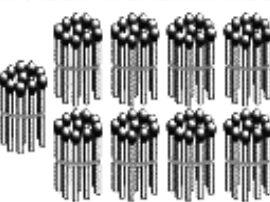


	_____ रुपए
	_____ तीलियाँ
	_____ ब्लॉक
	_____ मोती

source: गणित का जादू, कक्षा 3, एनसीईआरटी

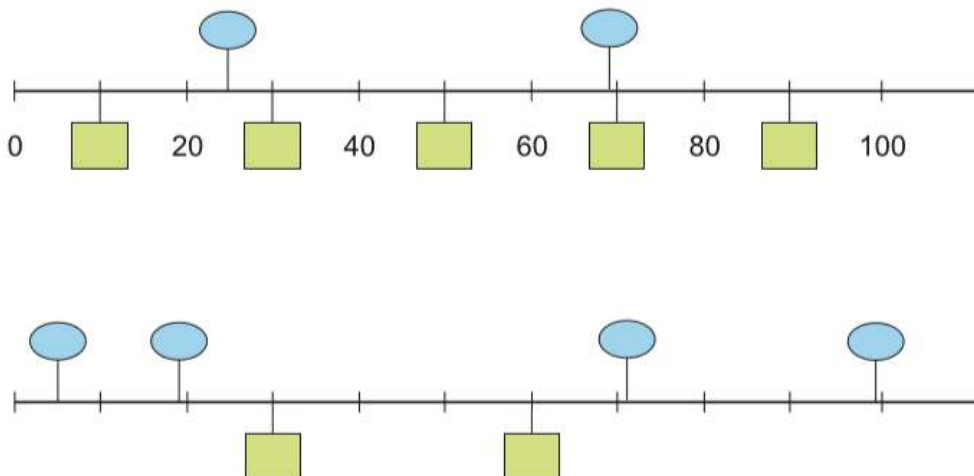
प्रश्न 2. दस-दस चीजों के समूह पर घेरा करते हुए बण्डल व खुल्लों की मदद से संख्या बनाइए।

	बण्डल	खुल्ले	संख्या
	3	7	37
	बण्डल	खुल्ले	संख्या
	बण्डल	खुल्ले	संख्या

प्रश्न 3. नीचे बने खानों में दिए गए चित्रों की संख्या पहचान कर घेरा बनाइए।

		
80 70 60	55 56 65	96 69 99
		
63 90 81	60 61 16	12 22 21

प्रश्न 4. इस संख्या रेखा पर लगे कार्डों में सही संख्या लिखो।



प्रश्न 5. मैं चार अंक की संख्या हूँ - इकाई का अंक 3, दहाई का अंक 4, सैकड़ा का अंक 0 और हज़ार का अंक 2 है। बताओ, मैं कौन सी संख्या हूँ?

प्रश्न 6. इन्हें पढ़कर सामने लिखी सही संख्या से मिलान करो।

<ol style="list-style-type: none"> 1. मैं 40 और 50 के बीच आता हूँ और मुझे लिखने में एक पाँच आता है 2. मैं 90 के बहुत करीब हूँ और मुझे लिखने में एक 9 आता है 3. अगर मेरे बाद तुम चौका लगाओ तो तुम्हारा शतक पूरा हो जाएगा 4. मैं 10 के दस नोटों के बराबर हूँ 5. मैं एक शतक + आधे शतक के बराबर हूँ 6. मैं 77 और 97 के ठीक बीच में हूँ 	<p style="text-align: right;">96</p> <p style="text-align: right;">150</p> <p style="text-align: right;">45</p> <p style="text-align: right;">89</p> <p style="text-align: right;">87</p> <p style="text-align: right;">100</p>
--	---

प्रश्न 7. इन संख्याओं का पैटर्न समझो और आगे बढ़ाओ।

इस पैटर्न को आगे बढ़ाओ

550, 560, 570, _____, _____, _____, _____,

910, 920, 930, 940, _____, _____, _____, _____,

209, 207, 205, _____, _____, _____, _____,

401, 402, 403, _____, _____, _____, _____,

अतिरिक्त अध्ययन सामग्री (Additional Reading Resources)

1. स्थानीय मान पुस्तिका- पुल आउट, लर्निंग कर्व, अज़ीम प्रेमजी फाउंडेशन
2. आलेख: एक पे एक ग्यारह- सन्दर्भ, एकलव्य
3. आलेख: ज़ीरो माने कुछ नहीं- सन्दर्भ, एकलव्य
4. आलेख: स्थानीय मान और जोड़ सिखाने का प्रयास- सन्दर्भ, एकलव्य

2.4 जोड़-घटाव (Addition and Subtraction)

सीखने के प्रतिफल (Learning Outcomes)

कक्षा 1

- 9 तक की संख्याओं के जोड़ तथ्य बनाना।
- 1 से 9 तक की संख्याओं का उपयोग कर घटाने की क्रिया।
- 9 तक की संख्या में प्रतिदिन होने वाला जोड़ना-घटाना।
- दैनिक जीवन में 1 से 20 तक की संख्याओं का उपयोग जोड़-घटाव में करना।

कक्षा 2

- नोट तथा सिक्कों के उपयोग से 100 तक की मान वाली खेल मुद्रा को दर्शाना।
- जोड़-घटाव पर आधारित अपने सन्दर्भ, स्थितियाँ तथा प्रश्न विकसित करें।
- दो समूहों को मिलाना और समूह में वृद्धि वाले सवाल हल करें।
- जोड़ने-घटाने के लिए नए तरीकों का उपयोग करें।
- 99 तक की 2 अंकों की संख्याओं में जोड़-घटाव कर सकें।

कक्षा 3

- दैनिक जीवन की समस्याओं को हल करने में 3 अंकों की संख्याओं में जोड़-घटाव कर सकें।
- ग्राम, किलोग्राम की मात्रा को जोड़ना-घटाना कर सकें।

कक्षा 4

- मुद्रा, लम्बाई, भार, धारिता आदि के सन्दर्भ में जोड़-घटाव के सवाल हल करना।
- जोड़-घटाव के सन्दर्भ पर आधारित इबारती सवाल बनाना।
- तीन अंकों की संख्याओं में जोड़-घटाव करना।

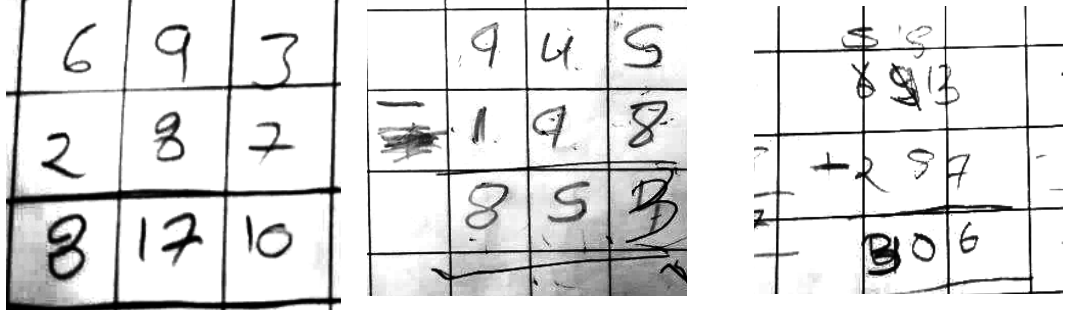
कक्षा 5

- मानक विधि का उपयोग करते हुए जोड़-घटाव करना।
- अनुमान लगाना तथा मानक विधि से हल करके जाँच करना।
- पैसा, लम्बाई, भार, आयतन आदि के सन्दर्भ में जोड़-घटाव करना।
- 1000 से बड़ी संख्याओं में जोड़-घटाव करना।

2.4.1 पंचायत स्तरीय कार्यशाला (PEEO Level Workshop)

रुमित हैनरी ने अपनी पढ़ाई गणित और भौतिकी विषय में की है। मणिपुर में स्थित एक कॉलेज से पिछले साल ही एमएससी किया है। कॉलेज में आयोजित कैम्पस प्लेसमेंट में उसे एक ऐसी संस्था में काम करने के लिए चुना गया जो स्कूली शिक्षा के उन्नयन के लिए काम कर रही है। रुमित को सागर जिले में स्थित एक ब्लॉक में काम करने का अवसर मिला है। उसे यह काम बहुत पसंद है। वह स्वयं भी एक मध्यमवर्गीय परिवार से आता है। वह अपनी स्कूली शिक्षा के दौरान की चुनौतियों को अच्छे से समझता है। इस संस्था में शामिल होते ही रुमित बुनियादी गणित और भाषा शिक्षण पर आधारित एक उन्मुखीकरण कार्यशाला में शामिल रहा था।

रमित को बच्चों के साथ गणित शिक्षण पर काम करते हुए इन मुद्दों पर और गहरी समझ बनानी है। रमित ने आस-पास के स्कूलों में जाकर कक्षा 3 से 5 तक के बच्चों से जोड़-घटाव के सवाल पर कुछ काम किया। बच्चों द्वारा किए गए हल नीचे दिए हैं। क्या आप इन सवालों को देखकर बता सकते हैं कि बच्चों को किस तरह की चुनौतियाँ आ रही हैं? इन चुनौतियों के समाधान के लिए कोई उपाय सुझाइए?



source: कक्षा 2 के एक छात्र की कार्यपुस्तिका, राजसमन्द

गणित में बच्चों को आने वाली चुनौतियों को और बेहतर समझने के लिए रमित सप्ताह में चार दिन एक प्राथमिक स्कूल में गणित पढ़ाने जाता है। इस स्कूल में हीरा चौकसे मैडम गणित पढ़ा रही हैं। रमित हीरा मैडम को गणित पढ़ाते हुए देखता है तथा उनसे बात करके गणित पढ़ाने के तरीके सीखता-समझता है। इसके अलावा वह अपनी संस्था में कार्यरत वरिष्ठ साथियों से भी मदद लेता है। अभी वह कक्षा 1, 2 व 3 के बच्चों को गणित पढ़ाता है। जब कभी समय रहता है तो वह कक्षा 4 और 5 के बच्चों के साथ भी काम करता है। हीरा मैडम रमित को कक्षा में काम करने का पूरा अवसर देती हैं। साथ ही गणित शिक्षण में आने वाली चुनौतियों में भी उसकी मदद करती हैं। रमित पिछले कुछ दिनों से 'दो अंकों की संख्याओं का जोड़-घटाव' पर काम कर रहा था। मैडम ने रमित को सलाह दी थी कि पहले कुछ दिन मौखिक जोड़-घटाव पर काम कर लें, उसके बाद ही लिखित विधि पर काम करेंगे।

आज रमित ने कक्षा 1 व 2 के (इस स्कूल में कक्षा कम हैं, अतः कक्षा 1 और 2 को एक साथ ही बिठाया जाता है) बच्चों से दोस्ताना माहौल में बात शुरू की। पिछले कई दिनों से गाँव में पशु मेला चल रहा था। इस मेले में तमाम खाने-पीने और खेल-खिलौनों की दुकानें लगी थीं। बच्चे अपने माता-पिता के साथ शाम को मेला घूमने जाते थे। रमित ने इसी मेले के बारे में बात शुरू की। उसने बच्चों द्वारा खरीदे गए खिलौनों के बारे में पूछा। यह भी जाना कि उन्होंने क्या-क्या खाया था। इन्हीं सब चीज़ों की कीमत को आधार बनाकर मौखिक जोड़ने-घटाने पर बात की थी।



रमित ने एक सवाल किया- 'गोलू ने मेले से 15 रुपये का एक खिलौना ऑटो और 12 रुपये की बाँसुरी खरीदी थी। बताओ ऑटो और बाँसुरी खरीदने के लिए गोलू को कितने रुपये देने पड़े?'

2.4.2 गिनने के कौशल से जोड़ना-घटाना (Counting as a Tool)

कक्षा 1 में पढ़ रहे रमेश ने पहले 15 लकीरें बनाईं और फिर 12 लकीरें बनाईं। इसके बाद उसने सभी लकीरों को गिन लिया। रमेश का उत्तर 26 आया था। रुमित ने गौर से कॉपी में देखा तो पाया कि दो लकीरें इतनी पास बन गई थीं कि उनको गिनने में गड़बड़ हो रही थी। इसीलिए रमेश का उत्तर 26 आया था। रुमित ने कॉपी पर दूसरी जगह यही लकीरें बना दीं। इस बार रमेश ने ठीक गिनती की थी। अब उसका उत्तर 27 आया था। रमेश की कॉपी में किए गए कुछ और जोड़ के सवाल देखकर रुमित समझ गया कि उसके जोड़ करने का तरीका क्या है। उसने 6 और 1 या फिर 3 और 4 का जोड़ ठीक किया था। लेकिन बड़ी संख्या होते ही लाइन गिनने में कुछ गलती हो रही है।

6				3	
1			+	4	
7				7	

source: कक्षा 2 के एक छात्र की कार्यपुस्तिका, राजसमन्द

रुमित ने कहीं पढ़ा था कि इंसान ने जब गिनना नहीं सीखा था तब भी वह अपनी गुफा की दीवार पर लकीरें खींच कर हिसाब रखना जानता था। ये बच्चे भी अपने उसी आदिम हुनर का इस्तेमाल कर रहे हैं। कक्षा 2 में पढ़ने वाली रोली जोड़ करने के लिए अपनी उंगलियों की पोर का इस्तेमाल करती है। एक हाथ की 15 पोर गिन लेने के बाद उसने दूसरे हाथ में 12 पोरों को गिना। इसके बाद दोबारा 1 से आगे की गिनती गिनकर 27 पर पहुँची। रमेश और रोली दोनों ही जोड़ करने के लिए गिनती का उपयोग कर रहे हैं।

सवाल: सोचिए, क्या गिनती जाने बिना भी कभी जोड़ या घटाना किया जा सकता है?

गणित पाठ्यक्रम में कक्षा 1 से ही गिनती का उपयोग करके मौखिक जोड़ने-घटाने की दक्षता को विकसित करने का प्रयास किया जाता है। रुमित को उन्मुखीकरण कार्यशाला में भी ये सारे तरीके बताए गए थे और इस पर आधारित एक लेख भी दिया गया था। तब सिर्फ लेख पढ़कर रुमित कई सारी बातें नहीं समझ सका था, लेकिन आज जब वह पहली कक्षा की किताब के पन्ने पलटकर देख रहा था तब उसे यह बात समझ में आ रही थी। गिनने के कौशलों के इस्तेमाल से जोड़-घटाव के कई उदाहरण यहाँ दिए गए थे। किताब के अभ्यासों को देखते हुए रुमित अपनी डायरी में लिखे हुए कुछ सिद्धांतों को भी देख रहा था। ये सारी बातें उसे उन्मुखीकरण कार्यशाला में बताई गई थीं। पहली कक्षा की किताब में दिए इन पाठों के सन्दर्भ बहुत ही रोचक थे तथा बच्चों के अनुभवों से जुड़ते थे। ये मौखिक तथा लिखित रूप में जोड़-घटाव की शुरुआत थी।

किताब के पन्नों से:

किताबों में बच्चों के जीवन से जुड़े रोचक सन्दर्भों का उपयोग करते हुए जोड़-घटाव पर काम किया जा रहा था। शिक्षकों के लिए निर्देश था कि यदि बच्चे अभी भाषा नहीं पढ़ पा रहे हों तो शिक्षक उन्हें पढ़कर बताए। बच्चों के लिखने के लिए स्थान खाली था। जो बच्चे अभी नहीं लिख पाते हैं उनसे मौखिक जवाब सुना जाए।

जोड़ में क्रम विनिमय की समझ:

ठोस चीज़ों के साथ काम करते हुए बच्चों को क्रम विनिमय के सिद्धांत से परिचित कराएँ। उनसे इस प्रकार के सवाल पूछें-

2 पेंसिलें और 3 पेंसिलें हैं। दोनों मिलाकर कुल कितनी पेंसिलें हुईं?

3 पेंसिलें और 2 पेंसिलें हैं। दोनों मिलाकर कुल कितनी पेंसिलें हुईं?

बच्चों के साथ बात करके यह जानें कि वे अपने हल तक कैसे पहुँचे हैं। रुमित ने देखा, गणित की किताब में कुछ ऐसे उदाहरण दिए गए हैं जो बच्चों के अनुभव तथा जीवन से सम्बंधित हैं। इन सवालों को चित्र, भाषा के साथ ही गणित द्वारा भी समझाया गया है। जैसे-

सबिया ने मेले से 4 गुब्बारे खरीदे। एक गुब्बारा फूट गया। अब कितने बचे?

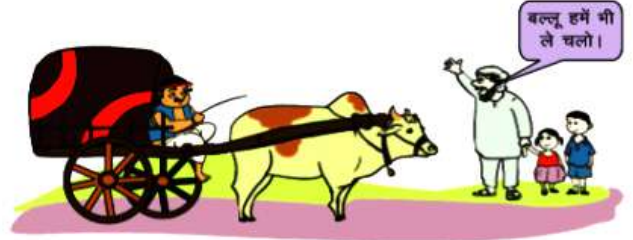
एक गुब्बारा उसने अपने भाई को दे दिया। अब कितने बचे?

असलम के पास 5 लाल पतंग और 12 पीली पतंग हैं। बताओ, उसके पास कुल कितनी पतंग हैं?



सवाल: एक डिब्बे में 15 लड्डू थे। जोसफ ने 6 लड्डू खा लिए। डिब्बे में कितने लड्डू बचे?

बल्लू अपनी बैलगाड़ी से शहर जा रहा था। रास्ते में उसे गाँव के किशन चाचा दो बच्चों के साथ मिले।



तीनों बैठ गए। अब बैलगाड़ी में कुल कितने लोग हैं?

आगे रास्ते पर 2 लोग और मिले।

पहली कक्षा में ही एक अन्य पाठ में समीकरण बनाने का तरीका बताया गया था। बैलगाड़ी में सवारियों के चढ़ने और उतरने की घटना को चित्र, भाषा और गणितीय चिह्न के उपयोग से प्रदर्शित किया गया था।

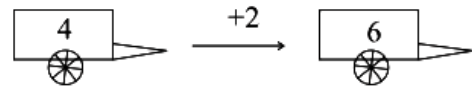


मतलब अब बैलगाड़ी में कुल 6 लोग हो गए।

किसी भाषाई कथन को चित्र रूप में और फिर गणितीय समीकरण के रूप में परिवर्तित किया गया है।

निरूपण की तरफ बढ़ रहे हैं।

जैसे $4+2=6$



Source: गणित की मजेदार दुनिया, कक्षा 2, राजस्थान

रुमित अपनी पाठ योजना पर हीरा मैडम के साथ बात कर रहा था। पुस्तक के इन पाठों के महत्त्व पर बात करते हुए हीरा मैडम ने बताया- 'बहुत से बच्चे मौखिक रूप से सवालों के जवाब दे लेते हैं, लेकिन जैसे ही उन्हें कॉपी में लिखकर हल करने को कहा जाता है, वे या तो कॉपी खाली छोड़ देते हैं या फिर गलत उत्तर लिख देते हैं।'

बच्चों को अपनी बात को मौखिक रूप से अभिव्यक्त करने के साथ ही गणितीय चिह्नों तथा संख्याओं का उपयोग करते हुए लिखना सिखाने के लिए एक शिक्षक को काफी मेहनत करनी पड़ती है। पुस्तक के पाठ और उसमें दिए अभ्यास इस दिशा में बहुत मदद करते हैं। इन पाठों पर काम करते हुए यह बहुत ज़रूरी है कि बच्चों के मौखिक जवाबों को लिखित रूप में भी दिखाया जाए। यह कौशल गणितीय निरूपण कहलाता है। इस तरह बच्चों को अपनी बात, सोच या तर्क को लिखित रूप में अभिव्यक्त करने का कौशल अर्जित करने का पर्याप्त अवसर देना चाहिए।

अगले दिन कक्षा में बच्चों के साथ काम करते हुए रुमित ने इसी तरह के कई सवाल मौखिक रूप से बच्चों से पूछे। मौखिक बातचीत के साथ ही वह बच्चों द्वारा बताए जा रहे तरीके को बोर्ड पर भी लिख रहा था। इस तरह बच्चे जोड़ और घटाने के सवालों को लिखने की व्यवस्था से भी परिचित हो रहे थे।

2.4.3 बच्चों की कुछ सामान्य चुनौतियाँ (Common Challenges of Learners)

- $27+18$ को हल करते हुए कई बच्चों का जवाब 315 आता है।
- 28 में 19 जोड़ने पर योगफल आएगा-
(a) 50 से कम (b) 317 इस सवाल में कई बच्चों का जवाब 317 आता है।
- जोड़ $27+18$ का उत्तर 45 बताते हैं। पूछा जाता है कि 7 में 8 जोड़ने पर 15 आता है, लेकिन 1 को हासिल के रूप में आगे क्यों भेजा गया है, इसका जवाब/तर्क बच्चे बता नहीं पाते हैं।
- जब बच्चों को $1234+469$ जैसे सवाल हल करने को दिए जाते हैं तो उनके जवाब इस तरह के होते हैं-

1 2 3 4		1 2 3 4
+4 6 9		+4 6 9
-----		-----
5 9 2 4		1 6 9 1 3
- $8+7= \dots +3$ जैसे सवाल को कई बच्चे हल ही नहीं करते हैं। जबकि कई बच्चे खाली जगह में उत्तर 15 लिखते हैं।
- किसी संख्या को दो अन्य संख्याओं के जोड़ के रूप में लिखा जा सकता है। जैसे कि 18 को $(0+18, 1+17, 2+16, 3+15, 4+14, 5+13, \dots, 17+1, 18+0)$ । इस तरह के सवालों को ज़्यादातर बच्चे सोच ही नहीं पाते हैं।
- ज़्यादातर बच्चे वर्टिकल जोड़ (कॉलम विधि) के सवालों को हल करते हैं, जबकि हॉरिजॉन्टल टाइप ($13+19= \dots$) के सवाल कम ही बच्चे हल कर पाते हैं।
- इबारती सवाल को पढ़ने के बाद भी समझ नहीं पाते हैं। शिक्षकों या बड़ों से पूछते हैं कि इसमें जोड़ करना है या घटाव। कई बच्चे इबारती सवालों को उनमें दिए गए कुंजी शब्दों जैसे- कुल, जोड़, मिलाना आदि की सहायता से ही हल कर पाते हैं।
- मोहन के पास 15 रुपये हैं और कविता के पास 18 रुपये हैं, तो बताओ दोनों के पास कुल कितने रुपये हैं? इस तरह के इबारती सवालों पर ज़्यादा काम होता है। अन्य प्रकार के सवालों में वे यह तय नहीं कर पाते हैं कि क्या करना है। जैसे कि एक बस में 27 बच्चे बैठे थे और अगले स्टॉप पर बस में 13 बच्चे और बैठ गए, फिर अगले स्टॉप पर बस में 7 बच्चे और बैठ गए। बताओ, अब बस में कितने बच्चे बैठे हैं?

- $27+18= 45$ के लिए इबारती सवाल नहीं सोच पाते हैं। संख्या के सवालों के लिए उपयुक्त सन्दर्भ नहीं सोच पाते हैं।
- 12 और 13 का योगफल 25 निकाल लेते हैं। यदि तुरंत ही यह पूछा जाए कि 13 और 12 का योगफल कितना होगा, तो वापस फिर से जोड़ करते हैं।
- घटाव के चिह्न (-) का अर्थ नहीं समझ पाते हैं।
- $6-0= \dots\dots\dots$ किसी संख्या से 0 को घटाने में गलती करते हैं।
- $35-27= \dots\dots\dots$ को हल करते हुए उत्तर 12 लिखते हैं। यहाँ वे इकाई में बड़ी संख्या में से छोटी संख्या घटा देते हैं।
- $36-19= \dots\dots\dots$ को हल करते हुए उत्तर 27 लिखते हैं। उनका तरीका इस प्रकार होता है।
- $200-19= 91$, इस तरह की गलतियाँ करते हैं।
- घटाने की मानक विधि के चरण याद कर लेते हैं, लेकिन उसके पीछे के तर्क को नहीं समझते हैं।
- दैनिक जीवन के सन्दर्भ पर आधारित परिस्थितियों को इन सवालों के साथ सम्बंधित कर नहीं समझ पाते हैं। शिक्षकों से पूछते हैं कि कौन-सी संक्रिया का उपयोग करना है।

$$\begin{array}{r} 16 \\ 36 \\ - 19 \\ \hline 27 \end{array}$$

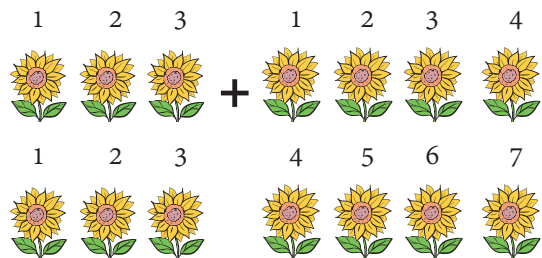
2.4.4 मौखिक सवाल-जवाब और जोड़-घटाव के तरीके (Oral Problems)

अपनी संस्था में गणित विषय में काम कर रहे साथियों के साथ बात करते हुए रुमित ने चिंता प्रकट की थी कि उसकी कक्षा (पहली और दूसरी) के बच्चों को अभी स्थानीय मान की समझ नहीं है। ऐसे में वो जोड़-घटाव कैसे सीख सकेंगे? इस सवाल के जवाब में एक साथी ने बताया कि जोड़-घटाव पर काम करने के लिए यह ज़रूरी नहीं है कि हम पहले स्थानीय मान सिखाएँ। जोड़-घटाव पर पहली कक्षा से ही काम शुरू किया जाता है। यदि बच्चों ने 1 से 10 तक गिनना सीख लिया है और वो संख्या नाम, माला और चिह्न समझने लगे हैं तो जोड़-घटाव पर काम किया जा सकता है। हम उनके गिनने के कौशलों का उपयोग करके जोड़ना-घटाना सिखा सकते हैं। रुमित को इसी मुद्दे पर आधारित एक लेख भी पढ़ने को दिया गया और इस पर बात भी की गई।

गिनने के कौशल से जोड़ के तरीके:

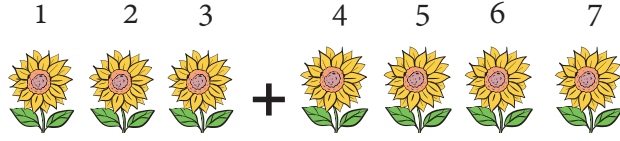
- **सभी को गिनना (Count all):** एक समूह की वस्तुओं को गिनना, फिर दूसरे समूह की वस्तुओं को गिनना। अंत में दोनों समूहों को मिलाकर बनने वाले नए समूह की वस्तुओं को गिनना।

उदाहरण: दिए गए चित्र में फूलों के समूह को देखें। यदि बच्चा पहले समूह के फूलों को गिनने के लिए एक, दो, तीन बोलता है (या मन में भी) तथा दूसरे समूह के फूलों को भी एक, दो, तीन, चार गिनता है (या मन में भी)। इसके बाद वह फूलों के इन दोनों समूहों को मिलाकर एक नया समूह बना लेता है। नए समूह के फूलों को गिनने के लिए वह दुबारा एक, दो, तीन, चार, पाँच, छह, सात तक पहुँचता है।



- **एक समूह के आगे से गिनना (Count on):** एक समूह की वस्तुओं को गिनना और इसके आगे से दूसरे समूह की वस्तुओं को गिनना।

उदाहरण: दिए गए चित्र में फूलों के समूह को देखें। यदि कोई बच्चा पहले समूह को गिनने के लिए एक, दो, तीन



बोलता है (या मन में भी) तथा दूसरे समूह के फूलों को गिनने के लिए चार, पाँच, छह और सात गिनकर कहता है कि कुल सात फूल हैं।

- **बड़े समूह के आगे से गिनना (Count on from the larger number):** दो संख्याओं में से बड़ी संख्या को मन में रखकर इसके आगे से गिनती करते हुए कुल तक पहुँचना।

उदाहरण: यदि कोई बच्चा फूलों के दोनों समूहों को देखकर यह अंदाज़ लगा सके कि एक समूह में ज़्यादा फूल हैं और दूसरे में कम। इसके बाद वह ज़्यादा समूह के फूलों को पहले ही गिन ले- एक, दो, तीन, चार तथा इसके आगे गिनती बोलकर छोटे समूह के फूल भी गिने- पाँच, छह, सात। इस तरह वह कह सके कि दोनों समूहों को मिलाने पर सात फूल होंगे।

गिनने के कौशल से घटाने के तरीके:

बच्चे घटाने के सवाल हल करते हुए गिनने के कौशल का उपयोग करते हैं। आपने देखा होगा कि घटाने के सवाल 7-5 को हल करते हुए वे पहले सात लाइन बनाकर उनमें से पाँच लाइन काट देते हैं। फिर बाकी बची लाइन गिनकर उत्तर बता देते हैं। यह एक प्रकार से घटाव करने की उनकी रणनीति है। आइए, घटाने के सवालों के उदाहरण से ऐसी कुछ रणनीतियों को समझते हैं।

रामू के खेत में छह कद्दू थे। उसने तीन कद्दू तोड़े और बेचने चला। खेत में कितने कद्दू बचे?

6-3 बराबर 3

सात हिरण तालाब से पानी पी रहे थे। चार पानी पीकर चले गए। अब कितने हिरण हैं?

7-4 बराबर



- **गिनकर निकाल लेना / गिनकर कम करना (Count out):** किसी समूह में रखी वस्तुओं में से कुछ को गिनकर निकाल लेना / कम करना। फिर बाकी बची वस्तुओं को गिन लेना। यह घटाने की बहुत ही शुरुआती अवस्था है, जहाँ बच्चे यह समझ रहे होते हैं कि किसी समूह से कुछ वस्तुएँ निकाल लेने से उस समूह की कुल संख्या कम हो जाती है।
- उदाहरण के लिए, रामू के खेत में 6 कद्दू थे। उसने 3 कद्दू तोड़ लिए। कितने बचे? हम बच्चों के सामने 6

कंकड़ रखकर उनमें से 3 निकाल लेने को कहें। फिर पूछें कि अब कितने बचे हैं? बच्चे गिनकर जवाब दें।

- **उल्टी गिनती गिनना (Count back):** बड़े समूह में से उल्टी गिनती गिनकर कुछ वस्तुएँ निकाल लेना। उदाहरण के लिए— एक प्लेट में 9 बेर रखे हैं। फरजाना से कहा गया कि वो 'चार' बेर उठा ले तथा बताए कि प्लेट में कितने बेर बचे हैं। फरजाना ने नौ से उल्टी गिनती शुरू करते हुए— नौ, आठ, सात, छह तक गिनकर चार बेर उठा लिए और फिर बोली— प्लेट में पाँच बेर बचे हैं।



- **बड़ी संख्या से छोटी संख्या तक गिनकर पहुँचना (Count down from the larger number to the smaller number):** उदाहरण के लिए 9-4 हल करने के लिए बड़ी संख्या 9 से उल्टी गिनती बोलकर छोटी संख्या 4 से पहले तक पहुँचना। जैसे— नौ, आठ, सात, छह, पाँच। यहाँ कुल पाँच संख्या नाम बोले गए हैं। अतः उत्तर है पाँच।

एक तरह से देखें तो इससे पहले के तरीके में 9-4 करने पर प्राप्त होने वाला उत्तर प्लेट में शेष बचे हुए बेर के रूप में नज़र आ रहा था। लेकिन इस तरीके से हल करते हुए कम की जाने वाली 4 वस्तुओं को प्लेट में ही रहने दिया गया है और उल्टे क्रम में संख्या नामों को बोलते हुए पाँच वस्तुएँ अपने हाथ में ले ली गई हैं।

- **छोटी संख्या से बड़ी संख्या तक गिनकर पहुँचना (Count up from the smaller number to the larger number):** छोटी संख्या से गिनती बोलते हुए बड़ी संख्या तक पहुँचना। उदाहरण- 8 कंचों के समूह से 2 कंचे लेना। यहाँ पर दो से आगे की गिनती बोलना और आठ तक पहुँचना। तीन, चार, पाँच, छह, सात, आठ। यहाँ कुल छह संख्या नाम बोले गए हैं। अतः उत्तर है छह। इस तरह 6 कंचे मिलेंगे।

रुमित ने अपनी कक्षा के बच्चों के साथ इन सभी तरीकों का उपयोग करते हुए काम किया। बच्चों को आनंद आ रहा था और वे सवाल को हल करने में रुचि ले रहे थे।

रुमित ने अभी बराबर के चिह्न (=) का उपयोग नहीं किया है। वह जोड़-घटाव (+ और -) के चिह्न पर पुख्ता समझ बन जाने के बाद ही एक और नए चिह्न (=) का उपयोग करेगा। कुछ दिन इसी तरह से काम करने के बाद भाषा और गणित के चिह्नों से बना यह गणितीय निरूपण शुद्ध रूप में गणितीय चिह्नों से ही दर्शाया जाएगा। जैसे $6-3=3$ और $7-4=3$

अगले कुछ दिनों तक इसी तरह आड़े में जोड़ और घटाव के सवाल हल करना सिखाया गया। अभी कॉलम विधि की तरफ बढ़ने की जल्दबाजी नहीं की गई। (यह विधि स्थानीय मान की अवधारणा की समझ पर आधारित है। कई सवालों में हासिल लेने-देने की स्थितियाँ बनती हैं। अतः कॉलम विधि- जिसे हम मानक

विधि भी कहते हैं, इस पर जाने से पहले स्थानीय मान पर पुख्ता काम किया जाना चाहिए।)

2.4.5 इबारती सवाल बनाना (Word Problems)

छोटी कक्षा में जोड़-घटाव पर काम करने के दौरान ही इस बात का ध्यान रखना होता है कि बच्चे भाषाई (इबारती) सवालों को मौखिक और लिखित रूप में हल करें। साथ ही पहले से बने हुए समीकरणों के लिए इबारती सवाल भी सोचें और लिखें। यह अभ्यास उन्हें गणित और भाषा के गहरे आपसी संबंधों को समझने में मदद करेगा।

फलवाले के एक ढेले में 20 तरबूज हैं और 18 खरबूजे हैं। तरबूज, खरबूज से कितने अधिक हैं?

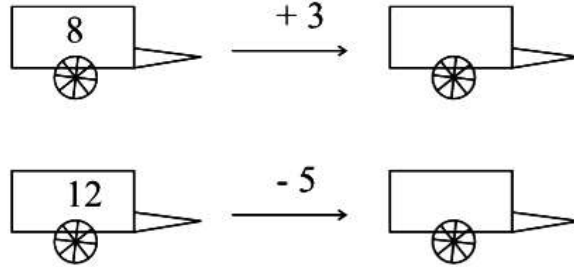


एक बस में 38 सवारियाँ थीं, कुछ और सवारियाँ चढ़ गईं। अब 52 सवारियाँ हो गईं। बताओ कितनी सवारियाँ और चढ़ीं?

Source: गणित की मजेदार दुनिया, कक्षा 2, राजस्थान

आपने देखा होगा कि कई बच्चे इबारती सवाल देखते ही अपने शिक्षक-शिक्षिका से सवाल करते हैं कि इसमें क्या करना है। जोड़ना है, घटाना है, गुणा करना है या फिर भाग करना है? एक बार उन्हें पता चल जाए कि यह संक्रिया करनी है तो वे हल कर पाते हैं। वरना सवालों को छोड़ देते हैं। ऐसा इसलिए होता है क्योंकि बच्चे भाषाई रूप में लिखे सवालों के सन्दर्भ को समझ ही नहीं पाते हैं। इसलिए ज़रूरी है कि उन्हें इबारती सवाल को समीकरण में लिखने और समीकरणों के लिए इबारती सवाल बनाने के पर्याप्त अवसर मिलें।

आज की कक्षा में रुमित ने बोर्ड पर कुछ सवाल लिखे और बच्चों से इबारती सवाल बनाने के लिए कहा। इस काम में पहले पढ़ाए जा चुके पाठ 'बैलगाड़ी की सवारी' से सवाल लिया गया। रुमित ने बोर्ड पर यह चित्र बना दिया और बच्चों से इनके लिए इबारती सवाल बनाने को कहा।



Source: गणित की मजेदार दुनिया, कक्षा 2, राजस्थान

“बैलगाड़ी में आठ सवारी बैठी थीं। तीन सवारी और आ गईं। अब ग्यारह हो गईं।” – संदीप ने कहा।

“बैलगाड़ी में आठ सवारी बैठी थीं। तीन सवारी और आ गईं। अब कितनी हो गईं?” – रुमित ने संदीप की बात को और ठीक करते हुए कहा।

“बैलगाड़ी में बारह सवारी थीं। पाँच सवारी उतर गई हैं।” – राधा ने कहा।

“नहीं सर, बैलगाड़ी में बारह सवारी थीं। आगे जाकर पाँच सवारी उतर गईं। अब कितनी बची हैं?” – राधा की बात को मुस्तकीम ने और ठीक करते हुए कहा।

अब रुमित ने इसी तरह के कुछ और सवाल बोर्ड पर लिख दिए और इनके लिए इबारती सवाल बनाने को कहा। सवाल चित्र में दिए गए हैं।

$$9 + \text{-----} = 12$$

$$8 - 5 = \text{-----}$$

आज की अपनी कक्षा से रुमित यह अंदाज़ लगा पाया कि बहुत-से बच्चे संख्याओं के सवाल हल कर पाते हैं, लेकिन कई को इबारती सवाल हल कर पाने में मुश्किल आती है। संख्याओं में लिखे सवालों

$$\text{-----} + 7 = 16$$

$$\text{-----} + \text{-----} = 12$$

के लिए इबारती सवाल सोच पाना अभी उनके लिए बहुत मुश्किल है। इस दिशा में और प्रयास करना होगा। आज कक्षा पूरी करने के बाद रुमित अपने अनुभवों को साझा करने के लिए और आगे के काम की योजना में मदद लेने के लिए कुछ देर हीरा मैडम के पास बैठा। आज की बातचीत के दौरान मैडम ने बताया कि जोड़ और घटाव के सवाल विविध किस्म के सन्दर्भों पर आधारित होते हैं। बच्चों के साथ काम करते हुए इन सन्दर्भों का ख़ास ख़्याल रखा जाना चाहिए। वरना बच्चे एक किस्म के सवाल तो हल करना सीख लेते हैं, लेकिन थोड़ी भी परिस्थिति या सन्दर्भ बदलने पर वे असहज महसूस करते हैं। जोड़ और घटाव के सन्दर्भ इस प्रकार हैं:

2.4.6 जोड़ के मायने तथा सन्दर्भ

i. **एकत्रीकरण (Aggregation):** इसे हम सरल शब्दों में दो (या दो से अधिक भी) समूहों को मिलाना कह सकते हैं।

उदाहरण 1: राकेश के पास 5 कंचे हैं और उसके दोस्त अमान के पास 7 कंचे हैं। दोनों ने अपने कंचों को मिलाकर एक डिब्बे में रख लिया है। डिब्बे में कुल कितने कंचे हैं?

उदाहरण 2: रमेश के बगीचे में 5 जामुन, 3 आम और 7 अमरूद के पेड़ हैं। बगीचे में कुल कितने पेड़ हैं?

जोड़ के सन्दर्भ हैं:

समूहों का एकत्रीकरण: रामू ने सोमवार को 17 दीपक और मंगलवार को 22 दीपक बेचे। बताइए, दोनों दिनों में कितने दीपक बेचे? (दो समूहों को मिलाना)

समूह में वृद्धि: एक पौधे की ऊँचाई 15 सेंटीमीटर थी। एक सप्ताह में 3 सेंटीमीटर बढ़ गई। बताओ, अब पौधे की ऊँचाई कितनी है? (समूह में वृद्धि)

पहले उदाहरण में कंचों के दो समूह हैं, जिन्हें मिलाकर एक बड़ा समूह बन रहा है। इस प्रक्रिया का गणितीय निरूपण होगा— राकेश के 5 कंचे और अमान के 7 कंचे

$$5 \text{ कंचे} + 7 \text{ कंचे} = \text{.....}$$

$$5+7 = \text{.....}$$

जबकि दूसरे उदाहरण में पेड़ों के तीन समूह हैं, जिन्हें मिलाकर एक बड़ा समूह बनाया जा रहा है—

$$5 \text{ जामुन के पेड़} + 3 \text{ आम के पेड़} + 7 \text{ अमरूद के पेड़} = \text{.....}$$

$$5+3+7 = \text{.....}$$

जोड़ के सवाल पर ध्यान दिलाते हुए हीरा मैडम ने कहा- 'किसी के मन में यह प्रश्न आ सकता है कि यहाँ पर

पेड़ों के तीन समूह हैं, तो फिर हम इसे तीन समूहों को मिलाना क्यों नहीं कह रहे हैं। जोड़ की अवधारणा पर गौर करेंगे तो हम पाएंगे कि समूह कितने भी क्यों न हों (दो से लेकर अनंत तक), लेकिन हम एक समय में दो ही समूहों का जोड़ करते हैं। इसीलिए इस प्रकार के सन्दर्भों पर आधारित सवालों को दो समूहों को मिलाना कहा जाता है।’

ii. वृद्धि (Augmentation): सरल शब्दों में हम इसे समूह में वृद्धि कह सकते हैं।

उदाहरण 1: एक दिन गुलाब के पौधे में 3 फूल खिले थे। दूसरे दिन 2 फूल और खिल गए। अब कुल कितने फूल खिले हैं?

उदाहरण 2: अभी गोलू की उम्र 7 साल है। अब से 4 साल बाद गोलू की उम्र कितनी हो जाएगी?



Source: गणित की मजेदार दुनिया, कक्षा 1, राजस्थान

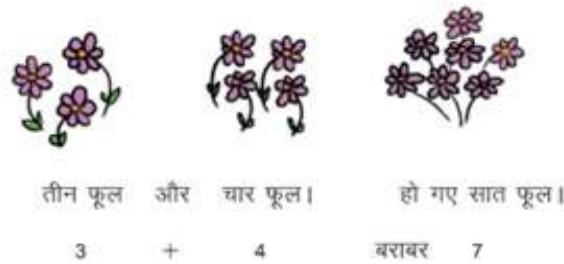
‘इन सवालों में दो समूहों को मिलाना नहीं हो रहा है, बल्कि एक ही समूह है, जिसमें वृद्धि हो रही है। वृद्धि होने के ऐसे सन्दर्भ आगे की कक्षाओं में बहुत काम आते हैं।’ हीरा मैडम ने बताया।

एकत्रीकरण और वृद्धि

जोड़ के इबारती सवाल बनाते समय हम बच्चों के दैनिक जीवन से जुड़े कई तरह के अनुभवों को शामिल कर सकते हैं। इन इबारती सवालों को लेकर बच्चों के साथ मौखिक सवाल-जवाब के पर्याप्त अवसर बनाए जाने चाहिए। कक्षा में बच्चे मनगणित (Mental Maths) करें और बोलकर अपने-अपने तरीके भी बता सकें। हमें उनके द्वारा उपयोग किए जा रहे सन्दर्भों की तरफ भी उनका ध्यान दिलाना होगा।

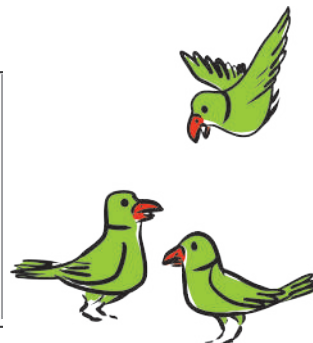
जोड़ के इबारती सवालों को उनके सन्दर्भ के आधार पर मुख्यतः दो वर्गों में बाँटकर देखा जाता है। पहला, समूहों का एकत्रीकरण (Aggregation) और दूसरा, समूह में वृद्धि (Augmentation)। यहाँ दिए गए चित्रों को ध्यान से देखिये।

चित्र 1: यहाँ पर फूलों के दो समूहों का एकत्रीकरण किया जा रहा है। पहले समूह में 3 फूल हैं और दूसरे समूह में 4 फूल हैं। दोनों समूहों के एकत्रीकरण (Aggregation) के बाद एक नया समूह बन रहा है, जिसमें कुल 7 फूल हैं।



चित्र 2: यहाँ पर पक्षियों का एक समूह है। इस समूह में पहले से 2 तोते हैं। कुछ देर बाद 1 और तोता आकर इसी समूह का हिस्सा बन जा रहा है। इस तरह के सन्दर्भ को हम ‘समूह में वृद्धि’ (Augmentation) कहते हैं।

दो छोटे तोते
चुग रहे थे दाना
एक और आ गया
कितने हुए बताना



प्राथमिक कक्षाओं में दोनों ही स्थितियों में संख्यात्मक रूप से जोड़ करते समय प्रक्रिया एक जैसी ही रहती है। पहले चित्र के लिए जोड़ करते समय $3+4=7$ और दूसरे चित्र के लिए $2+1=3$ लिखा जाएगा। अभी इन सवालों के गणितीय निरूपण में कोई फ़र्क नहीं है, लेकिन सन्दर्भों में निहित अंतर की तरफ बच्चों का ध्यान दिलाना आवश्यक है। आमतौर पर पाठ्यपुस्तकों में और कक्षा-कक्ष में काम करते हुए शिक्षकों द्वारा भी 'समूहों के एकत्रीकरण' से जुड़े सन्दर्भों पर आधारित इबारती / चित्रात्मक सवाल ज़्यादा आ जाते हैं, जबकि 'समूह में वृद्धि' से जुड़े सन्दर्भ पर आधारित इबारती / चित्रात्मक सवाल छूट जाते हैं। हमें दोनों ही सन्दर्भों पर छोटी कक्षाओं से ही ध्यान देना चाहिए।

इबारती सवालों में निहित विविध सन्दर्भों के साथ काम करते हुए बच्चों को मिलने वाले ये अनुभव और चिंतन ऊपर की कक्षाओं में आने वाली कुछ महत्वपूर्ण अवधारणाओं के लिए एक मजबूत आधार तैयार करते हैं। उदाहरण के लिए इन दोनों कथनों को देखिए:

- लालाराम जी के वेतन में इस वर्ष 10 प्रतिशत की वृद्धि हुई है। उनका वेतन 50,000 रुपये प्रतिमाह है। बताओ, लालाराम जी के वेतन में कितने रुपयों की बढ़ोत्तरी होगी?
- इस कमीज का मूल्य 350 रुपये है। दुकानदार इस कमीज की खरीद पर 20 प्रतिशत की छूट दे रहा है। बताओ, यह कमीज कितने रुपये देकर खरीदी जा सकती है?

इन दोनों ही सवालों में प्रतिशत की अवधारणा का उपयोग किया जा रहा है। इसके आधार पर ही हम लालाराम जी के वेतन में वृद्धि और कमीज की कीमत में कमी की गणना कर पा रहे हैं। इन दोनों ही सन्दर्भों पर यदि आप गौर से विचार करें तो पाएंगे कि यह असल में 'समूह में वृद्धि' (या समूह में ह्रास) के सन्दर्भ पर ही आधारित है।

नीचे दिए गए चित्रों को ध्यान से देखिए। यह पहली कक्षा की पाठ्यपुस्तक से लिए गए हैं। बताइए, इनमें से कौन-से 'समूहों के एकत्रीकरण' और कौन-से 'समूह में वृद्धि' के सन्दर्भ पर आधारित हैं?



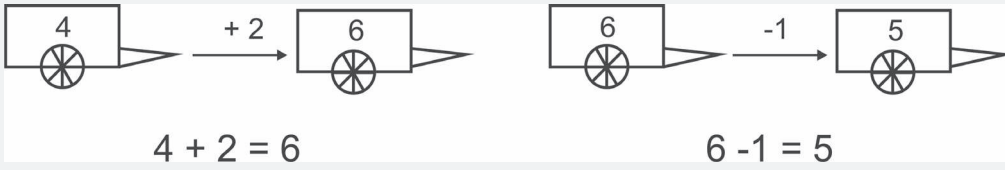
इन इबारती सवालों को पढ़िए। बताइए, कौन-से 'समूह के एकत्रीकरण' और कौन-से 'समूह में वृद्धि' पर आधारित हैं? क्या कुछ सवाल ऐसे भी हैं जो इन दोनों ही वर्गों का हिस्सा नहीं बनाए जा सकते हैं?

1. नेहा ने एक माला में 5 गुलाब के, 4 चमेली के और 7 गेंदे के फूल पिरोए। उसने माला में कितने फूल पिरोए?
2. जीनत के पास 29 कंचे हैं। कितने कंचे और मिलाने पर उसके पास 43 कंचे हो जाएंगे?

3. बस स्टैंड पर 10 बसें खड़ी हैं। कुछ देर में 5 बसें और आ गईं। अब कितनी बसें हो गईं?
4. एक डिब्बे में 10 लाल कंचे व 5 हरे कंचे हैं। दूसरे डिब्बे में 15 लाल कंचे व 20 हरे कंचे हैं। यदि हम दोनों डिब्बों के कंचे तीसरे खाली डिब्बे में रखते हैं तो बताओ, कितने लाल व हरे कंचे होंगे?
5. पिताजी ने रामू को कुछ रुपये दिए। माँ ने उसे 31 रुपये दिए। अब उसके पास 82 रुपये हो गए। पिताजी ने उसे कितने रुपये दिए थे?
6. एक थैली में 99 सफ़ेद और काले रंग के पत्थर हैं। उनमें से 37 पत्थर काले हैं, तो सफ़ेद पत्थर कितने हैं?

दैनिक जीवन के संदर्भ से गणितीय निरूपण तक

बच्चों के साथ काम करते हुए दैनिक जीवन के सन्दर्भ पर बातचीत करें। उनके अनुभव में शामिल जोड़ने या घटाने के सन्दर्भ पर मौखिक सवाल पूछें। उनसे उनके जवाबों का तर्क जानें। इबारती सवालों पर चित्रों द्वारा जवाब देने के तरीके समझाएँ। फिर इन्हीं चित्रों की सहायता से संख्याओं और संकेतों का उपयोग करना भी बताएँ। इस उदाहरण में बैलगाड़ी में सवारियों के चढ़ने और उतरने का सन्दर्भ दिया गया है। फिर चित्र और संख्याओं के उपयोग से जोड़/घटाव किया जा रहा है। और अंत में सिर्फ संख्या और चिह्नों द्वारा गणितीय निरूपण किया जा रहा है। इस उदाहरण को हम ELPS सिद्धांत से जोड़कर समझ सकते हैं।



2.4.7 घटाव के मायने तथा सन्दर्भ

इसी क्रम में घटाव के सवालों पर भी बात हुई। हीरा मैडम ने बताया कि घटाव के सवाल चार सन्दर्भों पर आधारित होते हैं:

क- हिस्से करना (Partitioning): समूह से कुछ चीज़ों को निकालने या हटाने तथा समूह में बची हुई चीज़ों की संख्या पता करने की क्रिया।

उदाहरण: एक पेड़ पर 5 चिड़िया बैठी थीं, 2 चिड़िया उड़ गईं तो कितनी बचीं?

ख- कमी मालूम करना (Depreciation): ऐसी स्थितियाँ भी संभव हैं कि जब हमें यह मालूम हो कि शुरू में कुल मात्रा कितनी

घटाने के सन्दर्भ हैं-

हिस्से करना: रफ़ीक ने अपने बाग के पेड़ से 53 आम तोड़े। उनमें से 36 आम दोस्तों में बाँट दिए। रफ़ीक के पास कितने आम बचे?

कमी मालूम करना: गीता के पास 12 टॉफियाँ थीं। उसने कुछ टॉफी करीम को दे दी। अब उसके पास 7 टॉफियाँ बचीं। उसने कितनी टॉफियाँ करीम को दी हैं?

तुलना करना: भोलू के पास 72 रुपये हैं और गोपाल के पास 66 रुपये हैं। बताओ, गोपाल के पास भोलू से कितने रुपये कम हैं?

पूरक जोड़: जीनत के पास 29 कंचे हैं। कितने कंचे और मिलाने पर उसके पास 45 कंचे हो जाएंगे?

थी। इसमें से कुछ मात्रा कम हो गई। अब हमें शेष बची मात्रा के बारे में भी मालूम है। हमें यह ज्ञात करना होगा कि शुरु की कुल मात्रा में से कितना कम हुआ है।

उदाहरण: एक पेड़ पर 5 चिड़िया बैठी हैं, कुछ देर बाद सिर्फ़ 3 चिड़िया बैठी रह गई हैं, तो कितनी चिड़िया उड़ गई?

ग- तुलना (Comparison): इस तरह की परिस्थिति में दो समूहों में रखी वस्तुओं में वास्तव में न कुछ कम होता है और न ही कुछ नया जुड़ता है। लेकिन दोनों समूह की वस्तुओं में तुलना की जाती है कि एक समूह में दूसरे के मुकाबले कितना कम या ज़्यादा है।



उदाहरण- एक पेड़ पर 5 चिड़िया बैठी हैं और दूसरे पेड़ पर 3 चिड़िया बैठी हैं। बताओ, दूसरे पेड़ पर पहले पेड़ से कितनी कम चिड़िया बैठी हैं?

घ- पूरक जोड़ (Complimentary addition): इस तरह की परिस्थिति में किसी एक समूह में कुछ चीज़ें और मिलाकर उसे दूसरे समूह के बराबर लाना होता है।

उदाहरण: एक पेड़ पर 3 चिड़िया बैठी हैं और दूसरे पेड़ पर 5 चिड़िया बैठी हैं। बताओ, पहले पेड़ पर कितनी चिड़िया और आ जाएँ कि दोनों पेड़ों पर बराबर चिड़िया हो जाएँ?

रुमित के लिए यह सब बहुत नई किस्म की जानकारी थी। अपने स्कूली दिनों में उसने यह सब नहीं पढ़ा था। हीरा मैडम ने बताया कि इस तरह की जानकारी हमें सीधे बच्चों को नहीं बतानी चाहिए। एक सूचना के रूप में यह उनके लिए किसी काम की नहीं है। लेकिन एक गणित शिक्षक/शिक्षिका को यह ज़रूर मालूम होना चाहिए। तभी वह अलग-अलग किस्म के सन्दर्भों पर आधारित सवाल बना सकेगा और पाठ्यपुस्तक में दिए सवालों की उपयोगिता को समझ पाएगा। रुमित ने अपनी डायरी में यह सब जानकारी लिख ली। आगे जब कभी वह जोड़-घटाव के इबारती सवाल देखता या बनाता था तो इन बातों का ख्याल रखता था।

2.4.8 आड़े में लिखे जोड़-घटाव के सवाल

आज हीरा मैडम कक्षा 2 को पढ़ा रही थीं। रुमित को बैठकर उनकी कक्षा देखनी है। मैडम ने बोर्ड पर एक जोड़ तथा एक घटाव का सवाल लिख दिया। सभी बच्चे अपनी कॉपी में हल करने लगे। हमेशा की तरह रमेश, कविता और भानू प्रताप अपनी कॉपी में लाइन बनाकर जोड़ करने लगे थे। रोली, पिकी, गोविन्द अपनी उंगलियों की पोर गिन रहे थे। राधा कक्षा में बंधी हुई मोतीमाला के पास चली गई थी। उसने पहले सत्रह मोती गिने, फिर आठ मोती गिने। इन दोनों समूहों को मिला लिया। एक बार फिर सारे मोती गिन लिए। इस तरह गिनने के बाद राधा ज़ोर से बोली— मैडम पच्चीस आएगा।

$$20 - 8 = \square$$

$$17 + 8 = \square$$

सायरा ने जोड़ के लिए लाइन बनाकर उन्हें गिन लिया था। अब वह इसी तरीके से घटाना कर रही थी। बीस लाइन बनाने के बाद उसने आठ लाइनों को काट दिया था और शेष बची लाइनों को गिन लिया था। इस तरह उसका उत्तर 12 आया था।

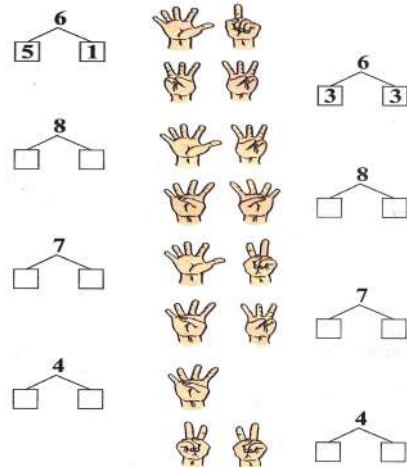
हीरा मैडम ने कक्षा में घूमकर सभी की कॉपी देख ली। बच्चे अपनी-अपनी तरह से जोड़ और घटाव करने का प्रयास कर रहे थे। उन्होंने रुमित को बताया कि बच्चों को अपने तरीके से हल करने की आज़ादी देनी चाहिए। सवाल को हल करने के साथ ही यह भी ज़रूरी है कि वे सवाल को हल करने का तरीका खोज सकें।

‘आपने सभी सवाल आड़े में क्यों लिखे हैं?’ – रुमित ने पूछा।

“अभी बच्चों ने स्थानीय मान नहीं सीखा है। कॉलम में जोड़-घटाव लिखने से वो भ्रमित होंगे। पहली से दूसरी कक्षा तक बच्चों को अपने तरीके से जोड़-घटाव करने देना चाहिए। ज़्यादा काम मौखिक यानी इबारती सवाल द्वारा किए जाने चाहिए। या फिर इस तरह के आड़े में लिखे जोड़-घटाव पर अभ्यास कराना चाहिए।” – हीरा मैडम ने कहा।

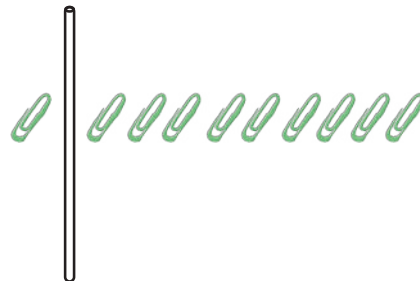
2.4.9 टीएलएम द्वारा जोड़-घटाव

अपनी उंगलियाँ: एक अभ्यास में देखा गया कि बच्चे जोड़-घटाव करते हुए अपनी उंगलियों का उपयोग कर रहे थे। इस तरीके का इस्तेमाल कक्षा में भी किया जाना चाहिए। बच्चे अपनी उंगलियों द्वारा ‘जोड़ तथ्य’ और ‘घटाव तथ्य’ पर पक्की समझ बना सकते हैं। उदाहरण के लिए 5 और 1 का जोड़ 6 होता है। इसी तरह 3 और 3 का जोड़ भी 6 होता है। हम बच्चों से पूछ सकते हैं कि अपनी उंगलियों का इस्तेमाल करके वे कितने तरीकों से 6 दर्शा सकते हैं।



Source: गणित की मज़ेदार दुनिया, कक्षा 2, राजस्थान

यहाँ 10 पेपर क्लिप्स के बीच में स्ट्रॉ रखी गई है। चित्र से $1+9=10$ समझ सकते हैं। इसी तरीके से 10 के सभी जोड़ तथ्य बनाए जा सकते हैं: $2+8=10$, $3+7=10$, $4+6=10$ आदि। ऐसे कई अभ्यास पहली कक्षा में किए जाने चाहिए।



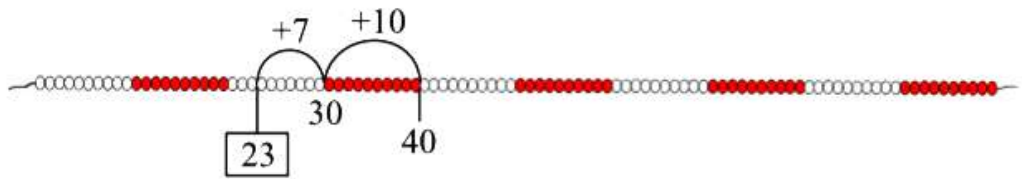
Source: गणित की मज़ेदार दुनिया, कक्षा 3, राजस्थान

मोतीमाला और संख्या कार्ड: मोतीमाला का उपयोग गिनती सीखने के लिए किया गया था। इसी माला पर हमें बच्चों को जोड़-घटाव के सवाल भी हल करने का अवसर देना चाहिए।

उदाहरण के लिए, कक्षा में गतिविधि करते हुए हीरा मैडम ने 1 से 100 तक की संख्याओं के संख्या कार्ड रख

दिए। आज वे जोड़-घटाव पर काम कर रही थीं। 'आदिल, तुम मोतीमाला पर तेईस का संख्या कार्ड टांगो' उन्होंने आदिल से कहा। आदिल ने सामने रखे कार्डों में से 23 को पहचान कर उठाया। फिर मोतीमाला पर उतने ही मोती गिनकर सही जगह पर कार्ड टांग दिया।

इस तरह मैडम ने आदिल की संख्या नाम जानने, संख्या कार्ड पहचानने और उसकी मालात्मक समझ का आकलन कर लिया था। अब आगे 23 में 17 का जोड़ करना था। 'अब यदि तेईस में और सबह मोती मिलाए जाएँ तो कितने होंगे? संख्या कार्ड टांगकर दिखाओ।' - हीरा मैडम ने आगे कहा। इस बार आदिल ने 23 के आगे पहले 7 मोती मिलाए। वह 30 पर पहुँच गया। फिर उसने 10 मोती और मिला दिए। इस तरह वह 23 और 17 का जोड़ करके 40 पर पहुँच गया। हम देख सकते हैं कि आदिल के मन में चालीस की मात्रा तक पहुँचने के पीछे का चिंतन इस प्रकार रहा है: $23+7+10=40$ ।

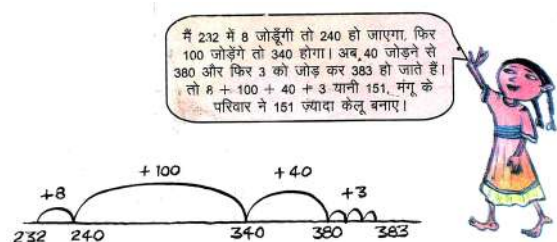


संभव है, अन्य बच्चे किसी और तरीके से इसी समस्या को हल करें। ऐसी ही कुछ और गतिविधियाँ करने के लिए कुछ और सवाल पुस्तक में दिए गए थे। हीरा मैडम ने बताया कि मोतीमाला की सहायता से किए जाने वाले इन सवालों की मदद से बच्चे ऐसे कौशल विकसित कर पाते हैं जिससे वे मोतीमाला के बिना भी जोड़-घटाव कर सकते हैं। असल में मोतीमाला एक किस्म की संख्या रेखा है। संख्या रेखा की अवधारणा पर पक्की समझ के उपयोग से संख्याओं को तोड़ने-जोड़ने की समझ बन पाती है।

$$\boxed{48} - 19 =$$



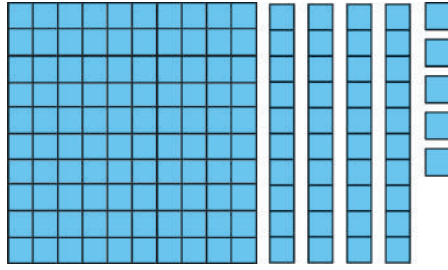
संख्या रेखा पर कूद-फांद: इसी क्रम में संख्या रेखा पर कूद का तरीका उन्हें जोड़-घटाव करने में मददगार होता है। इस उदाहरण में 383 में से 232 घटाना है। मेथी ने संख्या रेखा पर 232 से आगे की कूद को अपना तरीका बनाया है। वह संख्या रेखा पर कूदते हुए $8+100+40+3$ को मिलाकर 151 बता पा रही है।



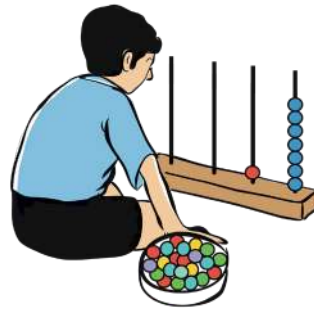
रुमित ने अगले कुछ दिन अपनी कक्षा में भी कंकड़, कंचे, हाथ की उंगलियाँ, मोतीमाला और संख्या रेखा पर कूद जैसे तरीकों का उपयोग करते हुए जोड़-घटाव सिखाने पर काम किया। ये तरीके बच्चों के लिए नए थे, अतः वे काफी रुचि से सवालों को हल करने में भागीदारी करते थे।

2.4.10 स्थानीय मान की अवधारणा तथा डीन्स ब्लॉक का उपयोग (Using Dienes Block)

एक दिन जब रुमित स्कूल पहुँचा तो हीरा मैडम कक्षा 2 के बच्चों के साथ जोड़-घटाव पर काम करने के दौरान एक नया टीएलएम इस्तेमाल कर रही थीं। रुमित ने यह टीएलएम पहले कभी नहीं देखा था। मैडम ने बताया कि यह टीएलएम उन्होंने अपने हाथों से बनाया है। इसे डीन्स ब्लॉक कहते हैं और यह दशमिक संख्या पद्धति पर आधारित है। इसका इस्तेमाल संख्याएँ बनाने, जोड़, घटाव और गुणा-भाग में भी किया जाता है। रुमित ने बताया कि बचपन में उसने अबेकस का इस्तेमाल किया है, लेकिन यह नई सामग्री उसने पहले कभी नहीं देखी थी।



हीरा मैडम ने रुमित को एक जोड़ का सवाल $17+8= \dots\dots$ हल करने को कहा। रुमित ने मौखिक जोड़ करके ही बता दिया कि $17+8= 25$ होता है। अब मैडम ने यही सवाल हल करने के लिए अबेकस दिया। अबेकस में सबसे दाहिनी छड़ को इकाई, इसके बाद एक बाईं ओर दहाई और इसके बाद सैकड़ा माना जाता है। किसी भी छड़ में अधिकतम 9 मोती ही पिरोए जा सकते हैं। दस मोती होने पर उनका एक समूह बन जाता है— दस इकाइयों से मिलकर एक दहाई, दस दहाइयों से मिलकर एक सैकड़ा आदि। रुमित ने इकाई की छड़ में 7 मोती और दहाई की छड़ में 1 मोती पिरो दिया। दहाई की छड़ में पिरोया यह एक मोती असल में 1 दहाई दर्शाता है। इस तरह 17 की मात्रा दर्शा दी।



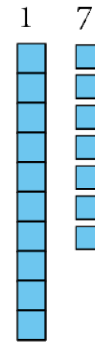
‘यह कितना बन गया?’— हीरा मैडम ने सवाल किया।

‘सलह’— रुमित ने कहा।

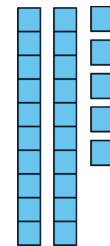
‘और इसमें मोती कितने दिख रहे हैं?’

‘एक मोती और सात मोती.... कुल आठ मोती हैं।’— रुमित ने कहा।

‘हाँ, लेकिन बच्चों के लिए यह एक समस्या बन गई। सलह को समझने के लिए ज़रूरी है कि वे सलह चीज़ों की मात्रा को समझें, साथ ही 17 लिखने के तरीके से भी इसका सम्बन्ध बना पाएँ।’— हीरा मैडम ने समझाया।



इसी समस्या के समाधान के लिए डीन्स ने डीन्स ब्लॉक का निर्माण किया था। हम चार्ट पेपर पर चौखाने बनाकर इकाई, दहाई और सैकड़ा बना सकते हैं। यह कहते हुए हीरा मैडम ने रुमित को अपने हाथों से बनाया हुआ डीन्स ब्लॉक दिखाया। उन्होंने एक दहाई और सात इकाइयों को स्थानीय मान की व्यवस्था में रखकर 17 बनाकर भी दिखाया। अब रुमित की बारी थी। उसे $17+8= 25$ होता है, यह प्रक्रिया डीन्स ब्लॉक की मदद से दिखानी थी। रुमित ने पहले 17 बनाया। फिर इसे हटाकर 25 बना दिया।

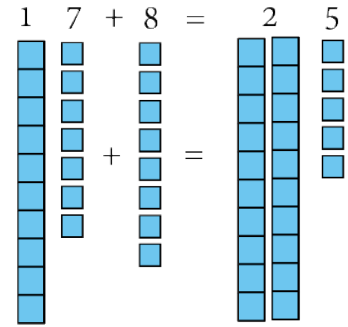


‘यह जोड़ कहाँ हुआ? तुमने तो 17 की जगह 25 बना दिया है, बस’— हीरा मैडम ने हँसते हुए कहा। रुमित समझ नहीं पाया कि हीरा मैडम क्या कहना चाह रही हैं। अतः मैडम ने खुद जोड़ का यह सवाल करके

दिखाया। 'हमारा सवाल है $17+8= \dots\dots\dots$, यहाँ दो समूह हैं। एक समूह में सत्रह चीज़ें हैं और दूसरे समूह में आठ चीज़ें हैं।

हमें दोनों समूहों को जोड़ना है, यानी दोनों समूहों को मिलाना है। इस तरह एक नया समूह बनेगा। मौखिक गिनती की मदद से हम जानते हैं कि $17+8= 25$ होता है। यही काम अब सामग्री की सहायता से करते हैं। स्थानीय मान के अनुसार 17 और 8 को प्रदर्शित कर सकते हैं।

हमारे पास 17 में 1 दहाई और 7 इकाइयाँ हैं और इनमें 8 इकाइयाँ और जोड़नी हैं। इन्हें जोड़ने के दौरान हम सबसे पहले इकाई में इकाई का जोड़ करते हैं। 7 इकाई और 8 इकाई मिलाकर 15 इकाई बनाते हैं। इन 15 इकाइयों को भी 1 दहाई और 5 इकाई के रूप में रख सकते हैं। इकाई को इकाई के स्थान पर और दहाई को दहाई के स्थान पर रखना होगा। इस 1 नई दहाई को उठाकर हम दहाइयों के साथ रखेंगे। इस तरह 2 दहाई और 5 इकाई बनेंगी। इस तरह 25 बनेगा।



हीरा मैडम ने कहा कि इसी सवाल को मानक विधि के अनुसार भी हल कर सकते हैं। मानक विधि में संख्याओं को स्थानीय मान के अनुसार कॉलम में लिखना होता है। इकाई, दहाई, सैकड़ा और हज़ार के स्थान निर्धारित हैं। संख्या 17 में 1 दहाई तथा 7 इकाइयाँ हैं। अतः इकाइयों को इकाई के स्थान पर और दहाई को दहाई के स्थान पर लिखा गया है। इसी तरह 8 इकाइयों को भी इकाई के लिए निर्धारित स्थान पर लिखा गया है। वास्तव में यह भी 17 और 8 वस्तुओं के समूहों को मिलाना (एकलीकरण) है। लेकिन स्थानीय मान की सहायता से हम इस काम को चरणों में करते हैं।

- **चरण 1:** हम छोटी इकाइयों को पहले एकत्रित करेंगे। ऐसा इसलिए ज़रूरी है क्योंकि संभव है कि एकलीकरण के बाद छोटी इकाइयाँ मिलकर कोई बड़ी इकाई बना लें। जैसे- इसी सवाल में 7 इकाई और 8 इकाई को मिलाकर 15 इकाइयाँ बन जाएंगी।
- **चरण 2:** स्थानीय मान के नियम के अनुसार दस इकाइयों को मिलकर हमें 1 दहाई बनानी होगी और 5 इकाइयाँ बची रहेंगी। संख्या के रूप में इसे हम 15 लिखते हैं। अब हम जानते हैं कि दहाई के लिए निर्धारित स्थान और इकाई का निर्धारित स्थान अलग-अलग है। तो 5 इकाइयों को तो इकाई के स्थान पर रहने दिया जाएगा, लेकिन 1 दहाई को हासिल के रूप में ऊपर रखना होगा। हासिल का अर्थ होता है- प्राप्त होना। हम कह सकते हैं कि इकाइयों के एकलीकरण की प्रक्रिया से हमें एक नई दहाई प्राप्त हुई है।
- **चरण 3:** दहाई के स्थान पर देखें तो एक दहाई पहले से थी और एक नई दहाई और प्राप्त हो गई है। इस प्रकार 2 दहाइयाँ बन गई हैं। इसे हम उत्तर में नीचे दर्ज कर देंगे। इस प्रकार 25 मिलेगा।

$$\begin{array}{r}
 \text{H T O} \\
 17 \\
 + 8 \\
 \hline
 25
 \end{array}$$

2.4.11 मानक विधि से जोड़-घटाव (Using Standard Algorithm)

हीरा मैडम द्वारा बताई जा रही ये सब बातें रुमित को बहुत रोचक लग रही थीं। जोड़-घटाव और इन पर आधारित सवाल तो वह बहुत दिनों से करता आ रहा है, लेकिन इन सवालों को इसी तरह क्यों करते हैं? या

जोड़-घटाव को हमेशा दाहिनी तरफ से ही क्यों हल करना शुरू करते हैं? इन सब सवालों के बारे में उसने इस तरह से कभी नहीं सोचा था। न ही स्कूल में ऐसे पढ़ाया गया था।

रमित ने ऐसा ही एक सवाल स्वयं करने की इच्छा प्रकट की। हीरा मैडम ने तीन अंकों की संख्या में दो अंकों की संख्या का जोड़ वाला एक सवाल रमित की कॉपी में लिख दिया। रमित ने इसे पहले अपने तरीके (मानक विधि) से हल किया— ‘सात और आठ मिलकर पंद्रह नीचे लिखा पाँच, हासिल मिला एक एक, ज़ीरो और चार मिलकर हुआ पाँच और दो ... दो सौ पचपन’।

$$\begin{array}{r} 207 \\ + 48 \\ \hline \end{array}$$

हीरा मैडम पास खड़ी सुन रही थीं। उन्होंने कहा कि उत्तर तो सही आया है, लेकिन तुमने मन-ही-मन क्या किया है, यह भी समझाओ। रमित ने अपनी कॉपी पर कुछ खाने बनाए और इकाई, दहाई, सैकड़ा का स्थान निर्धारित किया। फिर संख्या 207 और 48 को इसी निर्धारित स्थान के अनुरूप लिख लिया।

रमित ने जोड़ की प्रक्रिया को दर्शाने के लिए डीन्स ब्लॉक की सहायता ली।

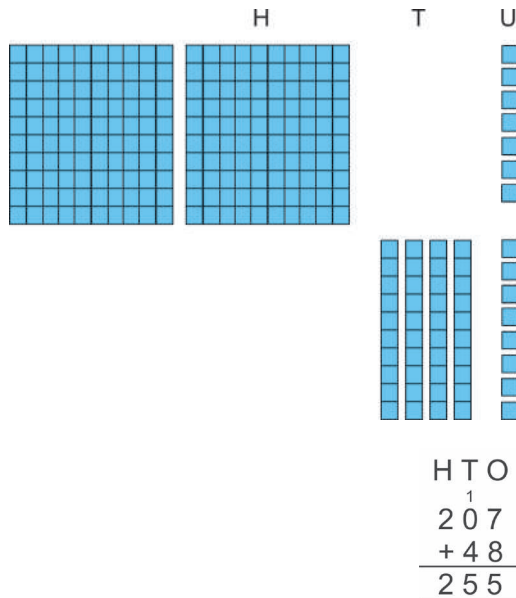
चरण एक: 7 और 8 इकाइयाँ मिलाने पर 1 दहाई और 5 इकाई प्राप्त हुए। 5 इकाई को नीचे लिखा और 1 दहाई को हासिल के रूप में रख लिया।

चरण दो: 1 दहाई, 0 दहाई और 4 दहाई मिलकर 5 दहाई बन गए।

चरण तीन: 2 सैकड़ा पहले से ही मौजूद है।

इस प्रकार 2 सैकड़ा + 5 दहाई + 5 इकाई बन गए।

स्थानीय मान के अनुसार दाशमिक संख्या पद्धति में 255 मिलेगा।

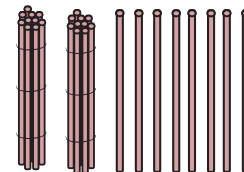


रमित का समझाने का तरीका अच्छा था। हीरा मैडम ने उसकी तारीफ की, साथ ही एक नया जोड़ का सवाल (28+15=) मानक विधि से हल करने को कहा। इस बार मैडम ने रमित को ढेर सारी आइसक्रीम की तीलियाँ दीं। इन तीलियों से भी इकाई, दहाई और सैकड़ा बनाया जा सकता है।

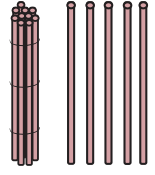
दूसरी और तीसरी कक्षा की किताब में समूहीकरण पर आधारित अभ्यासों में ऐसी ही खुली तीलियों, बण्डलों और गट्टरों का उपयोग किया गया है। इन अभ्यासों द्वारा बच्चे दाशमिक संख्या पद्धति में निहित स्थानीय मान की व्यवस्था को समझते हुए संख्या बनाते हैं।

जोड़ का सवाल:

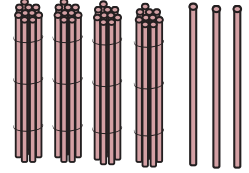
रमित ने 10-10 तीलियों के बण्डल बना लिए तथा उन्हें रबर से बांध दिया। फिर चॉक से फर्श पर लिखकर इकाई, दहाई और सैकड़ा की जगह निर्धारित कर ली। उसने 28 के लिए 2 बण्डल और 8 खुली तीलियाँ (2 दहाइयाँ और 8 इकाइयाँ) रख दीं। तथा 15 के लिए 1 बण्डल और 5 खुली तीलियाँ (1 दहाई और 5



इकाइयाँ) रख दीं। तीलियों द्वारा किया गया हल इस प्रकार था:



चरण 1: सबसे पहले उसने इकाइयों को मिला लिया। इस तरह 8 इकाइयों और 5 इकाइयों को मिलाने से कुल 13 इकाइयाँ बन गईं।



चरण 2: यहाँ 13 इकाइयों को 1 दहाई (10 तीलियों का नया बण्डल बन गया) और 3 इकाइयों में बदल लिया गया।

चरण 3: नीचे उत्तर के लिए निर्धारित स्थान में इकाई के लिए 3 लिखा गया। प्राप्त हुई 1 नई दहाई को 1 हासिल के रूप में लिखा गया।

$$\begin{array}{r} \text{द. इ.} \\ 1 \\ 28 \\ + 15 \\ \hline 3 \end{array}$$

चरण 4: अंत में दहाइयों को भी एकत्रित किया गया। हासिल से प्राप्त 1 और पहले से उपलब्ध 3 दहाई (28 से मिली 2 दहाई और 15 से मिली 1 दहाई मिलकर) मिलाकर 4 दहाइयाँ हुईं। इस तरह उत्तर में 4 दहाई और 3 इकाई मिला। कुल संख्या बनी 43।

अब रुमित तीली-बण्डल और डीन्स ब्लॉक दोनों ही सामग्री को उपयोग करने का तरीका समझ चुका था। उसने स्वयं को आजमाने के लिए एक और उदाहरण घटाने के सवाल (20-8=) का लिया। उसने देखा था कि पहली कक्षा के बच्चे इस तरह के सवाल को लाइन बनाकर और उंगलियों की पोर गिनकर कर रहे थे। अब रुमित इसी सवाल को मानक विधि से हल करने के साथ ही डीन्स ब्लॉक का उपयोग कर प्रक्रिया को दर्शाने जा रहा था।

रुमित ने अपनी कॉपी पर मानक विधि द्वारा 20-8 को हल कर दिया। अब इसी सवाल को डीन्स ब्लॉक की मदद से समझाने का प्रयास किया। संख्या 20 के लिए 2 दहाइयाँ रखीं और इसके नीचे 8 इकाइयाँ रख दीं।

मैडम ने रुमित को टोका- ‘यह क्या कर रहे हो? तुम्हे 20 में से ही 8 घटाना है। यानी 20 में से ही 8 निकाल कर शेष बची हुई मात्रा को दर्शाना है। जोड़ में दो समूहों को मिलाना होता है, अतः हमें दो समूह दर्शाना भी पड़ता है। लेकिन घटाने में हमारे पास एक ही समूह है, उसी में से कम करना है। जैसे- इस सवाल में 20 में से ही 8 कम करना है। तो हमारे पास सिर्फ 2 दहाइयाँ हैं। इनमें से ही 8 निकालकर दिखाओ’।

अब रुमित आगे नहीं बढ़ पा रहा था।

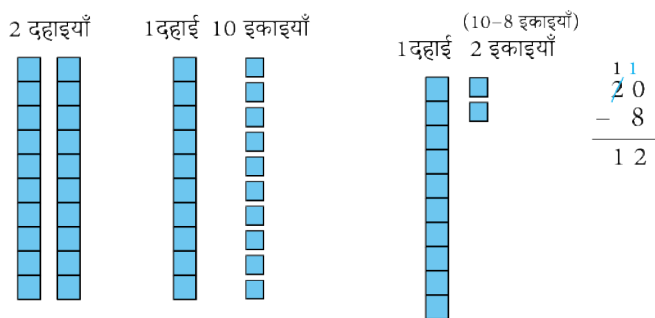
हीरा मैडम ने कॉपी पर हल किए गए सवाल को सामने रखकर समझाया।

“हमें 20 में से 8 घटाना है। इसका मतलब स्थानीय मान के अनुसार 2 दहाइयाँ हैं। इनमें से 8 इकाइयाँ कम करनी हैं। संख्या के रूप में देखा जाए तो इकाई के स्थान पर 0 है। इसमें से 8 इकाई कम करना है। इसे हम यूँ समझें कि हमारे पास 0 इकाई है (एक भी इकाई नहीं है), सिर्फ 2 दहाइयाँ हैं। अब हमें 8 इकाइयाँ कम करनी हैं। तो भला कैसे करेंगे?”

एक दहाई उधार ले लेंगे— रुमित ने कहा।

न..न.. इसे उधार लेना मत कहो। उधार तो हम किसी दूसरे से लेते हैं। फिर वापस भी करना पड़ता है। यहाँ तो हम किसी संख्या की माला को ही पुनः संयोजित (regrouping) कर रहे हैं। देखो हमारे पास 2 दहाइयाँ हैं और 0 इकाई है।

यहाँ इस रूप में हम 8 इकाइयाँ नहीं निकाल सकते हैं। तो यदि हम 2 दहाइयों में से एक दहाई को तोड़ दें तो वह वापस 10 इकाइयों के रूप में बदल जाएगी। ये 10 इकाइयाँ अब इकाई के स्थान पर रखी गई हैं। इसीलिए इकाई के स्थान पर 10 लिखा गया है। दहाई के स्थान पर अब सिर्फ 1 दहाई बचेगी। इसीलिए 2 को काटकर 1 लिखा गया है।



अब हम 8 इकाइयाँ निकाल सकेंगे। इस तरह 1 दहाई और 2 इकाई शेष बचे रहेंगे। उत्तर के रूप में 12 मिलेगा।

हल तक पहुँचकर रुमित बहुत खुश हुआ। अपनी आगे की कक्षाओं में रुमित ने बच्चों के साथ काम करते हुए मोतीमाला, तीली-बण्डल और डीन्स ब्लॉक का खूब उपयोग किया। अब बच्चे ज़्यादा रुचि से सवाल हल करते, साथ ही ज़्यादा बेहतर सीख रहे थे। क्या आप इस सवाल को डीन्स ब्लॉक / तीली बण्डल की सहायता से समझा सकते हैं?

$$\begin{array}{r} \text{HTO} \\ 207 \\ - 48 \\ \hline 159 \end{array}$$

मिश्रित संक्रिया के सवाल: बच्चों से ऐसे इबारती सवाल भी पूछे जाएँ जिनमें कई संक्रियाओं का इस्तेमाल किया जाता है।

1. नैना अपने 4 दोस्तों के लिए 20-20 मोतियों की माला बनाना चाहती है। उसके पास 67 मोती हैं। उसे सभी दोस्तों को एक-एक माला देने के लिए और कितने मोती चाहिए?
2. कुलजीत के पास 17 रुपये हैं। माँ ने उसे 8 रुपये और दे दिए। कुलजीत ने 5 रुपये का बिस्कुट खरीद लिया। अब उसके पास कितने रुपये बचे हैं?

मनगणित का महत्त्व (Mental strategies)

यहाँ दिए गए सभी सवालों को बिना कागज़-कलम इस्तेमाल किए हल कीजिए।

- $19+19= \dots\dots\dots$
- $1000-9= \dots\dots\dots$
- $27+38= \dots\dots\dots$
- $110+10+90= \dots\dots\dots$
- $48-23= \dots\dots\dots$

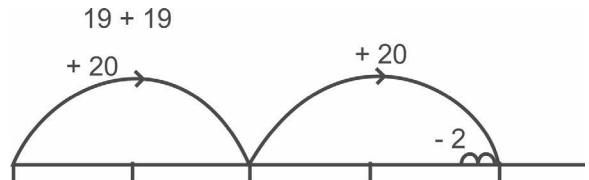
अब ज़रा सोचिए कि जो तरीका आपने इस्तेमाल किया है, यह कहाँ से सीखा है? क्या ये तरीके आपने अपने विद्यालय में सीखे थे? यदि स्वयं से सीखा, तो कैसे? क्या प्रक्रिया थी?

आमतौर पर जब हमारे पास कलम नहीं होती या हम बाज़ार में खरीददारी कर रहे होते हैं तब अक्सर हम मनगणित का उपयोग करते हैं। मनगणित यानी मन में गणना करना। लोग अपनी सहूलियत के हिसाब से अपने-अपने तरीके विकसित करते हैं। इन्ही तरीकों को हम mental strategies कहते हैं। इसे समझने के लिए कुछ उदाहरण देखते हैं।

सवाल: $19+19= \dots\dots\dots$

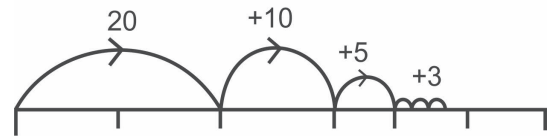
गोलू ने पहले 20 में 20 जोड़ा। इस तरह उसे 40 मिला। अंत में उसने 40 में से 2 घटा दिया। इस तरह उत्तर 38 आया। इस तरह के कई अभ्यास पहले ठोस वस्तुओं और मोतीमाला की सहायता से कक्षा में कराए जाने चाहिए। आगे चलकर संख्या रेखा पर भी इस तरह के अभ्यास कराएँ। इसी तरह खाली संख्या रेखा से परिचय कराया जाए और मनगणित के कई सवाल हल करने के अवसर दिए जाने चाहिए।

सवाल $19+19= \dots\dots\dots$ को हल करने के लिए खाली संख्या रेखा पर दो बार 20 की कूद दर्शाई गई है। इस तरह 40 पर पहुँचे हैं। इसके बाद उल्टी दिशा में 2 की कूद है। इस तरह 38 पर पहुँचा गया है।



इसी तरह सवाल $25+13$ को भी खाली संख्या रेखा के उपयोग से हल किया जा रहा है।

$25 + 13$



खाली संख्या रेखा के उपयोग से किए गए ऐसे अभ्यास बच्चों को संख्याओं को तोड़ने और उन्हें पुनः जोड़कर नई संख्याएँ बनाने का अवसर देते हैं। बच्चों के मन में संख्याओं के क्रम, उनका बड़ा या छोटा होना, जोड़ने-घटाने के तरीकों के अनुभव और ये अर्द्ध-अमूर्त छवियाँ अंकित हो जाती हैं। आगे चलकर ये अनुभव उन्हें बड़ी संख्याओं के साथ संक्रिया करने में बहुत मदद करते हैं।

सवाल: $110+10+90= \dots\dots\dots$

रमेश का तरीका- 110 में पहले 90 को जोड़ लिया। इस तरह 200 मिला। अब 10 को जोड़ दिया। इस तरह उत्तर 210 है।

रोशनी का तरीका- सबसे पहले 90 में 10 मिलाया। इस तरह 100 मिला। अंत में 100 और 110 को जोड़ दिया। इस तरह उत्तर 210 है।

हम जानते हैं कि बच्चों में तार्किक चिंतन का विकास करना, उन्हें सोच-समझकर बेहतर निर्णय लेने में सक्षम बनाना आदि गणित शिक्षण के उद्देश्यों में शामिल हैं। लेकिन यदि हम आमतौर पर प्रचलित गणित शिक्षण के तौर-तरीकों पर नज़र डालें तो पाएंगे कि वह रटने की प्रवृत्ति को बढ़ावा दे रही हैं। यहाँ बच्चों से यह अपेक्षा की जाती है कि वे गणित विषय के शिक्षण के दौरान नियम, सूत्र तथा विधियों को जल्द-से-जल्द रटकर, ठीक वैसी ही विधियों का उपयोग कर जल्द-से-जल्द सही हल तक पहुँच जाएँ। इस दबाव के चलते बहुत-से बच्चों के मन में गणित विषय और इन्हें पढ़ाने वाले अध्यापकों के प्रति भय बैठ जाता है। कई बच्चे इन तरीकों से पाठ्यपुस्तक में दिए गए वैसे ही सवाल तो हल कर पाते हैं, लेकिन नए सन्दर्भ या नई परिस्थिति में सवालों को समझ ही नहीं पाते हैं।

इस सबके चलते होता यह है कि दैनिक जीवन के अनुभवों या परिवेश से जुड़े सन्दर्भों पर आधारित जिन सवालों को वे कक्षा में रहकर, यहाँ सीखी गई मानक विधियों द्वारा हल कर लेते हैं, वैसे ही सवालों को बाज़ार में, दुकान पर या अन्य किसी मौके पर समझ ही नहीं पाते। इसीलिए गणित शिक्षण में बार-बार ज़ोर देकर यह कहा जाता है कि बच्चों के साथ गणित के सवालों पर मौखिक बातचीत की जानी चाहिए। उनसे बात करते हुए छोटी संख्याओं को लेकर कुछ सवाल बनाए जाने चाहिए। बच्चों को इन सवालों पर सोचने, अपने तरीके से हल करने और मौखिक रूप से बोलकर अपना जवाब बताने की स्वतंत्रता होना चाहिए। बच्चे न सिर्फ मौखिक सवालों को सुनकर जवाब दें, बल्कि वे भी मौखिक सवाल बनाएँ। इस तरह वे अपने दैनिक जीवन के अनुभव और परिवेश की घटनाओं से चुनकर कुछ अच्छे सन्दर्भ खोजेंगे और उन पर इबारती सवाल बना सकेंगे। इस तरह की गतिविधियाँ न सिर्फ बच्चों में अभिव्यक्ति, सम्प्रेषण, रचनात्मकता, आत्मविश्वास और तार्किक चिंतन का विकास करती हैं, बल्कि आगे सीखे जाने वाले गणित के लिए एक मज़बूत बुनियाद भी तैयार करती हैं। शुरुआती कक्षाओं में बच्चों से छोटी संख्याओं पर आधारित और उनके अनुभव से जुड़ते हुए मौखिक सवाल पूछे जाने चाहिए। साथ ही उनकी तरफ से आने वाले जवाबों को सुनकर यह भी पूछा जाना चाहिए कि वे अपने उत्तर तक कैसे पहुँचे हैं। उनका तरीका क्या था?

उदाहरण के रूप में यहाँ कुछ इबारती सवाल दिए जा रहे हैं। आप बच्चों के साथ उनके स्तर अनुसार इन सवालों का उपयोग कर सकते हैं।

- एक मधुमक्खी ने 4 गेंदे और 5 बेला के फूलों से रस लिया। फिर वह अपने छत्ते की तरफ उड़ गई। उसने कुल कितने फूलों से रस लिया?
- सरिता एक कहानी की किताब 'भालू ने खेली फुटबॉल' पढ़ रही है। उसने अभी तक 12 पेज पढ़ लिए हैं। इस किताब में 25 पेज हैं। सरिता को अभी कितने पेज और पढ़ने हैं?
- अज़ान के घर 8 बकरियाँ, 4 बिल्ली और 1 कुत्ता है। बताओ उसके घर कुल कितने जानवर हैं?

- 7 बच्चे मिट्टी के खिलौने बना रहे हैं। हर बच्चे ने 1 हाथी और 1 चूहा बनाया है। सभी ने मिलकर कुल कितने जानवर बनाए?
- जसराज के गुल्लक में 13 रुपये थे। आज उसकी माँ ने 5 रुपये दिए हैं। जसराज ने ये 5 रुपये अपनी गुल्लक में डाल दिया। अब उसके गुल्लक में कितने रुपये हो गए हैं?
- रिमशा ने दुकान से 10 रुपये की गेंद, 5 रुपये की रबड़ और 12 रुपये की कॉपी खरीदी है। उसने दुकानदार को 50 रुपये का नोट दिया। बताओ, दुकानदार कितने रुपये वापिस करेगा?

बच्चों से बातचीत करते हुए उनके मौखिक जवाब सुनिए। साथ ही यह भी समझने का प्रयास कीजिए कि इस उत्तर तक वे कैसे पहुँचे हैं। उनका तरीका क्या था? बच्चों को भी ऐसे और सवाल बनाने का अवसर दीजिए। वे एक-दूसरे से अपने सवाल पूछें और सही हल तक पहुँचने में एक-दूसरे का सहयोग भी करें।



2.4.12 उदाहरणात्मक कार्ययोजना (Illustrative Session Plan)

सत्र	विषय	समय	सामग्री
1	कक्षा-कक्ष की चुनौतियाँ	2 घंटे	पाठ्यपुस्तक, सीखने के प्रतिफल, टीएलएम, बच्चों द्वारा हल किए गए सवाल।
2	जोड़-घटाव के मायने तथा सन्दर्भ	2 घंटे	पाठ्यपुस्तक के पाठ, कार्यपत्रक, टीएलएम, बच्चों द्वारा हल सवाल।
3	अनुभव आधारित मौखिक सवाल	1 घंटा	पाठ्यपुस्तक के पाठ, कार्यपत्रक।
4	इबारती सवालों के लिए संख्या सवाल लिखना तथा संख्या सवालों के लिए इबारती सवाल बनाना	2 घंटे	पाठ्यपुस्तक के पाठ, कार्यपत्रक, टीएलएम।
5	जोड़-घटाव के तरीके	3 घंटे	पाठ्यपुस्तक के पाठ, कार्यपत्रक, टीएलएम।
6	मानक विधि से जोड़-घटाव	2 घंटे	पाठ्यपुस्तक के पाठ, कार्यपत्रक, टीएलएम, आलेख।
7	सामग्री निर्माण	2 घंटे	पाठ्यपुस्तक के पाठ, कार्यपत्रक, टीएलएम।



2.4.13 अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)

कक्षा-कक्ष में जोड़-घटाव पर आधारित काम निम्न प्रक्रियाओं के अनुसार किया जाना अपेक्षित है। ये प्रक्रियाएँ उन्हीं सात अवलोकन क्षेत्रों पर आधारित हैं जिनके बारे में हमने अध्याय एक में बात की है। शिक्षकों के साथ जोड़-घटाव की अवधारणा पर किए जाने वाले काम का आधार भी यही प्रक्रियाएँ होंगी।

अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)- जोड़-घटाव

1. जोड़ के सन्दर्भ- एकत्रीकरण (aggregation) यानी दो या दो से अधिक समूहों को मिलाने का उपयोग करते हुए जोड़ की अवधारणा पर बच्चों के साथ काम करते हैं।
2. जोड़ के सन्दर्भ- वृद्धि (augmentation) यानी किसी समूह में वृद्धि का उपयोग करते हुए जोड़ की अवधारणा पर बच्चों के साथ काम करते हैं।
3. घटाव के सन्दर्भ- हिस्से करना (partitioning) यानी किसी समूह से कुछ चीज़ों को निकालने या हटाने तथा समूह में बची हुई चीज़ों की संख्या पता करने की क्रिया का उपयोग करते हुए घटाव की अवधारणा पर बच्चों के साथ काम करते हैं।
4. घटाव के सन्दर्भ- कमी मालूम करना (depreciation) यानी जब मूल राशि और शेष बची राशि पता है, तब यह पता लगाना है कि कितनी राशि हटा दी गई या निकाली गई है, ऐसे सन्दर्भ का उपयोग करते हुए घटाव की अवधारणा पर बच्चों के साथ काम करते हैं।
5. घटाव के सन्दर्भ- तुलना (comparison) यानी दो समूहों या संख्याओं के बीच अंतर पता लगाना या एक समूह में दूसरे के मुकाबले चीज़ें कितनी कम या ज़्यादा हैं, ऐसे सन्दर्भ का उपयोग करते हुए घटाव की अवधारणा पर बच्चों के साथ काम करते हैं।
6. घटाव के सन्दर्भ- पूरक जोड़ (complimentary addition) यानी किसी संख्या या समूह को बढ़ाकर किसी अन्य संख्या या समूह में तब्दील करने के लिए कितना जोड़ना होगा, ऐसे सन्दर्भ का उपयोग करते हुए घटाव की अवधारणा पर बच्चों के साथ काम करते हैं।
7. शिक्षक गिनने के कौशल का उपयोग जोड़-घटाव की अवधारणा एवं प्रक्रिया को समझाने में करते हैं। जैसे- सभी को गिनना (count all), एक समूह के आगे से गिनना (count on), बड़े समूह के आगे से गिनना (count on from the larger number) का उपयोग करना।
8. जोड़-घटाव की अवधारणा को समझाने के समय शिक्षक अपने परिवेश में आसानी से मिलनी वाली ठोस वस्तुओं (जैसे- कंकड़, लकड़ी की डंडी आदि) का उपयोग करते हैं एवं बच्चे खुद से भी ठोस वस्तुओं का उपयोग करते हुए समझ बनाते हैं।
9. जोड़-घटाव को समझाने में ठोस वस्तु के एक स्तर पर काम करने के बाद कुछ संकेत जैसे- लाइन या गोले का उपयोग करते हैं।
10. जोड़-घटाव को गणितीय संकेत (जोड़-घटाव के तथ्य) में लिखते हैं एवं गणितीय रूप में लिखने से पहले बच्चों की स्थानीय भाषा से गणितीय भाषा तक के चरणों पर बात करते हैं।
11. शिक्षक ज़रूरत के हिसाब से कक्षा के लिए शिक्षण सहायक सामग्री का निर्माण भी करते हैं।
12. कक्षा स्तर के तहत जोड़-घटाव से संबंधित इबारती सवाल को हल करने तथा उत्तर को जाँचने पर काम करते हैं।

अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)- जोड़-घटाव

13. शिक्षक पहले बिना हासिल एवं उधार वाले जोड़-घटाव के सवाल पर काम करते हैं एवं उसके बाद हासिल एवं उधार वाले सवाल पर काम करते हैं।
14. जोड़-घटाव संबंधित इबारती सवाल को एक से ज़्यादा तरीके से हल करने को प्रोत्साहित करते हैं।
15. शिक्षक दैनिक जीवन की समस्या से जोड़-घटाव के तथ्य बनाने एवं जोड़-घटाव के तथ्य से दैनिक जीवन की समस्या बनाने का बच्चों को मौका देते हैं।
16. बच्चे किन्हीं भी संख्याओं के जोड़-घटाव के सवाल को बिना हल किए उसके परिणाम का अनुमान लगाने पर काम करते हैं।
17. शिक्षक जोड़-घटाव की अवधारणा पर काम करने से पहले योजना बनाते हैं।
18. शिक्षक जोड़-घटाव की अवधारणा पर काम करते समय ठोस वस्तुओं के उपयोग, अर्द्ध-मूर्त संकेत एवं अमूर्त संकेत के क्रम का पालन करते हैं।
19. बच्चों के स्तर एवं परिवेश को ध्यान में रखते हुए उदाहरण का उपयोग करते हैं।
20. बच्चों को खुद से सीखने के लिए मौके देते हैं (ना कि हर चीज़ को बताते हैं)।
21. बच्चों के स्तर को ध्यान में रखते हुए समूह बनाते हैं एवं एक-दूसरे से सीखने के मौके देते हैं।
22. शिक्षक जोड़-घटाव पढ़ाने में कहानी, कविता का उपयोग करते हैं।
23. बच्चों के जोड़-घटाव की समझ को जाँचने के लिए वो कक्षा-कक्ष में पढ़ाने की प्रक्रिया के साथ-साथ गृहकार्य, वर्कशीट, प्रोजेक्ट आदि का उपयोग करते हैं।
24. बच्चों के सीखने से संबंधित सभी जानकारी को एकत्रित एवं विश्लेषण करते हैं एवं विश्लेषण के आधार पर बच्चों की आवश्यकता पर काम करते हैं।
25. शिक्षक पाठ्यपुस्तक में दिए गए सवाल के साथ-साथ नए सवाल भी बनाते हैं।



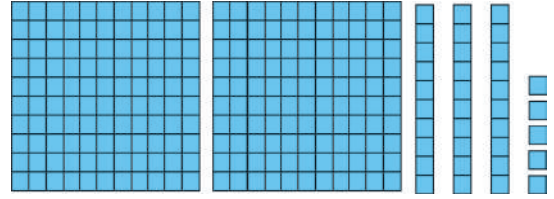
2.4.14 उदाहरणात्मक पाठ योजना (Illustrative Lesson Plan)

टॉपिक	उद्देश्य	समय	प्रक्रिया	सामग्री
जोड़ के मायने (एकत्रीकरण) को समझना	<p>बच्चे निम्नांकित बिंदुओं पर समझ बना पाएंगे:</p> <ul style="list-style-type: none"> जोड़ को एकत्रीकरण के मायने से समझना। जोड़ के तथ्य को समझना एवं बना पाना। अपने आस-पास की घटना को जोड़ के संदर्भ में व्यक्त करना। 	2 घंटे	<ul style="list-style-type: none"> दो बच्चों सरिता एवं अमान को शिक्षक सामने बुलाते हुए, सरिता को 4 स्ट्रॉ एवं अमान को 2 स्ट्रॉ देते हुए निम्न बिंदुओं पर कक्षा में चर्चा करेंगे: <ul style="list-style-type: none"> सरिता एवं अमान के पास कितनी-कितनी स्ट्रॉ हैं? दोनों ने अपनी स्ट्रॉ को मिलाकर एक डिब्बे में रख दिया। अब बताओ, डिब्बे में कुल कितनी स्ट्रॉ हैं? आप सभी ने कैसे पता किया कि कुल कितनी स्ट्रॉ हैं? तो दोनों के पास कुल कितनी स्ट्रॉ हुईं? जोड़ के तथ्य- <ul style="list-style-type: none"> सरिता के पास कितनी स्ट्रॉ थीं, उस संख्या को श्यामपट्ट पर लिखें एवं उसके नीचे उतनी खड़ी रेखा खींचें। अमान के पास कितनी स्ट्रॉ थीं, उस संख्या को श्यामपट्ट पर लिखें एवं उसके नीचे उतनी खड़ी रेखा खींचें। हमने उसके बाद क्या किया था, दोनों को एक डिब्बे में मिलाया था। इस मिलान को हम संकेत '+' से व्यक्त करते हैं। हम उसे ऐसे लिखते हैं: $4+2$ बताओ दोनों को मिलाने पर कितनी हुईं? बच्चों को सभी खड़ी रेखाओं को गिनने को बोल सकते हैं। हम उसे ऐसे लिखते हैं: $4+2=6$ उसे हम ऐसे पढ़ते हैं: चार जोड़ दो बराबर छह। अपने आस-पास की घटना को जोड़ के संदर्भ में व्यक्त करना <ul style="list-style-type: none"> क्या आप जोड़ की कुछ ऐसी घटना व्यक्त या सवाल बना सकते हैं? उन घटनाओं एवं सवालों पर चर्चा करते हुए बच्चों से जोड़ के तथ्य पर काम करना है एवं अभ्यास कराना है। आकलन करते हुए, जिनको समझने में समस्या आती है उनके साथ काम करना है। 	स्ट्रॉ, डिब्बे।

टॉपिक	उद्देश्य	समय	प्रक्रिया	सामग्री
घटाव के मायने (हिस्से करना) को समझना	<p>बच्चे निम्नांकित बिंदुओं पर समझ बना पाएंगे:</p> <ul style="list-style-type: none"> घटाव को हिस्से करना के मायने से समझना। घटाव के तथ्य को समझना एवं बना पाना। अपने आस-पास की घटना को घटाव के सन्दर्भ में व्यक्त करना। 	2 घंटे	<ul style="list-style-type: none"> दो बच्चों सरिता एवं अमान को सामने बुलाते हुए, शिक्षक सरिता को 5 स्ट्रॉ देते हुए निम्न बिंदुओं पर कक्षा में चर्चा करेंगे: <ul style="list-style-type: none"> सरिता के पास कितनी स्ट्रॉ हैं? सरिता ने अमान को 2 स्ट्रॉ दे दीं। अब बताओ, सरिता के पास कितनी स्ट्रॉ बचीं? आप सभी ने कैसे पता किया कि सरिता के पास कितनी स्ट्रॉ बचीं? घटाव के तथ्य <ul style="list-style-type: none"> सरिता के पास कितनी स्ट्रॉ थीं, उस संख्या को श्यामपट्ट पर लिखें एवं उसके नीचे उतनी खड़ी रेखा खींचें। सरिता ने अमान को कितनी स्ट्रॉ दीं, उस संख्या को श्यामपट्ट पर लिखें। सरिता ने अमान को कुछ स्ट्रॉ दे दीं तो क्या सरिता के पास पहले से स्ट्रॉ कम हो जाएंगी? इस कम या घट जाने को हम संकेत '-' से व्यक्त करते हैं। हम उसे ऐसे लिखते हैं: $5-2$ बताओ, सरिता के पास कितनी स्ट्रॉ बचीं? बच्चों को पहले बनाई खड़ी रेखाओं में से 2 खड़ी रेखा को काटने की प्रक्रिया दिखाते हुए, बची हुई खड़ी रेखाओं को गिनने को कहें। हम उसे ऐसे लिखते हैं: $5-2=3$ उसे हम ऐसे पढ़ते हैं: पाँच घटा दो बराबर तीन। अपने आस-पास की घटना को घटाव के सन्दर्भ में व्यक्त करना- <ul style="list-style-type: none"> क्या आप घटाव की कुछ ऐसी घटना व्यक्त या सवाल बना सकते हैं? उन घटनाओं एवं सवालों पर चर्चा करते हुए बच्चों से घटाव के तथ्य पर काम कराना है एवं अभ्यास करवाना है। आकलन करते हुए, जिन बच्चों को समझने में समस्या आती है उनके साथ काम करना है। 	स्ट्रॉ

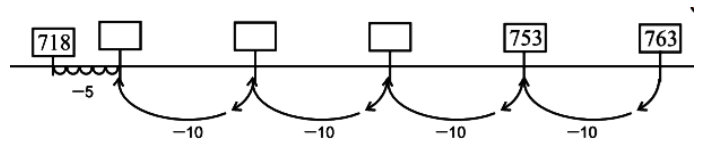
2.4.15 सार संक्षेप (Summary)

- जोड़ने के सवालों के दो प्रकार के सन्दर्भ होते हैं- समूहों को मिलाना (aggregation) और समूह में वृद्धि (augmentation)।
- घटाने के सन्दर्भ हैं- हिस्से करना (partitioning), कमी (depreciation), तुलना (comparison) और पूरक जोड़ (complimentary addition)।
- जोड़-घटाव की शुरुआत व्यावहारिक अनुभवों (daily life experiences) पर आधारित मौखिक (oral) सवाल द्वारा करें, बच्चों को अपने तरीके से हल करने का अवसर दें।
- जोड़ के लिए: count all, count on and count on from the larger number.
- घटाव के लिए: count out, count back, count down from the larger number to the smaller number and count up from the smaller number to the larger number.
- ठोस वस्तुओं की मदद से संख्या के विभिन्न संयोजन व मानस चित्रण बनाने का अवसर दें।
- मन में सोची जा रही रणनीति (mental strategies) को संख्या रेखा पर प्रदर्शित करना तथा जोड़ने और घटाने की प्रक्रिया को समझना।
- शुरू में मुख्य शब्दों (key words) से मदद मिलती है, लेकिन ऐसा भी न हो कि बच्चे जोड़-घटाव को समझने के लिए सिर्फ इन पर ही आश्रित हो जाएँ।
- मानक विधि (standard algorithm) से जोड़ तथा घटाव करने के दौरान इकाई, दहाई तथा सैकड़ा की व्यवस्था का पालन करने पर ध्यान दें।
- खानेदार गणित की कॉपी से अपने लिए द्विआयामी डीन्स ब्लॉक (2-D Dienes block) बनाएँ और सवाल हल करते समय इसका उपयोग करें।



2.4.16 कार्यपत्रक (Worksheets)

1. गणेश ने 763 रुपये में से 45 रुपये खर्च कर दिए तो उसके पास कितने रुपये बचे?



काजल ने इस तरह हल किया है। बताओ, हर बार 10 की कूद लगाने पर काजल कौन-कौन सी संख्याओं पर पहुँची?

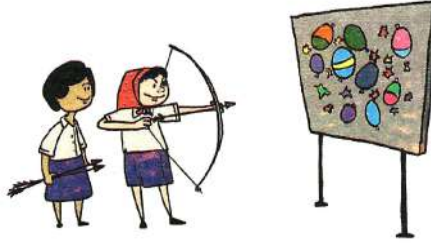
	1	3
+	2	2
	2	3
-	1	5

2. मुनीज़ा की कक्षा में अंग्रेज़ी कहानियों की 13 और हिंदी की 22 किताबें हैं। कुल मिलाकर कितनी कहानी की किताबें हैं?
3. साक्षी के पास 23 बेर थे, उसने 15 बेर खा लिए। अब साक्षी के पास कितने बेर बचे?

source: गणित का जादू, कक्षा 2, एनसीईआरटी

4. एक थैले में 99 सफ़ेद और काले रंग के पत्थर हैं। यदि 37 पत्थर काले हैं तो सफ़ेद पत्थर कितने हैं?
5. पिताजी ने रामू को कुछ रुपये दिए, माँ ने उसे 31 रुपये दिए। अब उसके पास 82 रुपये हैं, तो बताओ कि पिताजी ने रामू को कितने रुपये दिए थे?

6. निशानेबाजी के खेल में दीवार पर गुब्बारे लगे थे। संगीता ने 25 और मालती ने 31 गुब्बारे फोड़े तो बताओ कि संगीता ने मालती से कितने कम गुब्बारे फोड़े?



source: गणित का जादू, कक्षा 2, एनसीईआरटी

7. जीनत के पास 29 कंचे हैं। कितने कंचे और मिलाने पर उसके पास 43 कंचे हो जाएंगे?
8. वेंकटेश अपनी दुकान पर दो ग्राहकों का बिल बना रहा है, तुम उसकी मदद करो।

	रुपये		रुपये
दही वड़ा	25	डोसा	23
मिर्ची चावल	18	उत्तपम	28
कुल		कुल	

9. पुस्तक में एक बहुत ही रोचक अभ्यास दिया गया है। जोड़-घटाव के कुछ सवालों पर स्याही टपक गई है। चिह्न और कुछ संख्याएँ छिपी हैं, आप सही चिह्न और संख्या खोजिए।

$$\begin{array}{r} 29 \\ 28 \\ \hline 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ 5 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ 35 \\ \hline 53 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 89 \\ 2 \\ \hline 47 \end{array}$$

source: गणित की मजेदार दुनिया, कक्षा 4, राजस्थान

10. सलमा ने अपनी कॉपी में कुछ सवाल हल किए हैं। अपने साथियों के साथ मिलकर इन्हें जाँचो और यदि ज़रूरत हो तो ठीक करो।

$$\begin{array}{r} 501 \\ +173 \\ \hline 674 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 625 \\ +137 \\ \hline 7512 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 789 \\ +101 \\ \hline 890 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 457 \\ -169 \\ \hline 312 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 622 \\ -413 \\ \hline 209 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 702 \\ -575 \\ \hline 217 \end{array}$$

11. इन सवालों के लिए तीन विकल्प दिए गए हैं, कौन-कौन से उत्तर सही लग रहे हैं?

$\begin{array}{r} 516 \\ + 384 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 240 \\ - 36 \\ \hline \end{array}$
(a) 6997 (b) 8347 (c) 8053	(a) 1676 (b) 2396 (c) 1975

a. गीता अपने दोस्तों के साथ बाज़ार गई। उसने 58 रुपये, 37 रुपये और 22 रुपये का सामान खरीदा। गीता के पास सौ रुपये का नोट है। उसे बिल चुकाने के लिए अपने दोस्तों से और कितने पैसे लेने होंगे?



गणित का जादू, कक्षा 3, एनसीईआरटी

अतिरिक्त अध्ययन सामग्री (Additional Reading Resources)

- स्थानीय मान और जोड़ सिखाने का प्रयास– सन्दर्भ, एकलव्य
- लार्ज स्केल कैम्प, राजस्थान गणित मॉड्यूल 2017, अज़ीम प्रेमजी फाउंडेशन

2.5 गुणा (Multiplication)

सीखने के प्रतिफल (Learning Outcomes)

कक्षा 1

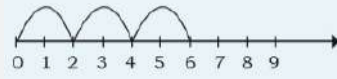
- आकृतियों तथा संख्याओं के पैटर्न का अवलोकन, विस्तार तथा निर्माण करना।
- बराबर समूह बनाना।

कक्षा 2

- ऐसी परिस्थितियाँ बनाएँ जहाँ पर एक संख्या का बार-बार जोड़ करना पड़ता है।
- आकृतियाँ, अँगूठे के निशान, पत्तियों के निशान तथा संख्याओं आदि की सहायता से बने पैटर्न का विस्तार करें।

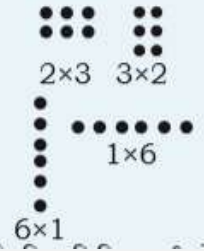
कक्षा 3

- 2, 3, 4, 5 तथा 10 के गुणन तथ्य बनाना- छोड़कर गिनना, बार-बार जोड़कर गिनना तथा दैनिक परिस्थितियों में उनका उपयोग करना।



source: सीखने के प्रतिफल, एनसीईआरटी

- उपलब्ध वस्तुओं को 100 के समूह, 10 के समूह और इकाइयों के रूप में गिनना एवं इस समझ का उपयोग गुणा में करना।
- मूर्त वस्तुओं को व्यवस्थित करना और अलग-अलग गुणन तथ्यों की समझ विकसित करना। जैसे- 6 आमों को अलग-अलग तरीकों से दर्शाया जा सकता है।
- बराबर समूह बनाना और इस पर आधारित सवालों को समझना।



source: सीखने के प्रतिफल, एनसीईआरटी

कक्षा 4

- छोड़कर गिनना, पैटर्न का विस्तार आदि के माध्यम से गुणन तथ्यों को खोजना।
- दो अंकों की संख्या का विस्तार कर गुणन करना। जैसे 23 को 6 से गुणा करना:

$$\begin{aligned} 23 \times 6 &= (20+3) \times 6 \\ &= 20 \times 6 + 3 \times 6 \\ &= 120 + 18 \\ &= 138 \end{aligned}$$

- दैनिक जीवन की समस्याओं पर आधारित गुणा के प्रश्न बनाना तथा प्रश्नों को हल करना। जैसे- यदि 1 पेन की कीमत 35 रुपये है तो 7 पेन की कीमत कितनी होगी?
- गुणा के सवाल हल करने के लिए मानक कलन विधि का उपयोग करना।

कक्षा 5

- गुणन तथ्यों, संख्या रेखा पर छोड़कर गिनना और संख्या ग्रिड के आधार पर किसी संख्या के गुणज (multiples) की अवधारणा को समझना।
- संख्याओं के पैटर्न खोजकर उन पर आधारित नियम बनाना। जैसे- वर्ग संख्याओं का पैटर्न।



source: सीखने के प्रतिफल, एनसीईआरटी

2.5.1 शिक्षक प्रशिक्षण कार्यशाला से ...

पौड़ी जिले के रिखनीखाल विकासखंड में सभी शासकीय विद्यालयों की प्राथमिक कक्षाओं में गणित विषय पढ़ाने वाले शिक्षकों की कार्यशाला का आयोजन किया गया है। शिक्षक देवीप्रसाद रावत और सुषमा बिष्ट मैडम यहाँ पर दक्ष प्रशिक्षक (master trainer) की भूमिका में काम कर रहे हैं। आज कार्यशाला का चौथा दिन है। पिछले तीन दिनों में गिनना, संख्याएँ, जोड़-घटाव आदि पर काम किया जा चुका है। दोपहर के भोजन अवकाश के बाद गुणनखंड की अवधारणा पर काम किया जाना है।

पहला सत्र सुषमा मैडम का है। दोपहर का समय है। सभी लोगों ने कुछ देर पहले ही भोजन किया है, अतः कुछ शिक्षकों को उबासी आ रही है। सुषमा जी ने एक गतिविधि से अपने सत्र की शुरुआत की। उन्होंने सभी लोगों को एक गोले में खड़ा किया। एक खेल के नियम बताए। क्रम से गिनती बोलते हुए जाना था। दो या दो का गुणज (multiples of 2) वाली संख्या आने पर 'बच' कहना होता है।

सभी ने गिनती बोलना शुरू किया, 'एक, बच, तीन, बच, पाँच, बच, सात, बच, बारह, तेरह, बच,'। 'रुको, रुको ये बारह क्या दो की गुणज संख्या नहीं है?' – देवीप्रसाद सर ने कहा।

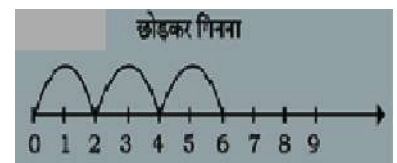
सीताराम भंडारी सर ने बारह बोला था। सभी ने उन्हें आउट करार दिया। अब उन्हें गोले के बीच बैठाया गया। ठीक उनकी बगल में खड़ी परवीन मैडम से दोबारा गिनती शुरू की गई— एक, बच, तीन, बच, पाँच, बच, सात, बच

कुछ देर खेल खेला गया। सभी को खूब आनंद आया। सुषमा मैडम ने सभी को बैठने को कहा और अपनी बात शुरू की।

'इस खेल में कौन-सी अवधारणा का उपयोग किया गया है?' – सुषमा मैडम ने पूछा।

'गिनती बोलना' – राधा मैडम ने कहा।

'दो के गुणा पर ध्यान देना है' – सादिक अली सर ने कहा।



Source: सीखने के प्रतिफल, एनसीईआरटी

“हाँ, इसमें गिनती को क्रम से बोलने के साथ ही गुणा की अवधारणा भी शामिल है। बच्चे जब संख्या रेखा पर गिनना और जोड़-घटाव सीख लें तब उन्हें संख्या रेखा पर 'छोड़कर गिनने' (skip counting) की प्रक्रिया से परिचित कराया जाना चाहिए। समूहीकरण (grouping) के दौरान भी इस तरह का काम किया गया था। बोर्ड पर संख्या रेखा पर दो की कूद दिखाते हुए- यहाँ देखिए, हर बार दो की कूद करने से 2 का पहाड़ा (multiplication table) बन रहा है। इसे ही संख्या रेखा पर छोड़कर गिनना कहते हैं। 'बच' बोलने का यह खेल इसी अवधारणा पर आधारित है। इस खेल से हम बच्चों को संख्याओं का गुणज (multiples) बनाना समझा सकते हैं। ऐसा ही खेल 3, 4 या किसी अन्य संख्या के लिए भी खेल सकते हैं। आज के इस सत्र में हम गुणा के सवालियों पर ही बात करेंगे। क्या आप बता सकते हैं कि स्कूल में बच्चों को गुणा सिखाते हुए आपको किस तरह की चुनौतियाँ आती हैं? या बच्चे किस तरह से ये सवाल हल करते हैं?" – सुषमा मैडम ने कहा।

2.5.2. गुणा के सवालों में बच्चों की चुनौतियाँ

सुषमा मैडम के इस सवाल के जवाब में सदन से कुछ बातें आईं। सुषमा जी ने इन बातों को संक्षेप में बोर्ड पर लिख लिया।

- बच्चे गुणा के चिह्न को जोड़ के रूप में समझ लेते हैं, जैसे $2 \times 3 = 5$
- बच्चे पहाड़े रट लेते हैं और बोल भी लेते हैं, पर उसका मतलब नहीं समझते हैं। जैसे कोई बच्चा 8 का पहाड़ा बोल लेता है और लिख भी लेता है, लेकिन इन संबंधों को $8 \times 7 = 56$ के रूप में नहीं समझता है।
- किसी भी संख्या को 0 से गुणा करने के दौरान उत्तर में वही संख्या लिख देते हैं। जैसे $15 \times 0 = 15$
- संख्या को 0 से गुणा करने पर गुणनफल 0 ही क्यों मिलता है, यह नहीं जानते।
- 23×36 को पहाड़ा बोलकर हल करते हैं, लेकिन इस प्रक्रिया में गुणा कैसे काम कर रहा है, यह नहीं समझते हैं।
- $8 \times \dots = 56$ जैसे सवालों को हल नहीं कर पाते हैं। कई बच्चे यह नहीं समझ पाते हैं कि इस सवाल में करना क्या है।
- इबारती सवालों (word problems) को पढ़कर यह नहीं समझ पाते हैं कि इसमें क्या करना है।
- सवाल को पढ़कर यह समझ नहीं पाते हैं कि किन संख्याओं का गुणा करना है। जैसे- कक्षा में 26 बच्चे हैं, प्रत्येक बच्चे को 4 कॉपी दी जानी है तो कितनी कॉपियों की आवश्यकता होगी? यदि प्रत्येक बच्चे को 6 कॉपी दी जानी है तब कितनी कॉपियों की आवश्यकता होगी? इस सवाल को पढ़कर कुछ बच्चे यह समझ नहीं पाते हैं कि इसमें गुणा किया जाना है। बहुत से बच्चे यह तय नहीं कर पाते हैं कि इसे हल करने के लिए 26 में 6 एवं 4 में से किसका गुणा करना होगा।
- गुणा से सम्बंधित इबारती सवाल नहीं बना पाते हैं। बच्चे इबारती सवाल बनाते भी हैं तो वो केवल एक ही सन्दर्भ से सम्बंधित होते हैं।
- दो संख्याओं के गुणनफल का अनुमान नहीं लगा पाते। अनुमान लगाने का यह कौशल न सिर्फ उन्हें उत्तर की जाँच करने में बल्कि दैनिक जीवन में भी मददगार होता है।
- मानक कलन विधि (Standard Algorithm) से सम्बंधित गलतियाँ: बच्चे मानक विधियों को मशीनी ढंग से रट लेते हैं तथा प्रत्येक चरण पर वैसा ही करते जाते हैं। इससे कई जगह गड़बड़ होती है।



$$8 \times _ = 56$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 5 \\ \hline 1025 \end{array} \quad \begin{array}{r} 25 \\ \times 31 \\ \hline 65 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ 649 \\ \times 3 \\ \hline 2187 \end{array} \quad \begin{array}{r} 23 \\ \times 36 \\ \hline 138 \\ 69 \\ \hline 207 \end{array}$$

सवाल : गुणा के सवाल हल करने के दौरान बच्चों को आने वाली इन चुनौतियों का विश्लेषण करिए। बताइए कि इन चुनौतियों के क्या कारण हो सकते हैं? इन्हें कैसे दूर किया जा सकता है?

बच्चों को गुणा में होने वाली चुनौतियों से अब तक श्यामपट्ट (blackboard) भर गया था। कुछ शिक्षक-शिक्षिका कई और बातें भी साझा करना चाह रहे थे, लेकिन सुषमा मैडम ने उन्हें अभी रोका। वे इन्हीं चुनौतियों पर कुछ देर ठहरकर बात करना चाहती थीं।

‘क्या गुणा के सवालों में सारी चुनौतियाँ सिर्फ बच्चों को ही आती हैं, हम अध्यापकों को भी कुछ चुनौतियाँ आती होंगी, उनके बारे में भी बताइए।’ – सुषमा मैडम ने कहा।

‘अध्यापकों को तो चुनौतियाँ ही चुनौतियाँ हैं मैडम, क्या-क्या बताएँ’ – एक शिक्षक ने कहा।

‘वैसे तो बहुत-सी चुनौतियाँ हो सकती हैं, लेकिन यहाँ हम गणित में गुणा सिखाने के सवालों पर आधारित चुनौतियों की बात कर रहे हैं, आप भी ऐसी ही चुनौतियाँ बताइए।’ – सुषमा मैडम ने कहा।

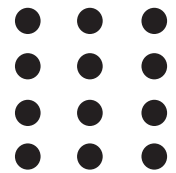
‘हमें गुणा करने में तो कोई चुनौती नहीं आती। जिनको भी पहाड़े आते होंगे और गुणा करने की विधि मालूम होगी, वे आसानी से कर लेंगे।’ – सुकुमारी नौटियाल मैडम ने कहा।

‘सही है, लेकिन गुणा क्या सिर्फ पहाड़े पढ़ना है या कुछ और भी गहरी बात है और विधि, यह कैसे बनी होगी? यह विधि कैसे काम करती है? क्या सिर्फ यही विधि है या कुछ और भी तरीके हो सकते हैं?’ सुषमा मैडम ने सवालों की झड़ी लगा दी थी, सब चुपचाप उनकी तरफ देख रहे थे।

‘अगले सत्र में हम गुणा की अवधारणा और इसके सन्दर्भों पर बात करेंगे। साथ ही कक्षा-कक्ष में छोटे बच्चों के साथ काम करने के तरीकों को भी समझेंगे। विस्तार से बात करते हुए हम विधि पर भी पहुँचेंगे। इस सत्र के संचालन के लिए मैं देवी प्रसाद सर को आमंत्रित कर रही हूँ।’ – मैडम ने कहा।

गुणा के सवाल और हल करने का तरीका

‘पिछले सत्र में बहुत अच्छी चर्चा हुई है। आप सभी ने अपने अनुभव साझा किए। बच्चों की चुनौतियों पर बात की। मैं आपको दो सवाल हल करने को दे रहा हूँ। इन्हें अपने तरीकों से हल कर लीजिए। आगे इन्हीं सवालों के सहारे हम आपस में बात करेंगे।’ ऐसा कहते हुए देवीलाल सर ने बोर्ड पर दो सवाल लिख दिए।



एक प्रश्न में 137 में 23 का गुणा करना था। दूसरे में कुछ बिन्दुओं को देखकर उसे गुणा के रूप में लिखना था।

137x23

सभी लोगों ने अपनी-अपनी कॉपी में दोनों सवालों को हल कर लिया।

देवीलाल जी ने सीताराम भंडारी सर को श्यामपट्ट पर आमंत्रित किया तथा दोनों सवालियों का हल लिखने को कहा। सीताराम जी ने झट से हल कर दिया। उनके हल इस प्रकार थे:

ह. सै. द. इ.	
1 3 7	● ● ●
x 2 3	● ● ●
4 1 1	● ● ●
2 7 4 x	● ● ●
3 1 5 1	3 x 4

सुगमकर्ता ने सीताराम जी द्वारा किए गए दोनों हल की सराहना की तथा सभी की तरफ मुखातिब होकर सवाल किया, 'क्या ये दोनों हल सही हैं? आप लोगों की क्या राय है? आपने भी इसी तरह हल किया है या किसी का उत्तर कुछ और आ रहा है?'

'मैंने अलग तरह से हल किया है सर', जानकी सेमवाल मैडम ने हाथ उठाकर बताया। उन्हें भी बोर्ड पर आमंत्रित किया गया। जानकी मैडम का हल इस प्रकार था:

ह. सै. द. इ.	
1 3 7	● ● ●
x 2 3	● ● ●
4 1 1	● ● ●
2 7 4 x	● ● ●
3 1 5 1	4 x 3

जानकी मैडम का हल देखते ही कक्षा में कोलाहल मच गया।

गुणा तथ्य (Multiplication Facts)

'इसमें नया क्या है? सीताराम सर का उत्तर भी यही तो आया था। चाहे 3×4 लिखो या फिर 4×3 लिखो, उत्तर तो 12 ही आता है। इसे हम गुणा तथ्य (Multiplication Facts) के रूप में बच्चों को बताते भी हैं।' सीमा मैडम ने झल्लाते हुए कहा। उन्होंने बोर्ड पर आकर गुणा तथ्य के कुछ उदाहरण चित्र बनाकर भी बताए। जहाँ 2×3 और 3×2 की समान मात्रा दिख रही थी।

2×3	● ● ●	3×2	● ●
3×2	● ● ●	1×6	● ● ● ● ● ●
6×1	● ● ● ● ● ●		

रघुवीर सर ने कहा, 'नहीं, जानकी मैडम ने सही किया है।'

'मुझे तो सीताराम सर का हल ज़्यादा ठीक लग रहा है', सादिक अली सर ने कहा।

कुछ देर तक पूरी कक्षा में गहमा-गहमी मची रही। कुछ लोगों का कहना था कि दहाई की संख्या से गुणा करते समय इकाई के स्थान पर कट्टम (cross) का चिह्न लगाते हैं। जबकि दूसरे पक्ष का कहना था कि कट्टम (\times) का चिह्न पुरानी किताबों में ही देखने को मिलता है। अब नई पाठ्यपुस्तकों में शून्य (0) का उपयोग किया जाता है। इसी तरह इन बिन्दुओं (dots) को गुणा में लिखने के तरीके पर भी कई मत निकलकर आ रहे थे।

ज़्यादातर का कहना था कि 3×4 और 4×3 दोनों एक ही हैं, क्योंकि दोनों का उत्तर 12 आता है। कुछ लोग दोनों को अलग मान रहे थे।

सही उत्तर क्या है, यह तो अभी तक स्पष्ट नहीं हो पाया था, लेकिन देवीलाल सर ने गुणा के सवालों पर आधारित सत्र में जान डाल दी थी। अब तक जिन लोगों को लग रहा था कि गुणा में सिर्फ बच्चों को ही चुनौतियाँ आती हैं, वे अपने शिक्षक साथियों को भी एक-दूसरे से उलझते हुए देखकर मंद-मंद मुस्करा रहे थे। देवीलाल जी ने इस मुद्दे पर सभी को संजीदा कर दिया था। गुणा के मुद्दे पर और गहराई से बात की जा सकती थी। शाम के पाँच बज चुके थे। आज के सत्रों का यहीं पर समापन किया गया। सभी को पढ़ने के लिए एक आलेख दिया गया। इस आलेख पर कल सुबह बात की जाएगी। सभी अपने-अपने घरों को चले गए।

सवाल : आपको क्या लगता है, किसका हल सही है और क्यों सही है?

2.5.3 आलेख- गुणा के मायने तथा सन्दर्भ (Meaning of Multiplication)

इस आलेख में गुणा के सवालों के मायने और सन्दर्भों के बारे में जानकारी दी गई थी। लेख इस प्रकार है— आम ज़िन्दगी में गुणा का उपयोग अलग-अलग संदर्भों / परिस्थितियों (contexts) में होता है। गुणा की पक्की समझ के लिए इन सन्दर्भों को समझना बहुत ज़रूरी है। बच्चों को इन सन्दर्भों के नाम या शब्दावली से परिचित कराने की ज़रूरत नहीं है, बल्कि इस तरह के अनुभवों पर आधारित उदाहरणों पर काम करने का अवसर देना चाहिए। हम गुणा को पाँच अलग-अलग सन्दर्भों में समझ सकते हैं।

1. बार-बार जोड़ना (Repeated Addition): गुणा की अवधारणा का बहुत शुरुआती सिरा पकड़ने के लिए एक बार फिर हम समूहीकरण (grouping) की अवधारणा पर लौटते हैं। समूहीकरण पर आधारित इन्हीं सवालों को हमने स्थानीय मान (place value) पर आधारित पाठ में भी उपयोग किया है। यहाँ पूछे जा रहे सवालों के जवाब तक पहुँचने के लिए हमारे पास क्या तरीके हैं? यदि प्रश्न यह है कि- बिना हर एक मोती को गिने, पता करो कि माला में कितने मोती हैं?



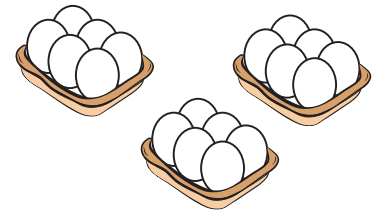
हम हर एक मोती को गिन नहीं सकते हैं। फिर क्या रास्ता बचता है? एक नज़र देखकर हम जान लें कि सफ़ेद मोतियों के पहले समूह में पाँच मोती हैं। आगे के समूहों में भी इतने ही मोती हैं।

$5+5+5+5$ मोती हैं।

या 4 बार 5 मोती हैं।

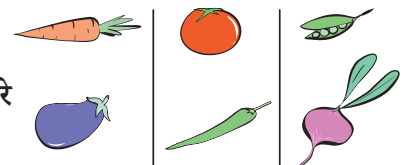
इसी तरह कुल अण्डों की संख्या $6+6+6$ है।

या 3 बार 6 अंडे हैं।



• दिए गए चित्र में सब्जियों की कुल संख्या बताओ।

• तीन टोकरियाँ हैं और उनमें क्रमशः 4 केले, 4 सेब और 4 संतरे हैं तो कुल कितने फल हुए?



यह कक्षा 3 की पाठ्यपुस्तक का एक अभ्यास है। पाँच बकरियों के कुल पैरों की संख्या ज्ञात की जा रही है। यह बार-बार जोड़ (Repeated addition) की प्रक्रिया है। इस प्रक्रिया की सहायता से बच्चों को 'बार' या 'गुना' जैसे शब्दों के सन्दर्भ से परिचित किया जाता है। इस तरह बार-बार जोड़ से होते हुए हम गुणा के निशान (×) के इस्तेमाल तक पहुँचते हैं।

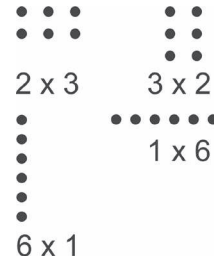


पैर ही पैर

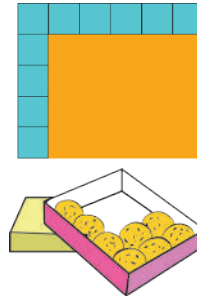
यहाँ पाँच बकरियाँ हैं।
इन सभी के मिलाकर कितने पैर होंगे?
 $4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$
या 4 का 5 गुना 20 है
या $5 \times 4 = 20$

Source: गणित का जादू, कक्षा 3, एनसीईआरटी

2. आयताकार जमावट (Rectangular Array): जब कई चीज़ें पंक्तियों (rows) व स्तम्भों (columns) के एक नियमित आयताकार समूह में जमी हों और हम पता करना चाहते हों कि कुल कितनी चीज़ें हैं। वस्तुओं को आयताकार संरचना में सजाने के साथ गुणा का सीधा संबंध है। इस तरह की जमावट आम ज़िंदगी में कई जगह देखने को मिलती है।



- स्कूल में सुबह की सभा में बच्चे कतारों में खड़े हैं। बच्चों की 6 कतारे हैं। हर कतार में 17 बच्चे हैं। सभा में कुल कितने बच्चे हैं?
- दिए गए क्षेत्र को वर्गाकार टाइलों से ढँकने के लिए कितनी टाइलों की ज़रूरत होगी?
- इस डिब्बे में कुल कितने लड्डू आ सकते हैं?



3. मापक (Scaling): जब हमें एक राशि दी गई है और हमें पता करना है कि उसे एक निर्धारित गुणक (Multiplying factor) से बढ़ाया जाए तो वह कितनी होगी।

उदाहरण: गौरव ने अपनी माँ की साड़ी की बॉर्डर पर लगाने के लिए चमकीली पट्टियाँ खरीदीं। एक पट्टी में 7 छोटे गोल आईने लगे हैं। माँ की साड़ी की बॉर्डर पट्टी से 5 गुना लंबी है तो बॉर्डर पर कुल कितने आईने होंगे?



इन दो सवालों के माध्यम से हम मापक (scaling) को और बेहतर समझ सकते हैं।

- एक फल की दुकान पर 1 किलोग्राम केलों की कीमत 30 रुपये है। यहाँ सेब की कीमत केलों की कीमत से पाँच गुना है। बताओ एक किलोग्राम सेब का दाम क्या होगा?
- जयपुर से निवाई की दूरी 69 किलोमीटर है। जयपुर से दिल्ली की दूरी, जयपुर से निवाई की दूरी से चार गुना है तो बताओ जयपुर से दिल्ली की दूरी कितनी है?

गुणा के मापक सन्दर्भ में मात्रा सिर्फ बढ़ती ही नहीं है, बल्कि किन्हीं परिस्थितियों में वह कम भी हो सकती है। आमतौर पर प्राथमिक कक्षाओं में ऐसे ही उदाहरण आते हैं जहाँ गुणा किए जाने पर मात्रा बढ़ रही होती है, लेकिन भिन्न या परिमेय संख्याओं के सन्दर्भ में देखें तो हम पाएंगे कि गुणा करने के बाद प्राप्त होने वाला

गुणनफल छोटा भी हो सकता है। उदाहरण के लिए 2 बार 6 के लिए $2 \times 6 = 12$ होगा। जबकि $1/2$ के लिए $1/2 \times 6 = 3$ होता है।

4. **दर (Rate):** जब हमें यह पता हो कि एक समूह में कितनी चीज़ें हैं और हम यह पता करना चाहते हों कि उसी तरह के कई समूहों में कुल मिलाकर कितनी चीज़ें होंगी।

उदाहरण : एक होटल में 12 टेबल हैं, प्रत्येक टेबल के साथ 4 कुर्सियाँ हैं तो बताओ होटल में कुल कितनी कुर्सियाँ हैं?

- रेल के एक डिब्बे के 8 पहिए हैं तो बताओ 6 डिब्बों के कितने पहिए होंगे?
- चार तिकोनों में कुल मिलाकर कितने कोने हो जाएंगे?



Source: गणित की मजेदार दुनिया, कक्षा 3, राजस्थान

5. कार्तीय गुणन (Cartesian Product)

जब हमें क्रमित जोड़ियों की संख्या का पता लगाना हो। इस तरह की परिस्थितियाँ आम जिन्दगी में होती हैं जहाँ हमें गुणा करना पड़ता है।

उदाहरण: आनंद 3 अलग-अलग आकार के डोसे बनाता है और उनमें 4 अलग-अलग किस्म का मसाला भरता है, तो कितनी किस्म के डोसे बनेंगे?

सवाल: रमजान यात्रा पर जाते समय 2 पैट तथा 3 कमीज़ लेकर निकला है। वह इन कपड़ों को अधिकतम कितने अलग-अलग संयोजनों से पहन सकता है?

	कमीज 1	कमीज 2	कमीज 3
पैट 1	पहला संयोजन	दूसरा संयोजन	तीसरा संयोजन
पैट 2	चौथा संयोजन	पॉचवा संयोजन	छठवाँ संयोजन

इस टेबल से हम समझ सकते हैं कि रमजान अपने दो पैट और तीन कमीज़ को 6 अलग-अलग तरह से पहन सकता है। इस परिस्थिति को भी $2 \times 3 = 6$ के रूप में लिखा जा सकता है। कक्षा में बच्चों के साथ इस तरह के सन्दर्भ पर भी काम किया जाना चाहिए ताकि वे गुणा की अवधारणा को कार्तीय गुणन के रूप में भी समझ सकें। दैनिक जीवन से जुड़ते हुए ऐसे ही अनुभवों को आधार बनाकर आगे गणित की कक्षाओं में कार्तीय गुणन (Cartesian product) पर आधारित सवालों को समझने में मदद मिलेगी।

सवाल : इस कार्यपत्रक में कुछ सवाल दिए गए हैं, इन सवालों के सन्दर्भ पहचानिए।

- बार-बार जोड़
- आयताकार जमावट
- मापक
- दर
- कार्तीय गुणन

प्रश्न: ऐसे ही पाँच ट्रे में कितने गिलास होंगे?

प्रश्न: ऐसे ही तीन गुलदस्ते में कितने फूल होंगे?

प्रश्न: इस डिब्बे में कितने लड्डू आ सकते हैं?

प्रश्न: लाली ने अपने पिता के लिए 9 मीटर पगड़ी का कपड़ा खर है, लाली को कितने रुपये देने होंगे?

प्रश्न: ईंटों के इन तीनों चट्टों में कुल कितनी ईंटें हैं?



Source: गणित की मजेदार दुनिया, कक्षा 4, राजस्थान

कार्यशाला का चौथा दिन

अगले दिन सुबह 9 बजे से कार्यशाला के सत्र शुरू हुए।

देवीलाल सर और सुषमा मैडम ने सभी संभागियों का

स्वागत किया। सबसे पहले एक सामूहिक गीत गाया गया— मैं तुमको विश्वास दूँ, तुम मुझको विश्वास दो..

इसके बाद सभी की उपस्थिति दर्ज की गई। फीडबैक सत्र शुरू करते हुए दक्ष प्रशिक्षिका सुषमा मैडम ने सभी

से पूछा- कल के सत्र उन्हें कैसे लगे तथा ऐसी कौन-सी बातें हैं जो उन्हें समझने में परेशानी हुई? सुषमा मैडम

ने कल वितरित किए गए आलेख के बारे में भी पूछा। सिर्फ कुछ लोग ही इसे पढ़कर आए थे।

‘कल शुरू में पूछे गए दोनों सवालों को हल किया गया था। कौन-सा हल सही है, यह नहीं बताया आप लोगों ने? आज इस पर भी बात कीजिएगा।’ – जगत सिंह बिष्ट सर ने कहा।

प्रशिक्षक देवीलाल जी ने कहा, ‘हाँ, आज इस मुद्दे पर भी आगे बात करेंगे।’

संगीता मैडम लेख पढ़कर आई थीं। उन्होंने बताया कि यह लेख उन्हें बहुत उपयोगी लगा। सभी उदाहरण भी बहुत अच्छे थे। वे पहली से पाँचवीं कक्षा को गणित पढ़ाती हैं। सभी सन्दर्भों पर आधारित सवाल तीसरी, चौथी और पाँचवीं कक्षा की किताबों में दिए गए हैं, लेकिन कार्तीय गुणन पर आधारित सवाल नहीं दिया गया है, ऐसा क्यों?

सुषमा जी ने सहमति जताते हुए बताया, ‘तीसरी से पाँचवीं कक्षा के दौरान इन सभी सन्दर्भों से बच्चों को परिचित कराया जाना चाहिए, लेकिन कई पाठ्यपुस्तकों में कुछ सन्दर्भ छूट जाते हैं। कार्तीय गुणन (Cartesian Product) पर आधारित सवाल प्राथमिक कक्षाओं से ऊपर की पुस्तकों में तो ज़रूर मिलते हैं, लेकिन कई बार प्राथमिक कक्षाओं में ये नहीं मिलते हैं। फिर भी हमें इस तरह के सवाल पूछने चाहिए।’

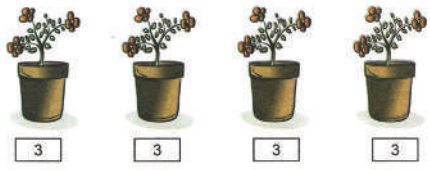
2.5.4 गुणा की अवधारणा और गणितीय निरूपण

ऐसे ही कुछ और सवाल-जवाब के बाद सुषमा मैडम ने आज के सत्र की शुरुआत की। आज कक्षा-कक्ष में गुणा की अवधारणा से परिचय के मुद्दे पर बात शुरू की गई। सुषमा मैडम ने प्रोजेक्टर पर कुछ अभ्यास दिखाते हुए अपनी बात शुरू की, ‘तस्वीर में 4 गमले हैं, प्रत्येक में 3 गुलाब के फूल हैं। इस बात को हम गणित के अंक व हिंदी भाषा के शब्द के मेल से लिख सकते हैं।’

$$= 4 \text{ बार } 3$$

$$= 3+3+3+3$$

$$= 12 \text{ फूल (ध्यान दें अभी गुणा शब्द और } \times \text{ चिह्न का इस्तेमाल नहीं किया जा रहा है)}$$



प्रत्येक गमले में कितने फूल हैं ? =

फूल लगे गमले कितने हैं ? = कुल कितने फूल हैं?

अतः = 4 बार 3
 = 3 + 3 + 3 + 3
 = 12 फूल

उदाहरण 2 यदि एक पैकेट में 10 पेन हैं तो ऐसे 5 पैकेट में कितने पेन होंगे ?



पेनों के पैकेटों की संख्या = 5
 प्रत्येक पैकेट में पेन = 10
 सभी पेनों की संख्या = 10 + 10 + 10 + 10 + 10
 = 50
 अर्थात् 5 बार 10
 = 50 पेन

Source: गणित की मजेदार दुनिया, कक्षा 3, राजस्थान

‘इस उदाहरण में हम बार-बार जोड़ का उपयोग कर रहे हैं। इस तरह के कुछ और अभ्यास करने के बाद हम बच्चों से अपेक्षा कर सकते हैं कि वे $3+3+3+3$ को 4 बार 3 के रूप में भी लिख सकेंगे।’

कुछ कथनों को आधार बनाकर हम उनके गणितीय निरूपण की तरफ बढ़ने में मदद करेंगे।

उदाहरण: एक समूह में 5 नींबू हैं, ऐसे 3 समूह रखे हैं। कुल कितने नींबू हैं?

$$5+5+5= 15$$

$$3 \text{ बार } 5= 15$$

$$3 \times 5= 15$$

‘देखिए, किस तरह हम बार-बार जोड़ (Repeated Addition) की अवधारणा से होकर गुणा (Multiplication) की अवधारणा पर आ गए हैं। बच्चों के साथ भी इस तरह का काम कुछ दिन लगातार करना होगा। यह बार-बार जोड़ करने का काम कुछ रोचक गतिविधियों के सहारे भी किया जा सकता है। इस तरह बच्चों को पहाड़े बनाने (Multiplication tables) का तरीका भी समझने का अवसर मिलेगा।’ – सुषमा जी ने कहा।

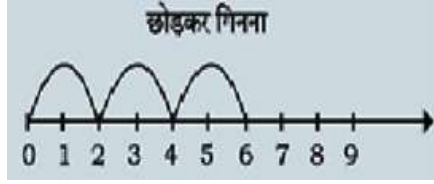
(i).	$3 + 3 + 3 + 3 + 3 =$	<input type="text" value="15"/>
	5 बार 3 =	<input type="text" value="15"/>
	5 गुणा 3 =	<input type="text" value="15"/>
	5 X 3 =	<input type="text" value="15"/>
(ii).	$4 + 4 + 4 =$	<input type="text"/>
	3 बार 4 =	<input type="text"/>
	3 गुणा 4 =	<input type="text"/>
	3 X 4 =	<input type="text"/>

2.5.5 पहाड़े बनाना (Multiplication Tables)

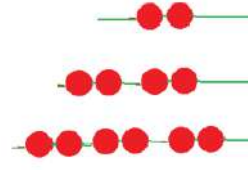
‘पहाड़ा सिखाने की एक अच्छी गतिविधि है, मैंने अपनी कक्षा में इसे उपयोग किया है’, मुकेश भंडारी सर ने कहा।

सुषमा मैडम ने मुकेश सर को यह गतिविधि सदन के सामने साझा करने के लिए आमंत्रित किया। मुकेश सर ने टीएलएम में रखी मोतीमाला को उठाया और उसे कमरे में बाँध दिया। उन्होंने बताया कि सबसे पहले वे दो-दो मोतियों को सरकाते हुए बच्चों को दिखाते हैं और पूछते हैं कि कितने मोती हुए हैं। इसी तरह तीन-तीन मोती सरकाते हुए भी पूछते हैं कि अब कितने मोती हुए हैं। इस तरह 2 और 3 का पहाड़ा बनता है। मुकेश सर ने बताया कि वे बच्चों को भी मोतीमाला पर ऐसा ही करने का अवसर देते हैं। साथ ही श्यामपट्ट पर पहाड़ों को लिखते भी जाते हैं।

- 1 गुणा 2 $1 \times 2 = 2$
 2 गुणा 2 $2 \times 2 = 4$
 3 गुणा 2 $3 \times 2 = 6$
 इसी तरह आगे भी



Source: अज़ीम प्रेमजी फाउंडेशन, राजसमन्द



Source: सीखने के प्रतिफल, एनसीईआरटी

सुषमा मैडम ने याद दिलाया, ‘कल हमने संख्या रेखा पर छोड़कर गिनने (skip counting) और बार-बार जोड़कर गिनने (repeated addition) के तरीके पर बात की थी। मुकेश सर द्वारा मोतीमाला पर की गई यह गतिविधि भी इन्हीं अवधारणाओं पर आधारित है।’

मुकेश सर अभी अपनी गतिविधि बताकर बैठते, इससे पहले ही कावेरी पन्त मैडम ने अपना हाथ खड़ा कर दिया। वे भी अपनी कक्षा में पहाड़ा सिखाने के लिए एक अच्छी गतिविधि करती हैं। कावेरी पन्त मैडम ने कहा, ‘मैं तो पाँच रुपये का टीएलएम इस्तेमाल करती हूँ।’ सभी उनकी बात ध्यान से सुनने लगे। उन्होंने अपने पर्स से नीले रंग के बटनों का एक पैकेट निकाला और उसे टेबल पर जमा दिया। वे इन बटनों के समूह की तरफ इशारा करते हुए पहाड़े बोलने लगीं।

- 1 बार 3 या $1 \times 3 = 3$
 2 बार 3 या $2 \times 3 = 6$
 3 बार 3 या $3 \times 3 = 9$
 4 बार 3 या $4 \times 3 = 12$



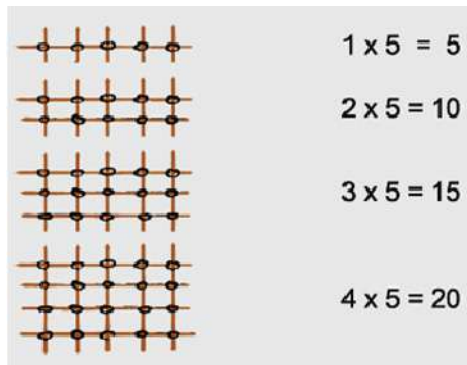
Source: गणित को-डेव मॉड्यूल, अज़ीम प्रेमजी फाउंडेशन

इसी तरह आगे भी...

सभी लोगों ने मुकेश सर और कावेरी मैडम के लिए ताली बजाई। सुषमा मैडम ने कहा कि बच्चों को पहाड़े सिर्फ रटवाना नहीं चाहिए। बार-बार जोड़ की अवधारणा का इसी तरह उपयोग करते हुए हम बच्चों को पहाड़ा बनाना भी सिखाएंगे तो बहुत अच्छा होगा। एक बार वे पहाड़ा बनाना सीख गए तो आगे अपनी ज़रूरत के अनुरूप किसी भी संख्या का पहाड़ा बना सकेंगे। इसे समझने के साथ ही यदि वे पहाड़ों को याद करते हैं तो बहुत अच्छा होगा। ये पहाड़े गुणा और भाग के सवाल में बहुत काम आते हैं। दैनिक जीवन में भी हिसाब-किताब करते समय हम इनका इस्तेमाल करते हैं।

सुषमा मैडम संभागियों की तरफ देखकर अपनी बात कह रही थीं। उधर पीछे श्यामपट्ट पर देवीलाल सर ने चॉक से कुछ आड़ी-खड़ी लकीरें खींच डाली थीं।

‘मेरे पास तो पुरानी झाड़ू की सीके हैं। मैंने अपनी कक्षा में उन्हीं से पहाड़े सिखाए हैं।’ – देवीलाल सर ने यह बताते हुए श्यामपट्ट पर सीके बनाकर लिख डाला। उन्होंने बताया कि कंकड़, कंचे, पत्तियाँ या ऐसी ही कोई भी सामग्री का



Source: गणित की मजेदार दुनिया, कक्षा 3, राजस्थान

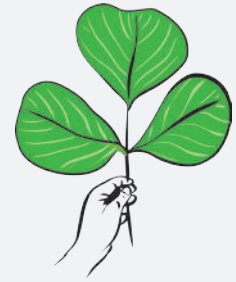
इस्तेमाल करके हम कक्षा में पहाड़े बनाना सिखा सकते हैं। अच्छे रंगीन टीएलएम लेकर काम करने से बच्चे और भी रुचि के साथ शामिल होते हैं। पहाड़े बनाने के ऊपर बहुत अच्छी चर्चा हो गई थी। सभी ने इस चर्चा को ध्यान से सुना और अपनी कॉपी में नोट भी किया।



गतिविधि: पत्तियों के समूह गिनकर पहाड़े बनाना

पर्यावरण अध्ययन में हम बच्चों को अपने आस-पास के पेड़-पौधों, पत्तियों और फूलों के अवलोकन करने के अवसर बनाते हैं। साथ ही इस अवलोकन के आधार पर कक्षा में कई अवधारणाओं पर बातचीत और काम करते हैं। यह अवलोकन गणित विषय की अवधारणाओं को समझने/समझाने में भी बहुत उपयोगी हो सकता है। हम पत्तियों की सहायता से गुणा सीखने और पहाड़े बनाने पर काम कर सकते हैं।

ये पलाश के पत्ते हैं। पलाश के पत्ते 3-3 के झुण्ड में लगते हैं। इस तरह बेलपत्ती के पत्ते भी 3-3 के झुण्ड में लगते हैं। इमली, गुलमोहर, नीम आदि पेड़ों पर छोटी-छोटी पत्तियाँ होती हैं। ये पत्तियाँ 2-2 की जोड़ी में एक दूसरे के सामने लगती हैं।



इमली की एक टहनी पर कितनी पत्तियाँ होंगी? (अंदाज़ा लगाकर जवाब दो)

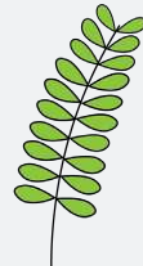
इमली की एक टहनी लेकर नीचे से गिनना शुरू करो।

पहली जोड़ी तक, एक जोड़ी में

दूसरी जोड़ी तक, दो जोड़ी में

तीसरी जोड़ी तक, तीन जोड़ी में

इस तरह हम और भी आगे बढ़ सकते हैं। इस जानकारी को इस टेबल में लिख सकते हैं।



इमली

एक जोड़ी	दो जोड़ी								
2	4								

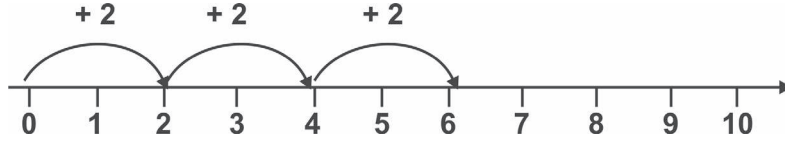
इस तरह हम 2 का पहाड़ा भी बना सकते हैं। इसी तरह 3 का पहाड़ा भी बनाया जा सकता है।

सवाल- 12 जोड़ी वाली इमली की टहनी में कितनी पत्तियाँ हैं?

इसी समझ के आधार पर संख्या रेखा का उपयोग करते हुए गुणा की अवधारणा पर काम किया जा सकता है और पहाड़े बनाना भी सिखाया जा सकता है। संख्या रेखा बराबर इकाइयों में बँटी है। यहाँ पर 0 से 10 या इससे आगे भी संख्याएँ निरूपित की जा सकती हैं। इमली की पत्तियाँ 2-2 की जोड़ी में हैं।

क्रमवार जोड़ियों को गिनते हुए कुल पत्तियों की जानकारी टेबल में दर्ज की गई है। इसे हम संख्या रेखा पर 2- 2 की कूद के रूप में दर्शा सकते हैं।

- 1 बार 2, $1 \times 2 = 2$
- 2 बार 2, $2 \times 2 = 4$
- 3 बार 2, $3 \times 2 = 6$
- 4 बार 2, $4 \times 2 = 8$



इस तरह हम संख्या रेखा के उपयोग से पहाड़े बनाने के तरीके पर काम कर सकते हैं।

बड़ी संख्याओं के पहाड़े बनाना

‘हमारे बचपन में तो सब बच्चों को 20 तक पहाड़े ज़रूर याद कराए जाते थे। जब तक याद नहीं होते थे, रोज़ पिटाई होती थी। आजकल तो हम बच्चों को मार भी नहीं सकते।’ – शंकर लाल नेगी सर ने कहा।

‘बच्चों को मारने से समस्या का समाधान नहीं होगा। बिना समझे यदि उन्होंने डर से पहाड़ों को रटकर याद भी कर लिया तो वह गणित सीखना नहीं हुआ। बच्चे पहाड़े की अवधारणा समझें, उसे बनाना सीखें। हम बच्चों को छोटे पहाड़े की सहायता से बड़े पहाड़े बनाना भी सिखा सकते हैं।’ – सुषमा मैडम ने कहा।

सुषमा मैडम ने श्यामपट्ट पर एक टेबल बनाई और उसमें 5 और 3 का पहाड़ा लिख दिया। फिर 5 और 3 के पहाड़े का जोड़ करते हुए 8 का पहाड़ा भी बनाकर दिखाया।

5 का पहाड़ा	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
3 का पहाड़ा	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
8 का पहाड़ा	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80

सभी लोगों को छोटी संख्याओं के पहाड़े से बड़ी संख्या का पहाड़ा बनाने का यह तरीका बहुत पसंद आया।

सवाल : इसी तरह 6 और 7 के पहाड़े की सहायता से 13 का पहाड़ा बनाइए।

सुषमा मैडम ने इस सवाल का समेकन करते हुए बताया कि गुणा के सवाल में गुणक, गुण्य और गुणनफल (multiplier, multiplicand and product) को समझना भी ज़रूरी है। जिस संख्या से गुणा किया जाता है, वह गुणक कहलाती है। जिस संख्या का गुणा किया जाता है, वह गुण्य कहलाती है। यानी किसी समूह में चीज़ों की संख्या गुण्य है और ऐसा समूह जितनी बार हो, वह गुणक है। गुणक से गुण्य का गुणा करने से जो परिणाम प्राप्त होता है, वह गुणनफल कहलाता है।

गुणा (Multiplication):

गुणक (Multiplier): जिस संख्या से गुणा किया जाता है, वह गुणक कहलाती है।

गुण्य (Multiplicand): जिस संख्या का गुणा किया जाता है, वह गुण्य कहलाती है।







गुणनफल (Product): गुणक से गुण्य का गुणा करने से जो परिणाम प्राप्त होता है, वह गुणनफल कहलाता है।

उदाहरण के लिए $15 \times 7 = 105$ को देखें।

यहाँ पर 15 गुणक है, 7 गुण्य है और गुणनफल है 105।

सुषमा मैडम ने यह भी बताया कि गुणा की अवधारणा पर बच्चों की पकड़ी समझ बनाने के लिए यह ज़रूरी है कि हम पहले ठोस वस्तुओं और चित्रों की सहायता से काम करें। इस तरह पहाड़ों का सन्दर्भ और मायने समझने से वे ज़्यादा बेहतर सीखेंगे। सीधे मानक विधि (standard algorithm) पर जाने की जल्दबाज़ी नहीं करनी चाहिए।

पीपीटी प्रदर्शन: ये सब बातें रखते हुए सुषमा मैडम ने अपनी कक्षा में बच्चों के साथ की गई गतिविधियों की तस्वीर व कार्यपत्रक भी प्रोजेक्टर द्वारा दिखाए। ये कार्यपत्रक कक्षा 2 और 3 के साथ इस्तेमाल किए गए थे।

<p>• कितनी बार ?</p> <p>2 मटकों के 3 समूह, यानी, 2 मटके 3 बार</p> <p>• आम के समूह यानी, आम बार</p> <p>• गुब्बारों के समूह यानी, गुब्बारे बार</p>	  	<p>• कितने सेब ?</p> <p>..... सेबों के समूह</p> <p><input type="text"/> + <input type="text"/> = <input type="text"/></p> <p>• कितने पेन ?</p> <p>..... पेनों के समूह</p> <p><input type="text"/> + <input type="text"/> = <input type="text"/></p> <p>• कितने कछुए ?</p> <p>..... कछुओं के</p> <p><input type="text"/> + <input type="text"/> = <input type="text"/></p>	  
--	--	---	---



$$2 \times 5 = 10$$



$$4 \times 5 = 20$$

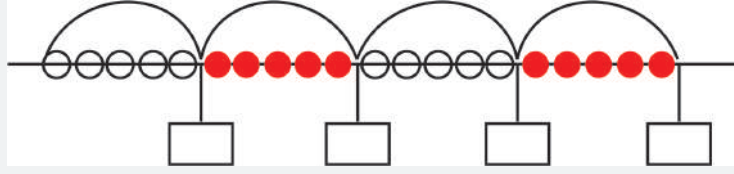
Source: अज़ीम प्रेमजी फाउंडेशन, राजसमन्द

ठोस वस्तुओं और चित्रों की सहायता से किए गए ऐसे अभ्यासों से बच्चे क्या सीख रहे होंगे? इस तरह के और कौन-से अभ्यास लिए जा सकते हैं? इन सभी सवालों पर विस्तार से बात की गई। इस तरह यह सल पूरा हुआ।

गतिविधि: मोतीमाला की सहायता से पहाड़े बनाना

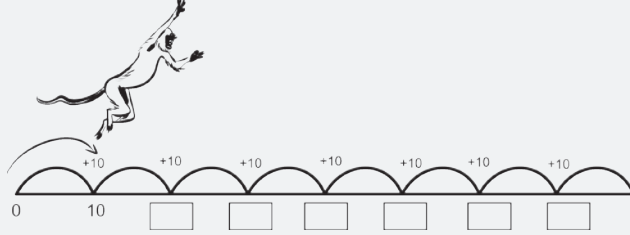
मोतीमाला पर मोतियों को गिनते हुए बराबर समूह बनाने का अवसर दें। इन समूहों को बार-बार जोड़कर गुणा करने के तरीके से परिचय कराएँ। इस उदाहरण को देखिए। मोतीमाला पर पाँच-पाँच के समूहों में मोतियों को गिनते हुए बार-बार जोड़ा जा रहा है। खाली कार्ड में कुल मोतियों की संख्या लिखनी है। इस तरह हम अपनी कक्षा के बच्चों को पहाड़े बनाने की प्रक्रिया से परिचित करा सकते हैं।

$1 \times 5 = 5$
 $2 \times 5 = 10$
 $3 \times 5 = 15$



इस तरह के अभ्यासों के बाद संख्या रेखा से परिचय कराया जाए। यहाँ हम वस्तुओं की जगह संख्या का उपयोग करेंगे। दिए गए उदाहरण में एक बन्दर दस-दस की कूद कर रहा है। यहाँ बच्चे बार-बार जोड़ करते हुए खाली स्थान में संख्या लिखेंगे। संख्या रेखा के प्रयोग से गुणा की समझ पर काम किया जाए, साथ ही पहाड़े बनाने का तरीका भी समझाएँ। इसी तरह कुछ संख्याएँ लिखकर और कुछ खाली जगह छोड़कर उन्हें भरने का अवसर दें।

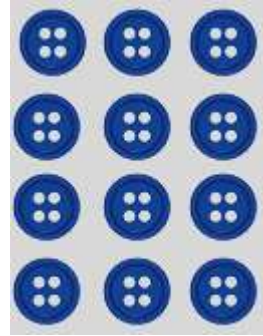
इस तरह के कई अभ्यासों से गुजरते हुए, आगे चलकर बच्चे संख्या रेखा को अमूर्त रूप में भी उपयोग कर सकेंगे।



2.5.6 गुणा में क्रम विनिमय का नियम (Commutative Law)

अगले सत्र में देवीलाल सर ने गुणा में क्रम विनिमय (Commutative) और साहचर्य (Associative) के नियम पर बात की। उन्होंने मेज पर जमाकर रखे हुए बटनों की तरफ इशारा करते हुए पूछा कि इसे गुणा में कैसे लिखेंगे? कोई बोर्ड पर आकर लिख दे।

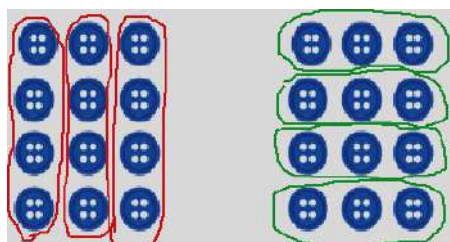
कीर्तिमान नेगी सर ने लिखा- 4×3
 जबकि शीला मैडम ने लिखा- 3×4



सदन में बैठे कुछ लोग दोनों उत्तर सही मान रहे थे। पूछने पर उन्होंने बताया कि दोनों में उत्तर 12 आता है। अतः दोनों का तरीका सही है। उन्होंने कहा कि इसी सवाल पर कल भी चर्चा हुई थी। कोई समाधान नहीं निकला था।

अब देवीलाल सर ने बोर्ड पर ऐसे ही दो चित्र बना दिए। फिर चॉक से घेरा बनाकर बटनों के समूह दर्शा दिए। एक चित्र में उन्होंने 4 बटनों के 3 समूह दर्शाए थे, जबकि दूसरे चित्र में 3 बटनों के 4 समूह दर्शाए थे। इन कथनों को लिखकर उन्होंने गणितीय निरूपण करने के लिए संभागियों को आमंत्रित किया। दो संभागियों ने बोर्ड पर आकर हल कर दिया। अब तक हुई बात के आधार पर उन्होंने इस प्रकार लिखा था:

$3 \text{ बार } 4 = 12$ $4 \text{ बार } 3 = 12$
 $3 \times 4 = 12$ $4 \times 3 = 12$



देवीलाल सर ने कहा, 'हम 3 बार 4 लिखें या 4 बार 3, यह इस पर निर्भर करता है कि प्रत्येक समूह में कितनी वस्तुएँ हैं और वैसे समूह कितने हैं। गौर से देखने पर हम पाएंगे कि दोनों एक ही बात नहीं हैं।' दोनों स्थितियों में समूह में वस्तुओं की मात्रा अलग है और समूहों की संख्या भी अलग है। लेकिन दोनों ही स्थितियों में कुल बटन की संख्या 12 ही है। यह गुणा में क्रम विनिमय का नियम कहलाता है। इसलिए हम 3×4 को 4×3 के बराबर ही मानते हैं।

2.5.7 गुणा में साहचर्य का नियम (Associative Law)

'आपने गुणा में साहचर्य के नियम के बारे में पढ़ा होगा, यह क्या है? कोई बताएगा।' देवीलाल जी ने कहा।

भँवरपाल जी उठकर बोर्ड पर आए और $(xy)z = x(yz)$ लिख दिया।

'यह क्या है? समझाइए तो ...', सामने बैठी एक शिक्षिका ने कहा।

बाईं तरफ पहले x को y से गुणा किया, फिर मिले उत्तर को z से गुणा किया। दाहिनी तरफ पहले y को z से गुणा किया जा रहा है। फिर जो उत्तर मिल रहा है उसे x से गुणा किया जा रहा है।' - भँवर पाल जी ने बताया।

'छोड़ो ... कोई संख्या लेकर बता दो न', सामने बैठी फरज़ाना मैडम ने कहा।

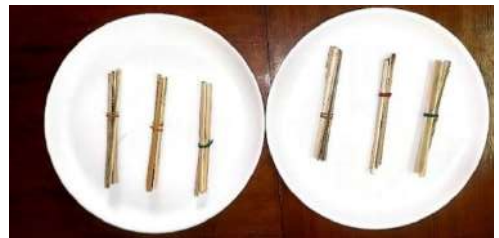
देवीलाल सर ने फरज़ाना मैडम को गुणा में साहचर्य का नियम बताने के लिए कहा। फरज़ाना मैडम ने बहुत ही सहजता से भँवरपाल सर द्वारा लिखी गई बात (जो बीजगणित में थी) को संख्याओं में ही लिख दिया।

$$3 \times (4 \times 2) = 24 = (3 \times 4) \times 2$$

'बराबर के दोनों तरफ तीन संख्याओं का गुणा किया जा रहा है। ऐसी स्थिति में दोनों तरफ उत्तर बराबर आता है। इसे ही गुणा में साहचर्य का नियम कहते हैं।' फरज़ाना मैडम ने कहा।

देवीलाल सर ने इस बात से सहमति जताई, लेकिन वे गुणा में साहचर्यता के विचार पर थोड़ी और गहराई से बात करना चाहते थे। उन्होंने 4 आइसक्रीम की तीलियों पर रबर बैंड चढ़ाकर ऐसे 6 बण्डल बना लिए। फिर 2 अलग-अलग प्लेटों में इन्हें रख लिया। अब उन्होंने फरज़ाना मैडम को बुलाकर उनसे तीलियों की कुल संख्या बताने को कहा। 'दोनों प्लेटों में बारह-बारह तीलियाँ हैं। इस तरह कुल 24 तीलियाँ हैं।' फरज़ाना मैडम ने कहा।

'जी हाँ, इस सन्दर्भ में 24 तीलियों तक पहुँचने की इस प्रक्रिया को हम गणितीय रूप में लिखने का प्रयास करेंगे। हमारे सामने 2 प्लेटें हैं, प्रत्येक प्लेट में 3 बण्डल हैं और हर बण्डल में 4 तीलियाँ हैं। तीलियों की कुल संख्या की गिनती दो तरीके से की जा सकती है।' प्लेट में रखी सीकों की तरफ ध्यान दिलाते हुए देवीलाल सर ने कहा।



source: अज़ीम प्रेमजी फाउंडेशन, राजसमन्द

2 प्लेटों में 3-3 बण्डल हैं, प्रत्येक बण्डल में 4 सीक हैं। हम पहले कुल प्लेटों की संख्या (2) को एक प्लेट में रखी कुल बण्डलों की संख्या (3) से गुणा कर लेंगे। इस तरह मिलेगा 2×3 । अब इसे एक बण्डल में रखी सीकों की संख्या 4 से गुणा कर देंगे। इसे हम $(2 \times 3) \times 4$ के रूप में लिख लेंगे। इस प्रकार दोनों प्लेटों में कुल 24 सीके हैं।

इसी प्रक्रिया को हम दूसरी तरह से भी देख सकते हैं। एक प्लेट में कुल 3 बण्डल हैं और प्रत्येक बण्डल में 4 सीके हैं, इस प्रकार हमें (3×4) मिलेगा।

क्योंकि बण्डलों की यह व्यवस्था 2 प्लेटों में है, अतः हम इसे 2 से गुणा भी करेंगे, इसे हम $2 \times (3 \times 4)$ के रूप में लिख लेंगे। इस तरह भी हमें 24 सीके मिलेंगी। इसलिए इस पूरी प्रक्रिया को हम गणितीय रूप से $(2 \times 3) \times 4 = 2 \times (3 \times 4)$ लिखते हैं। इसे हम गुणा में साहचर्य का नियम कहते हैं।

2.5.8 गुणा का वितरण नियम (Distributive Law)

इसी कड़ी में देवीलाल सर ने गुणा के वितरण का नियम (Distributive Law) की तरफ भी सभी का ध्यान दिलाया। पिछले सत्र में बोर्ड पर एक टेबल बनाई गई थी, जिसकी सहायता से बड़ी संख्याओं के पहाड़े बनाना सिखाने पर बात की गई थी। देवीलाल सर ने इसी टेबल की तरफ सभी का ध्यान आकर्षित किया और बोर्ड पर एक सवाल लिखा।

5 का पहाड़ा	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
3 का पहाड़ा	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
8 का पहाड़ा	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80

सवाल: $9 \times 8 = \dots\dots\dots$

‘ $9 \times 8 = 72$ होता है।’ सभी ने एक स्वर में कहा।

‘हाँ, लेकिन इस टेबल की सहायता से हम इसे यँ भी हल कर सकते हैं:’

$9 \times 8 = \dots\dots\dots$

$= 9 \times (5 + 3)$ (संख्या 8 को तोड़कर 5+3 के रूप में लिख सकते हैं)

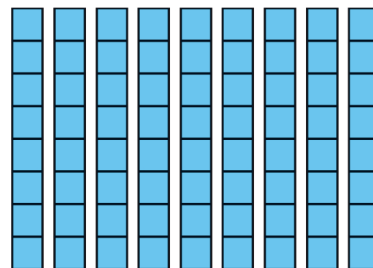
$= 9 \times 5 + 9 \times 3$ (संख्या 9 से 5 और 3 दोनों को गुणा करना होगा)

$= 45 + 27$

$= 72$

2.5.9 डीन्स ब्लॉक का उपयोग

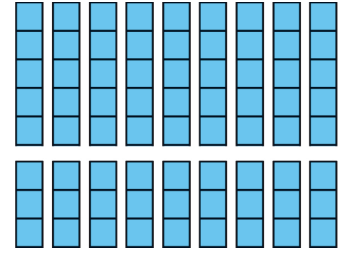
देवीलाल सर ने $9 \times 8 = 9 \times (5 + 3)$ की इस प्रक्रिया को डीन्स ब्लॉक की सहायता से भी समझाया।



सबसे पहले उन्होंने 9×8 यानी 9 बार 8 इकाइयों को दर्शाया। ये मिलकर कुल 72 इकाइयाँ हुई हैं। स्थानीय मान के नियम अनुसार हमें दस वस्तुओं का समूह बनाना होगा, जिसे हम दहाई कहते हैं। बची हुई इकाइयों को अलग रखेंगे।

इस तरह 7 दहाइयाँ और 2 इकाइयाँ बनेंगी। जिसे संख्या के रूप में 72 लिखा जाएगा।

अब इतनी ही मात्रा को हम नई तरह से भी दर्शा सकते हैं। यहाँ पहले 9 बार 5 इकाइयाँ हैं, फिर 9 बार 3 इकाइयाँ हैं। 9 बार 5 इकाइयों से मिलकर 45 बनेगा और 9 बार 3 इकाइयों से मिलकर 27 बनेगा।



$$\begin{aligned} 9 \times (5+3) \\ = 9 \times 5 + 9 \times 3 \\ = 45+27 \end{aligned}$$

इस तरह कुल 7 दहाइयाँ और 2 इकाइयाँ बनेगी।
इसे हम संख्या 72 लिखेंगे।

सवाल: नीचे दिए सवालों को देखकर बताइए, कहाँ पर क्रम विनिमय, कहाँ साहचर्य और कहाँ वितरण का नियम है?

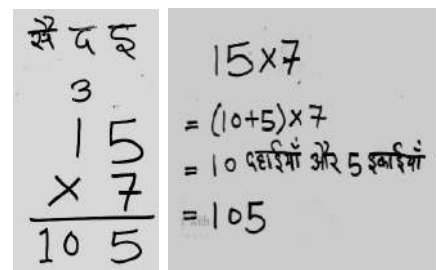
- (i) $2 \times 7 = 7 \times 2$
- (ii) $5 \times (4 \times 3) = 3 \times (5 \times 4)$
- (iii) $5 \times (4+5)$
- (iv) $8 \times (4+3)$
- (v) $6 \times 7 = 7 \times 6$
- (vi) $9(5 \times 7) = (9 \times 5) \times 7$

2.5.10 गुणा करने के तरीके

बहुत देर से नियमों की बात की जा रही थी। कुछ लोग उबासी लेने लगे थे। अतः अगले सत्र में सुषमा मैडम ने रोचक गतिविधि से अपनी बात शुरू की। उन्होंने सभी को हल करने के लिए दो सवाल दिए। पहले में दो अंकों की संख्या में एक अंक की संख्या का और दूसरे में दो अंकों की संख्या में दो अंकों की संख्या का गुणा करना था।

$15 \times 7 = \dots\dots\dots$ और $27 \times 18 = \dots\dots\dots$

सभी ने बहुत फुर्ती से इन सवालों को हल कर लिया। सुषमा मैडम ने अल्लाफ हुसैन सर को आमंत्रित किया और अपना तरीका बताने के लिए कहा। अल्लाफ जी का तरीका इस प्रकार था। उन्होंने बताया कि गुणा के वितरण के नियम का उपयोग करते हुए वे अपने हल तक पहुँचे हैं।



इसी सवाल को हल करने के लिए संगीता मैडम को भी बुलाया गया। उन्होंने गुणा करने की पारंपरिक विधि का उपयोग किया था। उन्होंने बताया कि सवाल में गुणक संख्या 15 और गुण्य संख्या 7 है। सबसे पहले हमने 7 का पहाड़ा 5 इकाइयों से पढ़ा कुल 35 इकाइयाँ बनीं। इसे 5 इकाई और 3 दहाई के रूप में

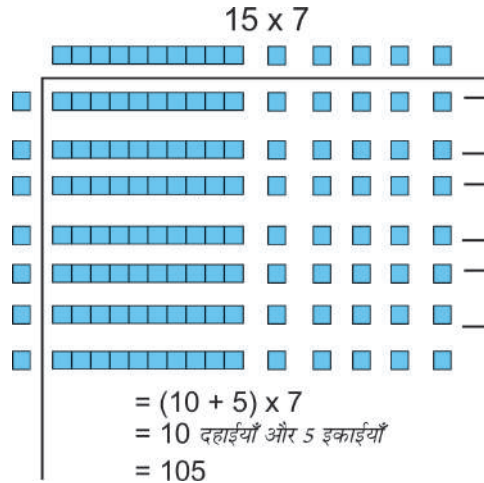
बदल लिया। नीचे इकाई के स्थान पर 5 लिखा और 3 दहाइयाँ ऊपर रख दी। अब 7 का पहाड़ा 1 दहाई से पढ़ा। इस तरह 7 दहाइयाँ बन गईं। पहले से ही 3 दहाइयाँ रखी हुई थीं। इस तरह 10 दहाइयाँ हो गईं। इसे 1 सैकड़ा के रूप में बदल लिया गया।

अब हमारे पास है 1 सैकड़ा, 0 दहाइयाँ और 5 इकाइयाँ। इस तरह संख्या 105 बन गई।

सुषमा मैडम ने दोनों ही लोगों के तरीकों की सराहना की। साथ ही डीन्स ब्लॉक की सहायता से गुणा करने की विधि में हो रही प्रक्रियाओं को समझाया।

सवाल: 15×7 (डीन्स ब्लॉक से)

सवाल में 15 गुणक संख्या (multiplier) है और 7 गुण्य संख्या (multiplicand) है। इन दोनों संख्याओं को डीन्स ब्लॉक की सहायता से बनाया गया। इस खाने में 15 को ऊपर की तरफ और 7 को बाईं तरफ जमा लिया गया। गुणा के मापक (Scaling) सन्दर्भ की सहायता से हम समझ सकते हैं कि इकाई का गुणा इकाई से करने पर इकाई बनती है। इसी तरह इकाई का दहाई से गुणा करने पर दहाई बनती है।



सबसे पहले 7 इकाइयों को 5 इकाइयों से गुणा किया गया। इस तरह 35 इकाइयाँ बन गईं। इन्हें व्यवस्थित रूप से निर्धारित स्थानों पर जमा लिया गया। अब दूसरे चरण में 7 इकाइयों को 1 दहाई से गुणा किया गया। नतीजे में 7 दहाइयाँ प्राप्त हुईं। इन्हें भी निर्धारित स्थान पर जमा लिया गया। अब खाने के भीतर 7 दहाइयाँ और 35 इकाइयाँ जमाई हुईं नज़र आ रही हैं।

दाशमिक संख्या पद्धति (Decimal Number System) के नियमों के तहत हम दस इकाइयों को मिलाकर 1 दहाई बनाते हैं। इस तरह पैंतीस इकाइयों से हम दस-दस के समूह तैयार करेंगे। कुल 3 दहाइयाँ बनेंगी और 5 इकाइयाँ बची रहेंगी।

नई दहाइयाँ बना लेने के बाद हमारे पास कुल दस दहाइयाँ और पाँच इकाइयाँ बनेंगी। दस दहाइयों को एक बार फिर समूहीकरण करना होगा। दस दहाइयों से मिलकर 1 सैकड़ा बनेगा और 5 इकाइयाँ भी हैं।

$$\begin{aligned}
 &10 \text{ दहाइयाँ और } 5 \text{ इकाइयाँ} \\
 &= 1 \text{ सैकड़ा और } 5 \text{ इकाइयाँ} \\
 &= 100 + 5 \\
 &= 105
 \end{aligned}$$

ज्यादातर शिक्षकों ने गुणा के सवालों को कभी इस रूप में नहीं समझा था। उन्हें यह सब होते देखकर बहुत

अच्छा लग रहा था। गुणा विधि में हर चरण पर हम जो भी करते हैं, उसका तर्क स्पष्ट रूप से यहाँ समझ में आ रहा था।

‘दो अंकों की संख्या को जब दो अंकों की संख्या से गुणा करते हैं तब नीचे इकाई के स्थान पर कट्टम क्यों लगाते हैं? कल भी इसी बात पर तर्क-वितर्क चल रहा था। आप बताइए, सही तरीका क्या है?’ नेगी सर ने कहा।

‘हाँ, मैं इसी मुद्दे पर आ रही थी। चलिए, पहले कोई बोर्ड पर आकर 27×18 इस सवाल को हल करें।’ सुषमा मैडम ने कहा।

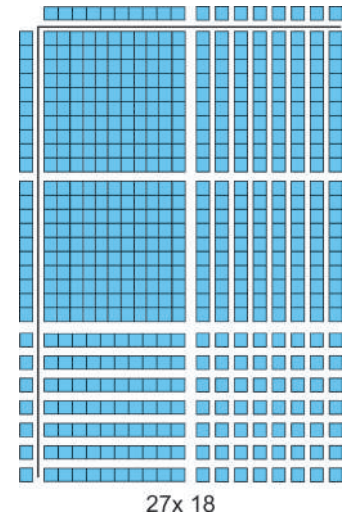
$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 18 \\ \hline 216 \\ 270 \\ \hline 486 \end{array}$$

2.5.11 गुणा की मानक कलन विधि (Standard Algorithm)

इस बार कावेरी मैडम को बोर्ड पर बुलाया गया। उन्हें गुणा का सवाल हल करने के साथ ही डीन्स ब्लॉक की सहायता से यह भी समझाना था कि प्रत्येक चरण पर उन्होंने क्या किया है तथा क्यों किया है। कावेरी मैडम ने 27×18 को मानक विधि से हल किया, साथ ही अपना तरीका भी बताया। सभी लोग इस तरीके को उपयोग करते आ रहे हैं। अतः कोई नया सवाल नहीं आया।

‘1 से 27 का गुणनफल लिखने से पहले नीचे कट्टम क्यों लगाया है?’ मनीषा भंडारी मैडम ने कल पूछा गया अपना सवाल आज फिर दोहराया।

कावेरी मैडम ने सामने टेबल पर 27×18 का हल डीन्स ब्लॉक से भी दर्शाया। उन्होंने कहा, ‘इकाई को इकाई से गुणा करने पर इकाई बनती है। इकाई को दहाई से गुणा करने पर दहाई बनती है। दहाई को दहाई से गुणा करने पर सैकड़ा बनता है। हम गुणनफल वाले हिस्से में देख सकते हैं।’



Source: अज़ीम प्रेमजी फाउंडेशन, राजसमन्द

अभी दो सैकड़ा, तेईस दहाई, छप्पन इकाई हैं। इन्हें स्थानीय मान के अनुसार पुनः संयोजित कर सकते हैं।

छप्पन इकाई= 5 दहाई और 6 इकाई

तेईस दहाई= 2 सैकड़ा और 3 दहाई

दो सैकड़ा= 2 सैकड़ा

स्थानीय मान के अनुसार पुनः समूहीकरण के बाद मिलेगा:

4 सैकड़ा, 8 दहाई और 6 इकाई

= $400 + 80 + 6$

= 486

‘उत्तर तो सही है, लेकिन कट्टम क्यों लगाया है? सीधे यहीं से संख्या क्यों नहीं लिखी जाती है,’ मनीषा मैडम ने अपना सवाल फिर दोहराया।

कावेरी मैडम के पास अभी इस बारे में शायद कोई ठोस जवाब नहीं था। उनकी परेशानी समझकर सुषमा मैडम ने थोड़ी मदद की। उन्होंने डीन्स ब्लॉक द्वारा जमाई गई विधि की तरफ ध्यान दिलाते हुए कहा कि इकाई का इकाई से गुणा करने पर इकाई मिलती है, लेकिन दहाई का इकाई से गुणा करने पर दहाई मिलती है। हम कह सकते हैं कि दहाई को इकाई से गुणा करने में इकाई मिलने की कोई संभावना ही नहीं बचती है। अतः हम उस स्थान पर कट्टम का निशान लगा देते हैं।

इस सवाल में देखो, संख्या 18 में 8 इकाई है और 1 दहाई है।

चरण 1: सबसे पहले स्थानीय मान के अनुसार संख्या लिखने का स्थान निर्धारित किया गया। गुण्य संख्या 27 और गुणक संख्या 18 दोनों को ही स्थानीय मान में निर्धारित स्थानों के अनुरूप लिखा गया।

$$\begin{array}{r} \text{र} \quad \text{द} \quad \text{इ} \\ 27 \\ \times 18 \\ \hline \end{array}$$

चरण 2: यहाँ पर 7 इकाइयों को 8 बार गुणा किया गया। इस तरह 56 इकाइयाँ प्राप्त हुईं। इसे 5 दहाई और 6 इकाई के रूप में समझा जाएगा। नीचे गुणनफल लिखा जाएगा। इकाई के स्थान पर 6 को दर्ज करेंगे, लेकिन 5 दहाइयों को ऊपर दर्ज किया जाएगा।

चरण 3: अब 2 दहाइयों को 8 बार गुणा किया जाएगा। इस प्रकार 16 दहाइयाँ बनेंगी। पहले से रखी 5 दहाइयों को मिलाकर अब कुल 21 दहाइयाँ बनेंगी। इसे हम 2 सैकड़ा और 1 दहाई के रूप में दर्ज करेंगे। इस तरह संख्या के रूप में 216 मिलेगी।

$$\begin{array}{r} \text{र} \quad \text{द} \quad \text{इ} \\ 27 \\ \times 18 \\ \hline 216 \end{array}$$

चरण 4 : संख्या 18 का विस्तारित रूप है (10+8), ऊपर के चरणों में 27 को 8 बार गुणा किया जा चुका है। अब शेष 10 बार से और गुणा करना है। मानक विधि में यह 1 दहाई के रूप में दर्ज है। अतः 1 दहाई बार 27 का गुणा किया जाना है। पहले 1 दहाई को 7 इकाइयों से गुणा किया जा रहा है।

इस तरह 7 दहाइयाँ बनेंगी। इन 7 दहाइयों को दहाई के लिए निर्धारित स्थान पर ही दर्ज करना होगा। इसी तरह 1 दहाई को 2 दहाई से गुणा किया जाएगा। यहाँ 2 सैकड़ा प्राप्त होंगे। इन्हें सैकड़ा के लिए निर्धारित स्थान पर दर्ज करना होगा।

इस तरह 2 सैकड़ा, 7 दहाई और 0 इकाई प्राप्त हुईं। संख्या के रूप में यह 270 बनेगी। इसीलिए बहुत से लोग एवं पाठ्यपुस्तकों में कट्टम के स्थान पर 0 ही लिखते हैं।

$$\begin{array}{r} \text{र} \quad \text{द} \quad \text{इ} \\ 27 \\ \times 18 \\ \hline 216 \\ 27 \times \\ \hline 486 \end{array}$$

ध्यान दीजिए, यहाँ हमें एक भी इकाई नहीं मिली है। या यों कहें कि मिलने की कोई संभावना भी नहीं है, क्योंकि संख्या 18 में दिखने वाला 1 असल में 1 दहाई है। यह अन्य संख्याओं से गुणा किए जाने पर दहाई या सैकड़ा ही बनाएगा। अब जब इकाई मिलने की कोई संभावना ही नहीं है तो इकाई दर्ज करने के लिए आरक्षित स्थान को भी क्यों न बंद कर दिया जाए। इसी समझ के साथ कट्टम के निशान का उपयोग इकाई के लिए निर्धारित जगह को ही बंद कर देता है। हमारी पारंपरिक मानक विधि में भी ज्यादातर लोग कट्टम का

उपयोग ही करते पाए जाते हैं। ऐसा करने से फायदा यह है कि छोटे बच्चे गलती से भी वहाँ संख्या नहीं लिख सकते हैं। इस तरह लिखने की व्यवस्था ठीक बनी रहती है।

शून्य या कट्टम रखने की इस बहस को गहराई से देखने पर हम पाते हैं कि अवधारणात्मक रूप से बस इतना ही फ़र्क है कि पहली व्यवस्था में इकाइयों की अनुपस्थिति को भी 0 के रूप में दर्ज किया जा रहा है। जबकि, कट्टम रखते समय मान्यता यह है कि इकाइयों का प्राप्त होना संभव ही नहीं है। गुणा की मानक विधि की प्रक्रियाओं और शून्य बनाम कट्टम की बहस पर आधारित विमर्श सभी को बहुत अच्छा लगा। सुषमा मैडम ने प्रोजेक्टर की सहायता से कुछ और उदाहरण दिखाते हुए गुणा करने के तरीके पर बात की।

कुछ और सवाल

उदाहरण: सौरभ एक दिन अपने पिताजी के भोजनालय में जाता है। एक थाली का मूल्य 125 रुपये है। दोपहर तक 26 लोग भोजन कर चुके थे। सौरभ हिसाब लगाता है कि 26 थाली के कितने रुपये प्राप्त हुए?

$$\begin{array}{r} 125 \\ \times 26 \quad (20+6) \\ \hline 750 \leftarrow 125 \times 6 \\ +2500 \leftarrow 125 \times 20 \\ \hline 3250 \end{array}$$

सौरभ का तरीका इस प्रकार था।

$$\begin{array}{r} 125 \\ \times 123 \quad (100+20+3) \\ \hline 375 \leftarrow (125 \times 3) \\ 2500 \leftarrow (125 \times 20) \\ 12500 \leftarrow (125 \times 100) \\ \hline 15375 \end{array}$$

अतः 26 लोगों से कुल 3250 रुपये प्राप्त हुए।

आज दिन भर में 123 लोगों ने भोजन किया है। सौरभ पूरे दिन में प्राप्त हुए रुपयों का हिसाब लगाता है।

दिन भर में उसे 15375 रुपये प्राप्त हुए हैं।

सवाल: आशा और मारिया सहेलियाँ हैं, दोनों ने 24×15 हल किया है। किसका तरीका सही है, क्यों? इनमें से जो तरीका पसंद आया है, उसी तरीके से 37×25 हल करके दिखाओ?

आशा ने किया

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 15 \\ \hline 20 \quad (5 \times 4) \\ 100 \quad (5 \times 20) \\ 40 \quad (10 \times 4) \\ +200 \quad (10 \times 20) \\ \hline 360 \end{array}$$

मारिया ने किया

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 15 \\ \hline 120 \quad (24 \times 5) \\ +240 \quad (24 \times 10) \\ \hline 360 \end{array}$$

भोजन अवकाश के बाद

दोपहर के भोजन का समय हो गया था। सभी ने भोजन किया। कुछ देर विश्राम के बाद एक बार फिर कक्ष में एकत्रित हुए। दोपहर बाद की हाजरी ली गई और गुणा की अवधारणा पर ही आगे की बातचीत शुरू की गई। दक्ष प्रशिक्षक देवीलाल जी ने गुणा के सवाल हल करने के दौरान बच्चों को आने वाली चुनौतियों में से एक ऐसी चुनौती की तरफ सभी का ध्यान दिलाया जिस पर अभी तक बात नहीं हो पाई थी।

2.5.12 संख्या को 0 से और 0 को 0 से गुणा करना

‘बच्चे गुणा के सवालों में 0 का उपयोग होने से भी कई तरह की गलतियाँ करते हैं। किसी संख्या को 0 से या फिर 0 को 0 से गुणा सिखाने के दौरान भी काफी ध्यान देना होता है’, देवीलाल सर ने कहा।

‘मैंने तो अपनी कक्षा के बच्चों को याद करवा दिया है कि जब भी गुणा में 0 दिखाई दे तो उत्तर में 0 ही आएगा’, मंजीत सर बोल पड़े।

‘अरे, हम गणित किसलिए पढ़ाते हैं? समझकर सवाल हल करने के लिए ... ऐसे रटने से क्या फायदा’, देवीलाल सर ने कहा। ऐसा कहते हुए उन्होंने बोर्ड पर एक बीजीय समीकरण (Algebraic Equation) लिख दिया। सदन को आमंत्रित कर इसे समझाने को कहा गया।

$$n \times 0 = 0$$

$$0 \times 0 = 0$$

बच्चों को यह कैसे बताएँ कि किसी संख्या को 1 से गुणा करने पर वही संख्या प्राप्त होती है और 0 से गुणा करने पर 0 प्राप्त होता है।

अब सदन में सभी चुप हो गए थे।

संगीता मैडम ने कहा, ‘यह तो हम सबने भी याद किया था। बच्चों को भी याद करा देते हैं। लेकिन वो फिर भी गलती करते हैं। कैसे होता है? क्यों होता है? यह तो हमें भी नहीं मालूम।’

‘सर, मैं तो अपनी कक्षा के बच्चों को सभी संख्याओं के पहाड़े 0 से बुलवाता हूँ।’ कीर्तिमान नेगी सर ने कहा।

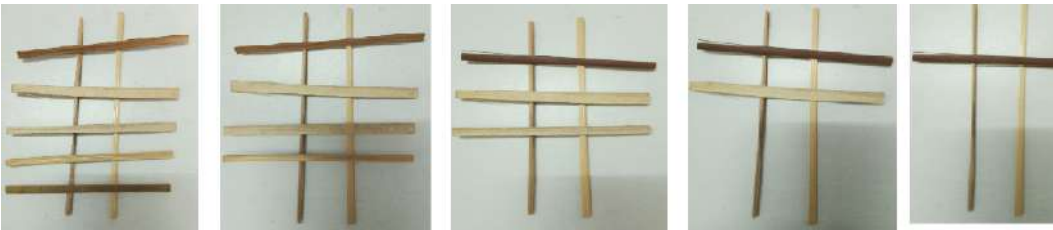
‘हाँ, ऐसे कई शॉर्टकट हम शिक्षक लोग अपनाते हैं, लेकिन यह गणित सीखना नहीं कहा जाएगा। आइए, इस मुद्दे को ध्यान से समझते हैं। आप अपनी डायरी में भी लिख लीजिए।’ देवीलाल जी ने कहा।

सवाल: $2 \times 0 = 0$

देवीलाल जी ने पास रखी आइसक्रीम की तीलियों को रखकर इस तरह का संयोजन बनाया। अब सभी से इनके लिए गुणा बोलते जाने को कहा। लोग जो भी बोलते, देवीलाल जी बोर्ड पर लिखते जाते थे।

दो गुणा पांच बराबर दस	$2 \times 5 = 10$
दो गुणा चार बारबार आठ	$2 \times 4 = 8$
दो गुणा तीन बराबर छह	$2 \times 3 = 6$
दो गुणा दो बराबर चार	$2 \times 2 = 4$
दो गुणा एक बराबर दो	$2 \times 1 = 2$
दो गुणा शून्य बराबर शून्य	$2 \times 0 = 0$

‘इस तरह तीलियों का इस्तेमाल करके सबसे पहले 2×5 को दर्शाते हैं, फिर बारी-बारी से एक छड़ी को हटाते हैं। और हर बार बिन्दुओं की संख्या को गिनते हैं, इस तरह गुणा तथ्यों का एक पैटर्न नज़र आने लगता है। हम देख सकते हैं कि गुणनफल के रूप में हर बार पहले से 2 कम मिलता है।’



इस तरह हम गुणा $2 \times 0 = 0$ को समझा सकते हैं।

सवाल : $0 \times 0 = 0$

इसी गतिविधि का उपयोग करते हुए हम $0 \times 0 = 0$ भी समझ सकते हैं। तीलियों को इस प्रकार रखेंगे।



यह गतिविधि बच्चों के साथ करने के दौरान यह ध्यान रखना बहुत ज़रूरी है कि हम हर चरण के साथ लगातार व्याख्या भी करते जाएँ और हमारी व्याख्या पैटर्न के अनुसार हो और तार्किक भी हो।

$$3 \times 4 = 12$$

$$2 \times 3 = 6$$

$$1 \times 2 = 2$$

$$0 \times 1 = 0$$

$$0 \times 0 = 0$$

इस तरह बच्चे किसी संख्या का 0 से गुणा और 0 का 0 से गुणा की अवधारणा को रटने की बजाय समझकर हल कर सकेंगे।

2.5.13 गुणा के कुछ और रोचक तरीके

प्रशिक्षण कक्ष में सत्रों का संचालन विधिवत जारी था। इसी बीच ब्लॉक शिक्षा अधिकारी श्री गंगाराम बिष्ट जी का आगमन हुआ। वे प्रशिक्षण शिविर का अवलोकन करने और शिक्षकों से कुछ ज़रूरी बात करने आए थे। उन्होंने देहरादून से आए ताज़ा आदेश के बारे में बताते हुए कहा कि सभी बच्चों को अपेक्षित अधिगम स्तर तक लाना है। इसके लिए हम सभी को मिलकर मेहनत करनी होगी। वे स्वयं भी गणित विषय के शिक्षक रहे हैं, इसलिए गणित विषय से विशेष लगाव है। यहाँ पूरे किए जा चुके सत्रों के बारे में उन्होंने जानकारी ली। सुगमकर्ता और संभागियों ने गुणा के सवालों पर हुई चर्चा संक्षेप में बताई।

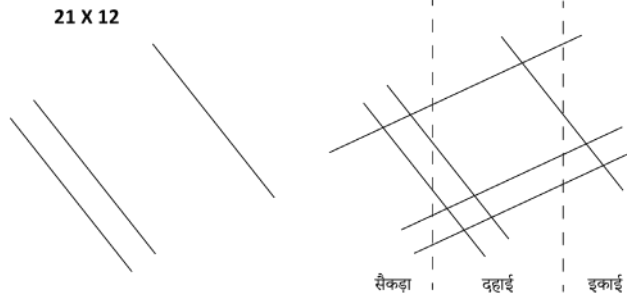
गंगाराम सर ने कहा, 'मैं आप लोगों को गुणा करने के तीन अलग-अलग तरीके बता रहा हूँ। एक चीन की विधि है, दूसरी को नेपियर पट्टी का गुणा कहते हैं और तीसरी वैदिक गणित पर आधारित है। इनका उपयोग करके हम जल्दी गणना कर सकते हैं, लेकिन आजकल सबके पास फोन है। आप जल्दी गुणा करने के लिए अपना फोन भी उपयोग करते होंगे। इन विधियों को आप गणित की विविधता के रूप में समझिए। नए तरीके अच्छे लगे तो बच्चों को भी बताइएगा। वैदिक गणित की विधि अब पाठ्यपुस्तकों में भी दी गई है।' गंगाराम जी ने बोर्ड पर समझाते हुए तीन अलग-अलग विधियाँ लिख दीं।

• चाइनीज़ बोनस :

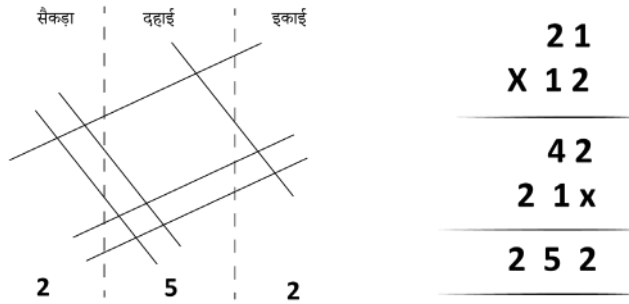
यह सीकों की सहायता से गुणा करने की बहुत ही प्राचीन तथा रोचक विधि है। इस विधि में हम स्थानीय मान की अवधारणा का उपयोग करते हैं। एक उदाहरण से इसे समझते हैं।

सवाल 21×12 : सबसे पहले हम संख्या 21 को सीकों से दर्शाएंगे। संख्या 21 में 2 दहाई और 1 इकाई है। अतः हमें 2 दहाइयों को दर्शाने के लिए दो सीके रखनी हैं। अब इसी तरह 1 इकाई को दर्शाने के लिए हमें एक

सीक रखनी है। इकाई और दहाई में स्पष्ट अंतर समझा जा सके, इसलिए हम इनमें कुछ दूरी रखते हैं। इन सीकों को रखने की व्यवस्था बाईं से दाईं ओर होगी।



इसी तरह हम संख्या 12 को दर्शाएंगे। संख्या 12 में 1 दहाई और 2 इकाई है। अतः एक सीक से दहाई और दो सीक रखकर इकाइयाँ दर्शाई जाएंगी। इन सीकों को रखने की व्यवस्था ऊपर से नीचे की ओर होगी। ऊपर की तरफ 1 दहाई, फिर कुछ जगह छोड़कर 2 इकाइयाँ।



इस तरह संख्या 21 और संख्या 12 को दर्शाने के लिए रखी गई ये सभी सीके कुछ जगहों पर एक दूसरे को काटती हुई नज़र आएंगी। सीकों को इस प्रकार रखने की यह व्यवस्था हमें जो कटान बिंदु दर्शा रही है, उसे हम स्थानीय मान के अनुसार इकाई, दहाई और सैकड़ा के रूप में समझ सकते हैं। इस तरह दाहिनी ओर से बाईं तरफ बढ़ते हुए हम देख सकते हैं:

इकाई के स्थान पर: 1 इकाई द्वारा 2 इकाई को काटने से बने कटान बिंदु= 2 इकाइयाँ

दहाई के स्थान पर: 1 दहाई द्वारा 1 इकाई को काटने से बना कटान बिंदु= 1 दहाई

2 दहाई द्वारा 2 इकाई को काटने से बने कटान बिंदु= 4 दहाइयाँ

इस तरह कुल 5 दहाइयाँ बनेंगी।

सैकड़ा के स्थान पर: 2 दहाई द्वारा 1 दहाई को काटने से बने कटान बिंदु= 2 सैकड़ा

इस तरह, स्थानीय मान के अनुसार (निर्धारित स्थान पर) 2 सैकड़ा, 5 दहाई और 2 इकाई को संख्यात्मक रूप में रखते जाना है। हम देखेंगे कि संख्या 252 बनेगी। इसे हम 'दो सौ बावन' पढ़ सकते हैं। यदि गुणा करने की मानक विधि (संख्यात्मक रूप में) का विश्लेषण करें तो हम पाएंगे कि ठीक इसी क्रम में हम दाहिनी तरफ से शुरू कर बाईं ओर बढ़ते हैं।

इकाई के स्थान पर: 1 इकाई को 2 इकाई से गुणा करेंगे= 2 इकाइयाँ

दहाई के स्थान पर: 1 दहाई को 1 इकाई से गुणा करेंगे= 1 दहाई

2 दहाई को 2 इकाई से गुणा करेंगे= 4 दहाइयाँ

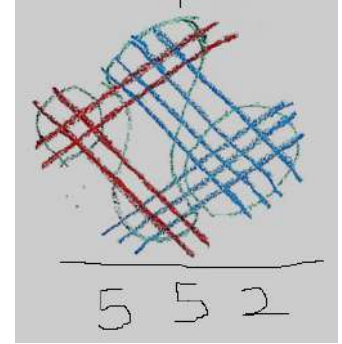
इस तरह कुल 5 दहाइयाँ बनेंगी।

सैकड़ा के स्थान पर: 2 दहाई को 1 दहाई से गुणा करेंगे= 2 सैकड़ा

ऊपर की तरह ही यहाँ भी स्थानीय मान के अनुसार निर्धारित स्थान पर 2 सैकड़ा, 5 दहाई और 2 इकाई को जमाना है। यहाँ पर भी हम देखेंगे कि संख्या 252 बनेगी। इसे हम 'दो सौ बावन' पढ़ सकते हैं।

इस उदाहरण से आप समझ सकते हैं कि सीकों की सहायता से किया जाने वाला गुणा असल में मानक विधि द्वारा किए जाने वाले गुणा का ही प्रदर्शन है। दोनों प्रकार से हम स्थानीय मान की अवधारणा और दाशमिक संख्या पद्धति का उपयोग कर रहे होते हैं।

सवाल 23×24 , इस सवाल को चाइनीज़ विधि से हल किया गया है। चित्र देखने पर दाहिनी से बाईं तरफ बढ़ते हुए हमें 12 इकाइयाँ, 14 दहाइयाँ और 4 सैकड़े नज़र आ रहे हैं। इसे देखकर हासिल की व्यवस्था समझने का प्रयास कीजिए और पता लगाइए कि यहाँ से हम गुणनफल 552 तक कैसे पहुँचेंगे?



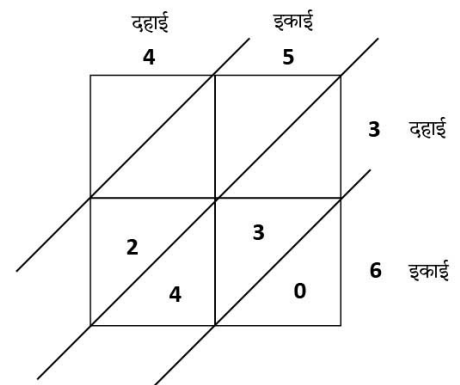
नेपियर विधि से गुणा

जॉन नेपियर (1550-1617) ने पट्टियों (grid) का उपयोग करते हुए गुणा करने के एक खास तरीके का उपयोग किया था। इस तरीके में भी स्थानीय मान की अवधारणा का उपयोग किया जा रहा है। प्राप्त हो रहे गुणनफलों को पट्टियों पर निर्धारित स्थानों पर इस तरह जमाया जाता है जहाँ उनका योग करने के बाद हमें अपेक्षित गुणनफल प्राप्त हो जाता है।

45 X 36

45×36 को नेपियर पट्टियों की सहायता से गुणा करना

ये दोनों ही संख्याएँ 2 अंक की हैं। अतः सबसे पहले हमें 2×2 का ग्रिड बनाना होगा। इस ग्रिड के सभी खानों को तिरछी रेखाओं से दो हिस्सों में बाँट देना है। अब इस ग्रिड के उपर 45 (गुणक संख्या/Multiplier) और दाहिनी तरफ 36 (गुण्य संख्या/Multiplicand) को यहाँ चित्र में दर्शाई गई व्यवस्था के अनुसार लिखेंगे।



45×36 को हल करते समय हम सबसे पहले 36 की इकाई संख्या 6 को 45 की इकाई संख्या 5 और फिर दहाई संख्या 4 से गुणा करते हैं। यहाँ भी हम ऐसा ही करेंगे।

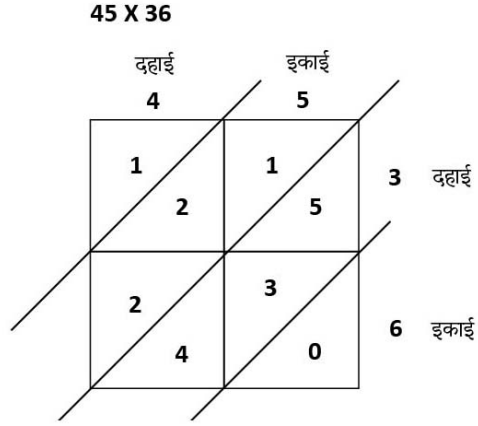
$6 \times 5 = 30$ (इकाई 0 को नीचे के त्रिभुज में और दहाई 3 को उपर के त्रिभुज में लिखना है)

असल में, संख्याएँ 6 और 5 इकाई संख्या हैं। इन्हें आपस में गुणा करने से 'तीस' इकाइयाँ बनती हैं। इन तीस इकाइयों को हम समूहीकरण, स्थानीय मान और संख्याओं की समझ से 30 के रूप में लिख सकते हैं। यहाँ संख्या के रूप में 30 लिखने का अर्थ है, 3 दहाई और 0 इकाई। इसलिए तिरछी रेखाओं की सहायता से सबसे नीचे और दाहिनी ओर बना त्रिभुज इकाई के लिए निर्धारित स्थान है। इसके ठीक ऊपर का त्रिभुज दहाई के लिए निर्धारित स्थान है। अतः हम 0 और 3 को इन निर्धारित स्थानों में ही लिखेंगे।

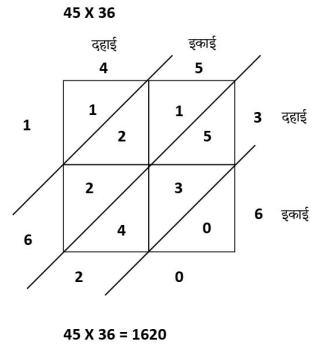
इसी तरह, $6 \times 4 = 24$ (दहाई 4 को नीचे के त्रिभुज में और सैकड़ा 2 को ऊपर के त्रिभुज में लिखना है)

मूल संख्याओं 45×36 में संख्या 6 इकाई है, लेकिन संख्या 4 दहाई है। इसका अर्थ यह हुआ कि यहाँ पर हम $6 \times 4 = 24$ प्राप्त कर रहे हैं, लेकिन यह 6 इकाई से 4 दहाई गुणा करने से प्राप्त होने वाली 'चौबीस दहाइयों' को दर्शा रहा है। अतः नेपियर पट्टी की इस व्यवस्था में लिखते हुए हमें 24 को 2 सैकड़ा, 4 दहाई के रूप में दर्ज करना होगा।

ठीक इसी तरह ऊपर की पट्टियों को भी भरेंगे। अब आप इस चित्र में दक्षिण-पूर्व से शुरू करते हुए उत्तर-पश्चिम की दिशा की तरफ बढ़िए। यहाँ तिरछी रेखाओं द्वारा बनायी जा रही चार पट्टियाँ दिखती हैं। ये चारों पट्टियाँ असल में नीचे से ऊपर की तरफ क्रमशः बढ़ते हुए इकाई, दहाई, सैकड़ा और हज़ार के स्थान को दर्शाती हैं। ऊपर की तरफ बढ़ते हुए हम क्रमशः प्रत्येक पट्टी में लिखी संख्याओं का योग करते जाएंगे और उन्हें नीचे लिखते जायेंगे।



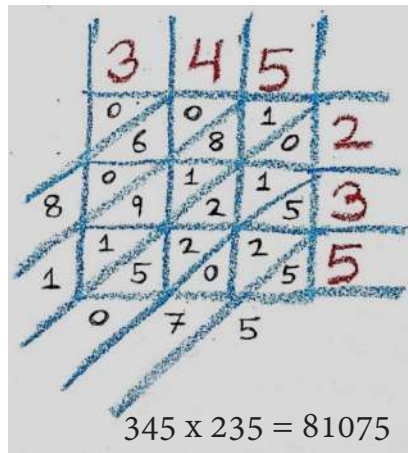
सबसे पहली पट्टी (इकाई स्थान को दर्शा रही है) में सिर्फ़ एक ही संख्या 0 है। जबकि इसके ऊपर वाली पट्टी (दहाई स्थान को दर्शा रही है) में ऊपर से नीचे की तरफ बढ़ते हुए 5, 3 और 4 हैं। इनका योग 12 है। अतः इस पट्टी के नीचे 2 लिखेंगे और 1 को ऊपर वाली पट्टी में हासिल भेजा जाएगा। इस दूसरी पट्टी में दहाइयों को इकट्ठा किया जा रहा है। कुल 12 दहाइयों को हम 1 सैकड़ा और 2 दहाई के रूप में देख सकते हैं। इसीलिए 1 सैकड़ा को अगली पट्टी में हासिल भेजा गया है।



पट्टियों में जोड़कर संख्या लिखने के बाद हमें प्रत्येक पट्टी का योग प्राप्त हो जाएगा। चित्र में आप प्रत्येक पट्टी के अंत में 1, 6, 2 और 0 देख रहे हैं। इन्हीं संख्याओं को इसी क्रम में लिखने पर हमें उत्तर 1620 प्राप्त हो जाता है।

इसी तरह गुणा के एक और सवाल 345×235 को नेपियर पट्टी की सहायता से हल किया गया है। उसे देखकर प्रत्येक चरण पर क्या हो रहा है, यह समझने का प्रयास कीजिए।

क्या आप 15×18 को नेपियर पट्टी की सहायता से हल कर सकते हैं? स्वयं करके देखिए।



2.5.14 बच्चों की कुछ सामान्य चुनौतियों का सार

- गुणा के चिह्न को जोड़ के रूप में समझ लेते हैं, जैसे $2 \times 3 = 5$ कर देते हैं।
- बच्चे पहाड़े रट लेते हैं और बोल भी लेते हैं, पर उसका मतलब नहीं समझते हैं। जैसे- कोई बच्चा 8 का पहाड़ा बोल भी लेता है और लिख भी लेता है, पर वो $8 \times 7 = 56$ को गुणा की समझ के रूप में नहीं बता पाता है।
- जब बच्चों को 8 को 7 से और उसके बाद यदि 7 को 8 से गुणा करने को बोला जाता है तो वे दोबारा पहाड़ा बोलकर उत्तर निकालते हैं, पर यह नहीं समझ पाते हैं कि 8×7 और 7×8 का मान एक ही होता है।
- किसी भी संख्या को शून्य से गुणा करने पर गुणनफल शून्य ही क्यों मिलता है? इसका कारण बच्चे बता नहीं पाते हैं।
- नीचे दिए गए सवाल में 23 को 36 से गुणा करने को दिया जाता है तो बच्चे इस तरह से हल करते हैं। जब उनसे पूछा जाता है कि 138 के नीचे 69 के ठीक पहले \times का चिह्न क्यों लगाया जाता है तो इसका उत्तर उनके पास नहीं होता है।
- मानक कलन विधि (Standard Algorithm) से सम्बंधित गलतियाँ:

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 36 \\ \hline 138 \\ 69 \times \\ \hline 828 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 5 \\ \hline 1025 \end{array} \quad \begin{array}{r} 25 \\ \times 31 \\ \hline 65 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ 649 \\ \times 3 \\ \hline 2187 \end{array} \quad \begin{array}{r} 23 \\ \times 36 \\ \hline 138 \\ 69 \\ \hline 207 \end{array}$$

- 25 को 5 से गुणा करने को दिया जाता है तो कई बच्चे उत्तर 1025 देते हैं। जब उत्तर के बारे में पूछा जाता है तो बस इतना बता पाते हैं- 5 का पहाड़ा 5 बार बोलने पर 25 आएगा और 5 का पहाड़ा 2 बार बोलने पर 10 आएगा और उत्तर मिलेगा 1025।
- $8 \times \dots = 56$ जैसे सवाल ज्यादातर बच्चे हल नहीं कर पाते हैं। साथ ही यह भी नहीं समझ पाते हैं कि इस सवाल में करना क्या है।
- $126 \times 100 = \dots$ जैसे सवाल बच्चों को दिए जाने पर वो 126 को लिखकर उसके आगे दो ज़ीरो लगा देते हैं। लेकिन ऐसा क्यों करते हैं, का कारण नहीं बता पाते हैं।
- दिए गए इबारती सवालों में यह पता नहीं कर पाते हैं कि किस सवाल में गुणा करना है।
- सवाल को पढ़कर यह समझ नहीं पाते हैं कि किन संख्याओं का गुणा करना है, जैसे- कक्षा 4 के प्रत्येक बच्चे को 6 कॉपी दी जानी है। यदि कक्षा में 26 बच्चे हैं तो कितनी कॉपियों की आवश्यकता होगी? इस सवाल को पढ़कर कुछ बच्चे यह भी समझ नहीं पाते कि इसमें गुणा किया जाना है। तो बहुत से बच्चे यह तय नहीं कर पाते कि इसे हल करने के लिए 4, 6 एवं 26 में से किस-किस संख्या का गुणा होगा।
- गुणा से सम्बंधित इबारती सवाल नहीं बना पाते हैं। जो बच्चे इबारती सवाल बनाते भी हैं वो केवल एक ही सन्दर्भ से सम्बंधित होते हैं। जैसे $15 \times 6 = 90$ के लिए इस तरह के सवाल बनाते हैं: एक कॉपी 15 रुपये की आती है तो 6 कॉपी कितने रुपये की आएंगी?

- दो संख्याओं के गुणनफल का अनुमान नहीं लगा पाते। अनुमान लगाने का यह कौशल न सिर्फ उन्हें उत्तर की जाँच करने में बल्कि दैनिक जीवन में भी मददगार होता है। जैसे 38×9 का गुणा करने पर बच्चे का उत्तर 2772 या अन्य आता है। चर्चा की जाए कि 9 संख्या दस के पास है, यदि 38 को 10 से गुणा करें तो 380 आएगा, इसलिए 38 और 9 के गुणा से प्राप्त गुणनफल 380 के आस-पास होगा और निश्चित ही 380 से कम होगा। दैनिक जीवन में भी हम इसी तरह कार्य करते हैं। चीनू को अपने जन्मदिन में 3 रुपये वाली टॉफी बाँटनी हैं। उसकी कक्षा में 47 बच्चे हैं तो उसे लगभग कितने रुपये लेकर बाज़ार जाना होगा?
- किसी संख्या को ज़ीरो से गुणा करने पर गुणनफल वही संख्या लिख देते हैं, जैसे $15 \times 0 = 15$ ।



2.5.15 उदाहरणात्मक कार्ययोजना (Illustrative Session Plan)

सत्र	विषय	समय	सामग्री	
1	कक्षा-कक्ष में गुणा के दौरान बच्चों की चुनौतियाँ	<ul style="list-style-type: none"> गुणा के सवालों में बच्चों की चुनौतियों को जानना शिक्षकों के तरीके समझना पाठ्यपुस्तक के पाठ देखना सीखने के प्रतिफल से अपेक्षाएँ 	2 घंटे	पाठ्यपुस्तक, सीखने के प्रतिफल, टीएलएम, बच्चों द्वारा हल किए गए सवाल।
2	गुणा के मायने तथा सन्दर्भ	<ul style="list-style-type: none"> गुणा के मायने तथा सन्दर्भ समझना इन पर आधारित अभ्यास बार-बार जोड़ना आयताकार जमावट मापक दर कार्तीय गुणन 	2 घंटे	पाठ्यपुस्तक के पाठ, आलेख- जीरो बनाम कट्टम, टीएलएम, पीपीटी, बच्चों द्वारा हल किए गए सवाल।
3	इबारती सवालों को हल करना और बनाना	<ul style="list-style-type: none"> बच्चों के परिवेशीय अनुभव ठोस सामग्री द्वारा गुणा की अवधारणा से परिचय बार-बार जोड़ छोड़कर गिनना विधि द्वारा गणितीय निरूपण विविध प्रकार के गुणा आधारित अभ्यास इबारती सवालों पर चर्चा, सवालों को हल करना और विभिन्न संदर्भों के लिए सवाल बनाना 	2 घंटे	पाठ्यपुस्तक के पाठ, कार्यपत्रक।
4	गुणा में क्रम विनिमय, गुणा में साहचर्य नियम तथा गुणा में वितरण नियम	<ul style="list-style-type: none"> गुणा में क्रम विनिमय, साहचर्य तथा वितरण नियम को समझना इनसे जुड़े सवाल हल करना शून्य से अन्य संख्या का गुणा तथा शून्य से शून्य का गुणा 	2 घंटे	पाठ्यपुस्तक के पाठ, पीपीटी, मोतीमाला, डीन्स ब्लॉक, तीली-बण्डल।
5	गुणा की वैकल्पिक विधियाँ तथा गुणा की मानक विधि	<ul style="list-style-type: none"> गुणा की वैकल्पिक विधियाँ गुणा की मानक विधि 	3 घंटे	पाठ्यपुस्तक के पाठ, पीपीटी, डीन्स ब्लॉक, तीली-बण्डल।
6	नेपियर पट्टी, चाइनीज़ बोन्स और निखिलम विधि को समझना	<ul style="list-style-type: none"> नेपियर पट्टी, चाइनीज़ बोन्स और निखिलम विधि को समझना विधि में स्थानीय मान की भूमिका समझना 	2 घंटे	पीपीटी, डीन्स ब्लॉक, तीली-बण्डल।
7	सामग्री निर्माण तथा उपयोग के तरीके	<ul style="list-style-type: none"> द्विआयामी डीन्स ब्लॉक बनाना तथा उपयोग तीली-बण्डल का उपयोग 	2 घंटे	टीएलएम बनाने की सामग्री



2.5.16 अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)

कक्षा-कक्ष में गुणा पर आधारित काम निम्न प्रक्रियाओं के अनुसार किया जाना अपेक्षित है। ये प्रक्रियाएँ उन्हीं सात अवलोकन क्षेत्रों पर आधारित हैं, जिनके बारे में हमने अध्याय एक में बात की है। शिक्षकों के साथ गुणा की अवधारणा पर किए जाने वाले काम का आधार भी यही प्रक्रियाएँ होंगी।

अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)- गुणा

1. ठोस वस्तुओं के द्वारा बराबर मात्रा के समूह बनवाते हैं, जैसे कंकड़, बीज, मोती आदि से 2-2, 3-3 ... के समूह बनवाकर गिनवाते हैं।
2. दैनिक जीवन की स्थितियों से आरंभ कर किसी संख्या को बार-बार जोड़ के रूप में लिखकर जोड़ने के अनुभव देते हैं और इन अनुभवों से 'गुना' या 'बार' जैसी बोलचाल की भाषा से आरंभ कर गुणा के चिह्न से परिचय कराते हैं।
3. ऐसे उदाहरण / सवाल / परिस्थिति बच्चों के सामने रखते हैं जिनमें उन्हें बिना गिने बराबर मात्रा के समूहों में वस्तुओं की संख्या पता लगाने के अवसर हों।
4. 'आयताकार जमावट' से सम्बंधित उदाहरणों एवं वस्तुओं से कार्य करवाकर गुणा की अवधारणा समझाते हैं।
5. 'मापक (Scaling)' से सम्बंधित उदाहरणों एवं वस्तुओं से कार्य करवाकर गुणा की अवधारणा समझाते हैं।
6. 'दर (Rate)' से सम्बंधित उदाहरणों एवं वस्तुओं से कार्य करवाकर गुणा की अवधारणा समझाते हैं।
7. आवश्यकतानुसार 'कार्तीय गुणन' से सम्बंधित उदाहरणों एवं वस्तुओं से कार्य करवाकर गुणा की अवधारणा समझाते हैं।
8. बार-बार जोड़ पर कार्य करवाते हुए गुणा की अवधारणा पर आते हैं।
9. 2, 3, 4, 5 तथा 10 के गुणन तथ्य बनवाने तथा दैनिक परिस्थितियों में उनके उपयोग से सम्बंधित कार्य करवाते हैं।
10. गुणा की अवधारणा का उपयोग करते हुए बच्चों से पहाड़े बनवाते हैं।
11. बार-बार जोड़ से गुणा पर जाने के लिए बीज/बटन/कंकड़/पत्तियों आदि सामग्री एवं सम्बंधित चित्रों का उपयोग करते हैं।
12. बीजों/कंकड़ों/डंडियों आदि के उपयोग से पहाड़े बनवाते हैं।
13. सामग्री के उपयोग के साथ कार्यों से ऐसे अवसर बनाते हैं जिससे बच्चे पहाड़ों का अर्थ समझकर स्वयं पहाड़े बना सकें।
14. गुणा के विभिन्न संदर्भों से सम्बंधित दैनिक जीवन की परिस्थितियाँ/समस्याएँ बच्चों के समक्ष रखते हैं।
15. इन परिस्थितियों/समस्याओं पर बच्चों को आपस में चर्चा करने और इनके हल के लिए अपने तर्क रखने के अवसर निर्मित करते हैं।
16. बच्चों द्वारा बताए गए विभिन्न तरीकों को स्वीकार करते हैं।
17. विभिन्न संदर्भों पर आधारित दैनिक जीवन की परिस्थितियों के इबारती सवाल बनवाते हैं।
18. संख्याओं के पैटर्न को आगे बढ़ाने के लिए तर्क आधारित नियम बनाने एवं प्रस्तुत करने के मौके देते हैं।

अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)- गुणा

19. शिक्षण में ELPS का ध्यान रखते हैं। जैसे:
 - ठोस वस्तुओं (कंकड़/बीज... आदि) के साथ गुणा के विभिन्न संदर्भों के अनुभव देते हैं।
 - वस्तुओं के साथ काम करते हुए बोलचाल की भाषा जैसे 'इतनी बार' या 'इतने गुना' आदि का प्रयोग कर गणितीय शब्दावली 'गुणा' से परिचित करवाते हैं।
 - इसी प्रकार के कार्यों को फिर चित्रों के साथ करना या चित्रात्मक प्रस्तुति करना।
 - प्रतीकों का प्रयोग करते हैं (जैसे गुणा के चिह्न का प्रयोग ऊपर दिए गए कार्य करने के बाद करते हैं)।
 - इसी तरह मानक विधि से सवाल हल कराने के पूर्व ठोस वस्तुओं, चित्रों पर कार्य करते हुए वैकल्पिक तरीकों से भी परिचय कराते हैं।
20. बच्चों के स्तर को ध्यान में रखते हुए समूह बनाते हैं एवं एक-दूसरे से सीखने के मौके देते हैं।
21. दैनिक शिक्षण योजना में आकलन को शामिल करते हैं।
22. आकलन के लिए गतिविधियों, मौखिक कार्य एवं लिखित कार्य का उपयोग करते हैं।
23. पाठ्यपुस्तक में दिए गए सवाल के साथ-साथ नए सवाल भी बनाते हैं।
24. आकलन के आधार पर बच्चों की आवश्यकता की पहचान करते हैं।
25. आकलन के परिणामस्वरूप अपनी योजना व तरीकों में आवश्यकतानुसार बदलाव करते हैं।



2.5.17 उदाहरणात्मक पाठ योजना (Illustrative Lesson Plan)

गुणा- कक्षा 3 पर आधारित

टॉपिक	उद्देश्य	समय	प्रक्रिया	सामग्री
गुणा की शुरुआती समझ	<p>इस पाठ योजना पर काम करने के बाद बच्चे निम्न बिन्दुओं पर अपनी समझ बना पाएंगे:</p> <ul style="list-style-type: none"> • बार-बार जोड़ के रूप में गुणा • बराबर मात्रा के समूहों में गुणा से सम्बंधित शब्दावली (बार, गुना आदि) एवं गुणा के चिह्न से परिचय • प्रतीकों के रूप में संख्याओं के गुणा को दर्ज करना 	2-3 कालांश	<p>1. ठोस अनुभवों और भाषा पर कार्य- आवश्यक सामग्री- बीज / बटन / कंकड़ / मोती प्रक्रिया:</p> <ul style="list-style-type: none"> • प्रत्येक बच्चे को लगभग 50 ठोस बीज/बटन/कंकड़/मोती दिए जाएंगे। • उन्हें दो-दो बीज (कंकड़, मोती या बटन भी हो सकते हैं) के 4 समूह बनाने को कहना। • यह पता लगाने को कहना कि इन चारों समूहों में कुल मिलाकर कितने बीज हुए। • कुल बीजों की संख्या पता करने के तरीके बच्चों को साझा करने को कहना। • इसी तरह अलग-अलग संख्या में तीन-तीन, चार-चार, पाँच-पाँच ... बीजों के समूह बनाकर कुल बीज पता करने व तरीके आपस में साझा करने को कहना। 	बीज / बटन / कंकड़ / मोती

टॉपिक	उद्देश्य	समय	प्रक्रिया	सामग्री
	<ul style="list-style-type: none"> गुणन तथ्य की समझ व उन्हें लिखना 		<ul style="list-style-type: none"> गिनमाला पर बताई गई संख्या अनुसार दो-दो / तीन-तीन ... मोती सरकाकर आगे बढ़ाना और पता लगाना कि कितने मोती सरकाए गए। <p>2. चित्रों के साथ कार्य- आवश्यक सामग्री- पाठ्यपुस्तक अथवा अन्य चित्र प्रक्रिया:</p> <ul style="list-style-type: none"> चित्र दिखाकर/देकर बातचीत करना, जैसे- यहाँ 5 बकरियाँ हैं। इन सभी के कुल पैर कितने होंगे? उन्हें अपने तरीके से काम करने और तरीके साझा करने को कहना। संख्याओं को साथ-साथ जोड़ के रूप में लिखकर उन्हें दर्शाने को कहना, जैसे $4+4+4+4+4=20$ और इस तरह की बातचीत भी करना, जैसे- <ul style="list-style-type: none"> ▶ 4 का 5 गुना है 20 ▶ यह भी बताना कि इसे इस तरह भी लिख सकते हैं $5 \times 4 = 20$ इसी तरह अन्य चित्र जैसे- गाड़ियों के चित्र दिखाकर कुल पहियों की संख्या, तीन, चार, ... पैर वाले जानवरों/वस्तुओं के चित्र दिखाकर पैरों की कुल संख्या बताने और गुणा के रूप में लिखने के कार्य करवाए जाना। <p>आकलन:</p> <ul style="list-style-type: none"> वस्तुओं की सहायता से बराबर मात्रा के समूह बनवाना और कुल संख्या पता लगाने को कहना। बच्चों के दो समूह बनाना। एक समूह बराबर मात्रा के समूह बनाएगा तथा दूसरा समूह उन्हें गुणन तथ्य के रूप में बताकर लिखेगा। जैसे- पहला समूह तीन कटोरियाँ लेकर प्रत्येक में 6-6 कंचे रखता है। फिर दूसरे समूह से इन्हें देखकर सम्बंधित गुणन तथ्य बताने/लिखने को कहता है। इसी तरह फिर दूसरा समूह वस्तुओं के समूह बनाता है। ऐसे ही और भी कार्य वस्तुओं एवं चित्रों की मदद से करना। शिक्षक कुछ गुणन तथ्य बोर्ड पर लिखें एवं बच्चों से इनसे सम्बंधित चित्र बनाने को कहें। 	गिनमाला, पाठ्यपुस्तक, चित्र, कटोरी/कप, कंचे।

संदर्भ:

1. कक्षा 3 पाठ्यपुस्तक, पाठ 9, एनसीईआरटी
2. हैडबुक

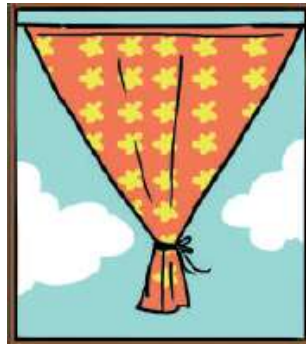
2.5.18 सार संक्षेप (Summary)

- ठोस वस्तुओं और चित्रों की सहायता से बच्चों के साथ काम करें, उन्हें मात्रा का अंदाज़ लगाने का अवसर दें।
- बार-बार जोड़ और छोड़कर गिनने के तरीकों का उपयोग करते हुए कुल की मात्रा समझने में मदद करें।
- बच्चों के जीवन के अनुभवों पर आधारित इबारती सवाल पूछें, उन्हें मौखिक रूप से जवाब देने दें और उत्तर तक पहुँचने का उनका तरीका भी समझें।
- इबारती सवालों का उत्तर लिखित रूप में निरूपित करना बताइए और ऐसा करने के और भी अवसर दीजिए।
- गणितीय सवालों को देखकर इबारती सवाल बनाने के अभ्यास भी कराए जाएँ।
- गुणा में क्रम विनियम, साहचर्य तथा वितरण के नियम को समझने के लिए पर्याप्त उदाहरण दें। अच्छे उदाहरणों की सहायता से इन नियमों को समझने का अवसर दें।
- गुणा के सवाल पाँच प्रकार के सन्दर्भों पर आधारित होते हैं— बार-बार जोड़, आयताकार जमावट, मापक, दर तथा कार्तीय गुणन। बच्चों को इन सभी सन्दर्भों को समझने का अवसर दें और इन पर आधारित सवाल भी हल कराएँ।
- पहाड़े रटने की बजाय उन्हें पहाड़े बनाना सिखाया जाए। इस अवधारणा को समझ लेने के बाद याद भी किया जाए तो बेहतर होगा। छोटी संख्या के पहाड़ों से बड़ी संख्या का पहाड़ा बनाना सिखाया जाए।
- गुणा करने की मानक विधि पर जाने से पहले वैकल्पिक तरीकों से हल करने का अवसर दें।
- मानक विधि में स्थानीय मान के नियमों के महत्त्व के बारे में बताया जाए, साथ ही लिखने की व्यवस्था से भी परिचित कराएँ।
- गुणा करने के दौरान बच्चों से होने वाली गलतियों के कारणों को समझकर उनके निदान के लिए पाठ योजना बनाएँ।



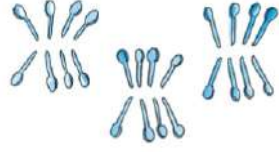
2.5.19 कार्यपत्रक (Worksheets)

प्रश्न 1: इस परदे में हर लाइन में 6 फूल हैं। बताओ, परदे में कुल कितने फूल हैं? कैसे पता चला?

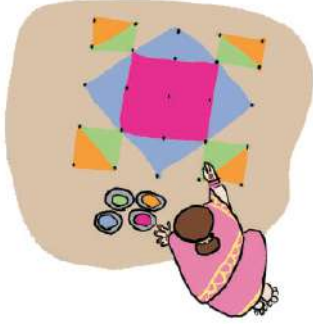


Source: गणित की मजेदार दुनिया, कक्षा 3, राजस्थान

प्रश्न 2: यहाँ तीन समूहों में चम्मच रखे गए हैं। हर समूह में कितने चम्मच हैं? अंदाज़ा लगाओ, चम्मचों की कुल संख्या कितनी होगी?



प्रश्न 3: इस रंगोली में कुल कितने बिन्दु हैं? कैसे पता चला?



Source: गणित की मजेदार दुनिया, कक्षा 3, राजस्थान

प्रश्न 4: ठेले पर कितने नींबू हैं?



Source: गणित की मजेदार दुनिया, कक्षा 3, राजस्थान

प्रश्न 5: एक किलोग्राम शक्कर 38 रुपये की है तो 4 किलोग्राम शक्कर की कीमत कितने रुपये होगी?

प्रश्न 6: गाँव से पास के शहर जाने के लिए एक सवारी का बस टिकट 35 रुपये है तो 16 सवारियों के कुल कितने रुपये लगेंगे?

प्रश्न 7: एक किताब का दाम 34 रुपये है, ऐसी 5 किताबों का दाम कितने रुपये होगा?

प्रश्न 8: रोशनी बिस्किट के 28 पैकेट लाई, हर पैकेट में 12 बिस्किट हैं तो कुल कितने बिस्किट होंगे?

प्रश्न 9: साबुन के 1 पैकेट में 6 बट्टियाँ आती हैं, ऐसे 72 पैकेट में कितनी बट्टियाँ आएंगी?

प्रश्न 10: एक ड्रम में 220 लीटर तेल आता है, ऐसे 48 ड्रम में कितने लीटर तेल आएगा?

प्रश्न 11: एक कुर्सी का मूल्य 678 रुपये है, ऐसी 275 कुर्सियों का मूल्य कितने रुपये होगा?

प्रश्न 12: इनके लिए इबारती सवाल बनाओ।

(क) $5 \times 3 = \dots\dots\dots$ (ख) $8 \times \dots\dots\dots = 32$

(ग) $32 \times 9 = \dots\dots\dots$ (घ) $\dots\dots\dots \times 18 = 1800$

प्रश्न 13: इस गुणा चार्ट को कॉपी में बनाकर पूरा करो।

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1			4						
2							14			
3	3									
4									36	
5			15							
6								48		
7						42				
8									72	
9		18								
10										100

Source: गणित की मजेदार दुनिया, कक्षा 4, राजस्थान

अतिरिक्त अध्ययन सामग्री (Additional Reading Resources)

- 1) आलेख: कट्टम बनाम जीरो- सन्दर्भ, एकलव्य
- 2) लार्ज स्केल कैम्प, गणित मॉड्यूल राजस्थान, 2017
- 3) गुणा पर आधारित पीपीटी

2.6 भाग (Division)

सीखने के प्रतिफल (Learning Outcomes)

कक्षा 3:

- बराबर बाँटना, समूह बनाना तथा उसे गणितीय रूप में दैनिक जीवन से सम्बंधित करना।
- भाग के तथ्यों को बराबर बाँटने और बार-बार घटाने या बराबर समूह बनाने की प्रक्रियाओं के रूप में समझते हैं। उदाहरण के लिए $12 \div 3$ में 12 को 3 जगह बराबर-बराबर बाँटने पर हरेक को 4 मिलेगा तथा 12 में से 3 को बार-बार घटाने की प्रक्रिया 4 बार में संपन्न होगी यानी 12 से 3-3 के 4 बराबर समूह बनेंगे।

कक्षा 4:

- भाग क्रिया के लिए समूह बनाएँ, जैसे $24 \div 3$ का अर्थ यह पता करना है कि 24 में 3-3 के कितने समूह हो सकते हैं, या 3-3 के कितने समूह मिलकर 24 बनाते हैं।
- एक संख्या का दूसरी संख्या में विभिन्न तरीकों से भाग देना। चिंटों द्वारा, बराबर बाँटकर, बार-बार घटाकर, भाग तथा गुणा के अंतर्सम्बंधों का उपयोग करना।
- भाग में पैटर्न की पहचान करना।

कक्षा 5:

- भाग देने के विभिन्न तरीकों का प्रयोग। जैसे- बराबर बाँटना, गुणन की विपरीत क्रिया।
- संख्याओं के भाग तथा गुणजों के आधार पर गुणनखंड की अवधारणा को समझें।
- दैनिक जीवन के सन्दर्भ/स्थितियों के बारे में चर्चा कर एक समूह के हिस्से समझें, जैसे- आधा दर्जन में कितने केले होंगे?
- मानक एल्गोरिथम द्वारा एक संख्या में दूसरी संख्या का भाग देना।

2.6.1 शिक्षक प्रशिक्षण कक्ष से

जून की बेतहाशा गर्मियों के दिन थे। राजस्थान के टोंक जिले में स्थित मालपुरा ब्लॉक में छह दिवसीय शिक्षक प्रशिक्षण चल रहा था। इस प्रशिक्षण कक्ष में प्राथमिक कक्षाओं में गणित विषय पढ़ाने वाले 35 शिक्षक-शिक्षिकाएँ एकत्रित थे। एक बहुत ही अनुभवी शिक्षक रज्जब अली सर गणित विषय के दक्ष प्रशिक्षक के रूप में काम कर रहे थे। आज के सत्र का विषय भाग की अवधारणा को समझने और सवालों को हल करने के तरीकों पर आधारित था।

रज्जब सर ने सभी शिक्षकों से सवाल किया कि 'क्या आपको भाग पढ़ाने में कुछ चुनौतियाँ आती हैं?' कुछ ही शिक्षकों ने अपनी चुनौतियाँ बताईं, बाकी सभी खामोश रहे। शिक्षकों ने जो समस्याएँ बताईं वो इस प्रकार थीं—

- बच्चे पहाड़े नहीं याद करते, इसलिए भाग के सवाल हल ही नहीं कर पाते हैं।
- भाग टूटे शून्य के सवालों में काफी गलतियाँ करते हैं।
- संख्याओं को सही स्थान पर नहीं लिखते हैं।
- भागफल, भाजक और भाज्य संख्याओं को नहीं बता पाते हैं।
- इबारती सवाल पढ़कर यह नहीं समझ पाते हैं कि इसमें क्या करना है।
- ऐसी संख्याएँ जिसमें 0 आ रहा हो, उसका भाग नहीं कर पाते हैं।



रज्जब सर ने एक बार और सभी से अपनी कक्षा में भाग पढ़ाने के अनुभव बताने को कहा। एक शिक्षक ने कहा कि भाग के बारे में तो हम तब बताएंगे जब हम भाग पढ़ा पाएंगे। हमारा काफी समय बच्चों को संख्याएँ और जोड़-घटाव सिखाने में ही लग जाता है। भाग तक तो हम बहुत मुश्किल से पहुँच पाते हैं।

रज्जब सर अपने साथी शिक्षकों की चुनौतियाँ जानते थे। उन्होंने कहा कि यह सही बात है कि गणित विषय में जब तक नीचे की अवधारणा पर ठीक से काम नहीं होगा तब तक ऊपर की अवधारणा पर काम करना मुश्किल होता है। इसे ही गणित विषय की सोपानक्रमिकता (Hierarchy) कहते हैं। संख्याओं को सीखने के बाद जोड़-घटाव और बार-बार जोड़ की सहायता से गुणा, गुणा करके पहाड़े बनाना और उसकी सहायता से भाग सीखना। आगे की प्रत्येक अवधारणा, पीछे सीखी गई अवधारणाओं और कौशलों पर ही आधारित होती है। हमें अलग-अलग कक्षा में किसी एक ही अवधारणा के बढ़ते हुए स्तर को भी ध्यान से समझना होगा। तभी हम अपनी कक्षा में बेहतर ढंग से गणित शिक्षण कर सकेंगे। ऐसा नहीं है कि छोटी कक्षाओं में सीखी गई अवधारणाओं पर काम पूरा हो जाएगा। वे आगे की अवधारणाओं में भी अलग-अलग ढंग से या नए स्वरूप में उपयोग में आती रहती हैं। भाग की अवधारणा को ही देख लीजिए। इसमें हम समूहीकरण, संख्या ज्ञान, स्थानीय मान, घटाव तथा गुणा का उपयोग करते हैं। इसे हम गणित की सर्पिलाकार (spiral) प्रकृति कहते हैं। ये सब बातें हम आगे कुछ उदाहरणों के साथ भी करेंगे।

मौखिक सवाल

भाग यानी बराबर बँटवारे की अवधारणा पर काम करने के लिए शुरू में मौखिक सवाल-जवाब के तरीके अपनाए जाने चाहिए। बच्चों के दैनिक जीवन से जुड़े सरल और रोचक सन्दर्भों पर आधारित कुछ इबारती सवालों को पूछा जाए। बच्चों के जवाबों को सुनते समय उनसे यह भी कहा जाए कि वे अपने तरीकों को समझाएँ। यह काम वे लिखकर या बोलकर भी कर सकते हैं।

1. घन्नू की मिठाई की दुकान पर एक मिठाई की ट्रे में 24 लड्डू रखे हैं। वह लड्डूओं को डिब्बे में रखना चाहता है। एक डिब्बे में 6 लड्डू आते हैं तो कितने डिब्बों की ज़रूरत होगी?

मतलब हम 24 को 6-6 के समूहों में रख रहे हैं। हमें कितने डिब्बे चाहिए?

2. दिलीप आलू बेचता है। वह मंडी से आलू की बोरी खरीदकर उसे छोटी-छोटी थैलियों में भरकर बेचता है। आज उसने मंडी से 27 कि.ग्रा. आलू की बोरी खरीदी है। उससे वह 3 कि.ग्रा. की थैलियाँ बना रहा है।
27 कि.ग्रा. आलू से 3 कि.ग्रा. आलू की थैलियाँ बनाए तो थैलियाँ बनेंगी?



इस तरह के और भी इबारती सवालों पर काम करने का अवसर दिया जाए। साथ ही बच्चों द्वारा दिए जा रहे जवाबों का तर्क भी समझा जाए। उनके लिखित या मौखिक जवाबों में निहित गणितीय सोच और तरीके को समझने की आवश्यकता होगी।

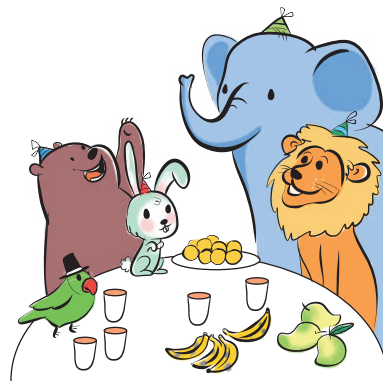
आगे का काम प्रोजेक्टर की मदद से पाठ्यपुस्तकों में दिए गए कुछ उदाहरण दिखाते हुए शुरू किया गया। रज्जब सर किसी भी उदाहरण को दिखाते हुए ठहरकर शिक्षकों से बात करते थे। शिक्षकों के अनुभव सुनते, उन्हें बोर्ड पर लिखकर अपनी बात समझाने का अवसर देते तथा अपनी तरफ से समेकन भी करते थे। उन्होंने साथी शिक्षकों से सवाल किया, भाग के सवाल आप किस कक्षा में पढ़ाते हैं? कुछ शिक्षकों ने कहा कि भाग का सवाल कक्षा 4 से पढ़ाया जाता है। कुछ अन्य शिक्षकों का जवाब था कि यह कक्षा 5 में पढ़ाया जाता है। रज्जब सर मुस्कराए। किसी की बात को नकारने की बजाय उन्होंने सभी का ध्यान स्क्रीन की तरफ चाहा और प्रोजेक्टर द्वारा पहली कक्षा का एक पाठ दिखाया।

पीपीटी 1: बराबर बाँटवारा करने का सन्दर्भ व बातचीत

इस पाठ का नाम था- गोलू हाथी की दावत। चित्र में गोलू हाथी का जन्मदिन मनाया जा रहा है। उसके दोस्त आए हैं। पाठ में कुछ सवाल हैं—

- 1- आम कितने हैं?
- 2- क्या सबको एक-एक आम मिलेगा?
- 3- मेज पर कितने गिलास हैं?

‘यहाँ पर क्या हो रहा है?’ चित्र और प्रश्नों की तरफ ध्यान दिलाते हुए रज्जब सर ने पूछा।



‘सबको एक-एक आम मिल पाएगा या नहीं, इसके बारे में पूछा जा रहा है,’ एक शिक्षक ने कहा। ‘कम-ज़्यादा के बारे में सवाल किया जा रहा है,’ एक अन्य शिक्षक ने कहा। ‘चीज़ों को बाँटने और कम-ज़्यादा बताने के ऊपर काम हो रहा है,’ एक शिक्षिका ने कहा।

आप सही कह रहे हैं, यहाँ कुछ चीज़ों को कुछ जानवरों में बराबर बाँटने की प्रक्रिया पर आधारित सवाल हैं।

अवधारणा के स्तर पर सोचा जाए तो असल में ये भाग के ही सवाल हैं। ऐसे सवाल स्कूल आने से पहले ही बच्चों के अनुभव में आने लगते हैं। कुछ टॉफियाँ, खिलौने या फलों आदि को बच्चे आपस में बराबर-बराबर बाँटते हैं। इसीलिए यह सवाल पहली कक्षा की किताब में मौजूद है। ज़रा सोचिए और बताइए कि अभी तो हमने बच्चों को भाग करना नहीं सिखाया है, फिर भला वे इस सवाल को कैसे हल कर पाएंगे।

‘गिनती करके’, रजनी मैडम ने कहा। ‘एक-एक की संगति करके’, राम अवतार सर ने कहा। रज्जब सर ने रजनी मैडम को बोर्ड पर आकर अपनी बात समझाने के लिए आमंत्रित किया। ‘बच्चे पहले सभी जानवरों को गिन लेंगे और फिर आम के फलों को गिन लेंगे। इस तरह उनको मालूम चल जाएगा कि 3 आम हैं, जबकि जानवर 5 हैं। इसलिए सभी को एक-एक आम नहीं मिल जाएगा।’ रजनी मैडम ने कहा। अब राम अवतार सर को आमंत्रित किया गया।

‘रजनी मैडम जो तरीका बता रही हैं उसे बच्चे तब ही उपयोग कर पाएंगे जब उनको गिनना आता होगा। यदि उनको गिनना नहीं आता होगा तब वे एक-एक की संगति (one-to-one correspondence) करके ही जान सकेंगे। इस तरीके में वे एक आम को खरगोश के लिए, एक आम को बाघ के लिए और एक आम को गोलू हाथी के लिए मिला देंगे। अभी भी भालू और लोमड़ी को आम नहीं मिल पाया है। इस तरह वे जान लेंगे कि सभी को एक-एक आम नहीं मिल जाएगा।’ राम अवतार सर ने अपनी बात कही। रज्जब सर ने दोनों की तारीफ़ की और उन्हें बैठने को कहा।

इन दोनों सवालों को पढ़ो और बताओ। कहाँ बराबर समूह बनाने होंगे और कहाँ बराबर बँटवारा करना होगा?

सवाल 1: भोलाराम हलवाई की थाल में 24 लड्डू हैं। उसे हर एक लिफ़ाफ़े में 4 लड्डू रखना है। ऐसे कितने लिफ़ाफ़े चाहिए होंगे?

सवाल 2: गफूर हलवाई की थाल में 24 लड्डू हैं। इन्हें 6 डिब्बों में बराबर-बराबर रखना है। प्रत्येक डिब्बे में कितने लड्डू आएंगे?

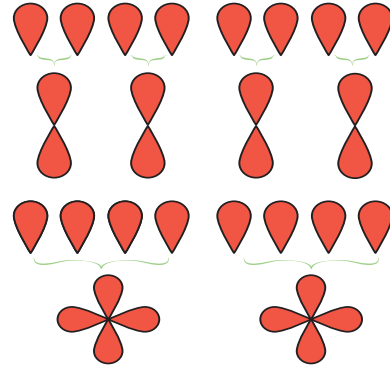
आगे की बात जोड़ते हुए उन्होंने कहा कि पहली कक्षा में किए जा रहे इस तरह के मौखिक सवाल और अभ्यास भाग की अवधारणा पर ही आधारित हैं। पहली से तीसरी कक्षा के दौरान कई पाठ्यपुस्तकें भाग के चिह्न का उपयोग किए बिना (without using division symbol) भाग की अवधारणा पर काम करने के अवसर बनाती हैं। यहाँ कई ऐसे इब्रारती सवालों (word problems) को पूछा जाता है जिनका जवाब बच्चे अपनी तरह से दे सकें। यह बहुत ही महत्वपूर्ण पड़ाव है। आगे चलकर इसे लिखित रूप में हल करने का काम भी किया जाएगा।



हमें भी अपनी कक्षाओं में पढ़ रहे बच्चों को बराबर बँटवारा करने और बराबर समूह बनाने (equal sharing and equal grouping) का अवसर पहली तथा दूसरी कक्षा से ही देना शुरू कर देना चाहिए। साथ ही यह बात भी करनी चाहिए कि यह काम उन्होंने कैसे किया। उनका तरीका क्या था? रज्जब सर ने आगे बढ़ते हुए पहली कक्षा की पुस्तक से ही एक और कार्यपत्रक दिखाया।

पीपीटी 2: पंखुड़ियाँ जोड़कर फूल बनाओ

यह कार्यपत्रक बहुत रोचक था तथा पहली कक्षा के अंत के दौरान पढ़ाए जाने वाले पाठ का हिस्सा था। अपेक्षा यह है कि जब बच्चे गिनना सीख चुके हों तब उनके गिनने के कौशलों और समूहीकरण की अवधारणा (counting strategies and grouping) का उपयोग करते हुए यह कार्यपत्रक हल कराया जाए। हम देख सकते हैं कि फूल की 8 पंखुड़ियों को जोड़कर अलग-अलग तरह के फूल बनाने हैं। दो उदाहरण यहाँ पर दिए गए हैं। पहले उदाहरण में 2 पंखुड़ियाँ जोड़कर फूल बनाया गया है। इस तरह के 4 फूल बन रहे हैं। जबकि दूसरे उदाहरण में 4 पंखुड़ियाँ जोड़कर फूल बनाया गया है। इस तरह के 2 फूल बने हैं।

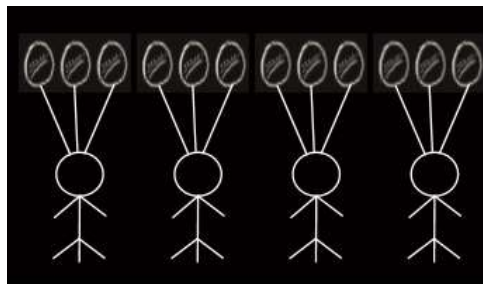


‘क्या तीन पंखुड़ियाँ जोड़कर फूल नहीं बन सकता?’ रज्जब सर ने सवाल किया। ‘बन सकता है सर’, सीमा मैडम ने कहा। रज्जब सर ने सीमा मैडम को बोर्ड पर आमंत्रित किया। उन्होंने 3 पंखुड़ियों को जोड़कर फूल बना दिया। इस तरह के 2 फूल बन सके थे और 2 पंखुड़ियाँ बची रह गई थीं। सभी को इसी तरह की 12, 16 और 18 पंखुड़ियों से ऐसे ही और फूल बनाने को कहा गया।

सभी ने अपनी-अपनी कॉपी में फूल बना लिए। रज्जब सर ने घूमकर सभी की कॉपी में देखा और सभी से प्रश्न किया, ‘इस गतिविधि से बच्चे क्या सीख रहे हैं? पंखुड़ियों से फूल बनाते हुए किन कौशलों का उपयोग हो रहा है? और कौन-कौन-से कौशलों का विकास हो रहा है?’

एक शिक्षक ने कहा कि बच्चे ‘समूहीकरण’ (grouping) की अवधारणा का उपयोग कर रहे हैं। साथ ही यह भी समझ पा रहे हैं कि कब-कब पंखुड़ियाँ शेष (remainder) बची रह जा रही हैं और कब सभी पंखुड़ियों से फूल बन जाएंगे (factors)। ये अनुभव भी उन्हें भाग के सवालों के लिए आधार तैयार करने में मददगार होंगे। रज्जब सर ने इसी तरह के कई और भी अभ्यासों को बच्चों के साथ करने के तरीके बताए।

एक और सवाल था— 12 रोटियों को 4 बच्चों में बराबर-बराबर बाँटें। चित्र में बताए गए तरीके के अनुसार एक बालिका ने हल किया है। उन्होंने इसी तरह के विविध सवाल बच्चों से मौखिक, चित्र द्वारा और लिखकर कराए जाने पर ज़ोर दिया।



2.6.2 भिन्न (Fraction) की अवधारणा:

इन्हीं चर्चाओं के बीच शिक्षिका मानसी जी ने कक्षा 3 की पाठ्यपुस्तक में दिए गए इस पेज को दिखाकर कहा, डिब्बे में रखे कुल 12 लड्डुओं को 4 लोगों में बराबर बाँटा जा रहा है, लेकिन दूसरे उदाहरण में सेब को काट क्यों दिया गया है। भला एक सेब को आधा-आधा काटने का भाग से क्या सम्बन्ध? यह तो भिन्न संख्या की बात की जा रही है।

पिताजी एक लड्डू का पैकेट भी लाये।

माँ - अरे छोटू इसमें कितने लड्डू हैं।

चिकू - लाओ माँ मैं गिन देता हूँ।

इसमें 12 लड्डू हैं।

माँ - तुम लड्डूओं को अपने चारों दोस्तों को बराबर-बराबर दे आओ।
आओ छोटू हम लड्डूओं को बराबर-बराबर प्लेटों में रखते हैं।



माँ - अरे चिकू, श्याम को कितने लड्डू दिए।

चिकू - माँ, श्याम को 3 लड्डू दिये।

छोटू - माँ, हमें कुछ खाने को दो।

माँ - टोकरे से एक सेब लो, और खा लो।



एक सेब



आधा सेब आधा सेब

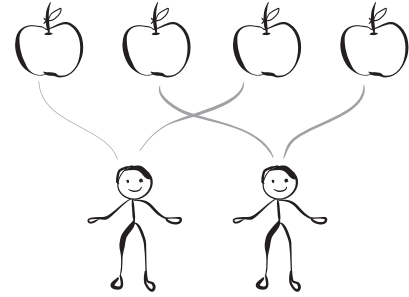
माँ - आपने सेब खा लिया।

चिकू - हाँ, माँ, एक सेब था, आधा-आधा खा लिया।

‘बहुत अच्छा सवाल है,’ रज्जब सर बोले।

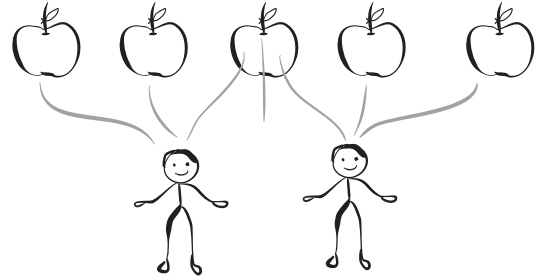
source: गणित की मजेदार दुनिया, कक्षा 3, राजस्थान

भिन्न संख्याओं की आधारभूत समझ का निर्माण भी बराबर बँटवारे के सवालों से ही किया जाना चाहिए। इस बात को हम एक नए उदाहरण से समझते हैं। रज्जब सर ने बोर्ड पर दो इबारती सवाल लिख दिए तथा सभी लोगों को ध्यान से पढ़ने के लिए कहा।



भाग के सवालों के सन्दर्भ और भिन्न संख्या को लिखना

- 4 सेबों को 2 लोगों में बराबर-बराबर बाँटो। बताओ, प्रत्येक को कितने सेब मिलेंगे?
- 5 सेबों को 2 लोगों में बराबर-बराबर बाँटो। बताओ, प्रत्येक को कितने सेब मिलेंगे?



पहले उदाहरण में 4 सेबों को 2 लोगों में बराबर-बराबर बाँटा जा रहा है। प्रत्येक को 2 सेब मिल जाएंगे। लेकिन दूसरे उदाहरण में 5 सेब को 2 लोगों में बाँटा जा रहा है। प्रत्येक को 2 सेब मिलेंगे, लेकिन 1 सेब शेष बचा रहेगा। हम तीसरी और चौथी कक्षाओं में बच्चों से शेष बचने (remainder) वाले सवाल भी हल करवाते हैं। लेकिन तीसरी कक्षा में ही हम ऐसे सवालों पर भी काम करते हैं जहाँ वस्तुओं को पूरा-पूरा बाँटना होता है। भले ही किसी या किन्हीं वस्तुओं को तोड़ना, काटना या फिर बाँटना ही क्यों न पड़े। इस तरह के सवालों से ही भिन्न संख्याओं (fractions) की समझ का विकास होता है। बल्कि सच कहें तो भिन्न संख्याओं की उत्पत्ति बराबर बँटवारा (equal sharing) की प्रक्रिया से ही हुई है। उन्होंने तीसरी कक्षा की पाठ्यपुस्तक से एक पाठ ‘बराबर बँटवारा’ के सवाल और अभ्यास दिखाए तथा उन पर बातचीत की।

सवाल: 6 रोटियों को 2 लड़कियों में बराबर-बराबर बाँटा, प्रत्येक को कितनी रोटियाँ मिलेंगी?

6 रोटियों को 2 लोगों में बराबर बाँटा, इस बात को गणितीय रूप में 'छह बटा दो', यानी $6/2$ के रूप में भी लिखते हैं। प्रत्येक को तीन रोटी मिल रही है।

अतः $6/2 = 3$

इसी तरह का एक और सवाल देखा गया।



सवाल: 5 रोटियों को 2 लड़कियों में बराबर-बराबर बाँटा, प्रत्येक को कितनी रोटियाँ मिलेंगी?

बच्चों को अपनी तरह से बँटवारा करने तथा अपनी बात को लिखकर बताने का अवसर दिया जाए। ऊपर किया गया पहला सवाल उन्हें लिखने की व्यवस्था समझने में मदद करेगा। हम जाँच सकते हैं कि क्या दूसरे सवाल में भी वे सही ढंग से बराबर बँटवारा कर पा रहे हैं। इसे गणितीय रूप में कैसे लिख रहे हैं? 'आपको क्या लगता है कि इस सवाल के लिए बच्चे क्या-क्या कर सकेंगे? और कहाँ पर उन्हें चुनौती आएगी? ऐसे में बतौर शिक्षक हमारी भूमिका क्या रहनी चाहिए?' रज्जब सर ने सवाल किया।



'दो-दो रोटी बाँटकर एक शेष बचा देंगे', सतीश सर ने कहा। 'चित्र देखकर बराबर बँटवारा कर लेंगे, लेकिन इसे लिख नहीं पाएंगे', राधा मैडम ने कहा। 'ढाई-ढाई रोटी मिल रही है, चित्र देखकर इतना तो बता ही लेंगे', अल्वीना मैडम ने कहा।

$$\begin{array}{r} 5 \div 2 \\ \underline{5} \\ 2 \overline{) 5} \quad (2 \\ \underline{-4} \\ 1 \end{array}$$

शेषफल 1

'हाँ, लेकिन इसे गणितीय रूप में लिखने के तरीके पर भी हमें ध्यान दिलाना होगा। जैसे ऊपर के सवाल में 6 रोटियों को 2 बच्चों में बाँटा गया था, तब हमने $6/2$ लिखा था। यह $6/2$ एक भिन्न संख्या है। यहाँ 6 अंश है और 2 हर है। इस तरह के अभ्यास तथा बातचीत बच्चों को भिन्न संख्याओं को समझने में मदद करेंगे। साथ ही अंश और हर के मायने समझने के साथ ही भिन्न संख्याओं की माला की समझ का विकास भी हो सकेगा।

इस चित्र में 5 रोटियों को 2 बच्चों में बाँटना है। एक स्तर तक बच्चे दो-दो रोटियाँ बाँटकर एक रोटी शेष बचाते

हैं। इसे हम लिखित रूप में इस प्रकार करते हैं। लेकिन यदि इस सवाल में ज़ोर देकर कहा जाए कि 5 रोटियों को 2 बच्चों में बराबर-बराबर बाँटो, तब हम शेष बचाकर छोड़ नहीं सकते। हमें वस्तुओं का पूरा-पूरा बँटवारा करके ही प्रत्येक के हिस्से बताने होंगे। अल्विना मैडम के बताए अनुसार यदि कुछ बच्चे यह जवाब दे पा रहे हैं कि बराबर बँटवारा करने के बाद दोनों लड़कियों को 'ढाई-ढाई' या 'दो और आधी रोटी' मिलेगी, इसके आगे हमें बच्चों को लिखने की एक नई व्यवस्था से परिचित कराने में मदद करनी पड़ेगी। जहाँ बाँटी जा रही वस्तु को अंश के रूप में लिखते हैं और जितने लोगों में बाँटा जा रहा है, उसे हर के रूप में लिखते हैं। जैसे- 5 रोटियों को 2 बच्चों में बराबर-बराबर बाँटो। इसे हम $5/2$ के रूप में लिखेंगे। इसी तरह 'ढाई' या 'दो और आधी' जैसे परिवेशीय शब्दों को आधार बनाकर इसका गणितीय रूप लिखने की तरफ बढ़ा जाएगा। जैसे- दो और आधी रोटी, या 2 और $1/2$ रोटियाँ, यानी $2+1/2$ रोटियाँ।

इस उदाहरण से हम देख सकते हैं कि बराबर बँटवारे (भाग करना) की अवधारणा, एक नई अवधारणा जिसे हम भिन्न कहते हैं, के जन्म का आधार बन रही है। इस तरह रज्जब सर ने इस सल का समेकन किया। (भिन्न संख्याओं पर आगे और विस्तार से काम किया जाएगा।)

2.6.3 इबारती सवाल और लिखकर हल करना (Word Problems)

यह सल इबारती सवालों और उन्हें लिखकर हल करने पर आधारित था। रज्जब सर ने कुछ सवाल दिखाए। ये सवाल इबारती सवाल के रूप में लिखे थे, जिसे पढ़कर बच्चों को मौखिक और लिखित (oral and written) जवाब देना था। रज्जब सर ने सभी को बताया कि पहली, दूसरी और तीसरी कक्षा में किया जा रहा यह काम बच्चों के अनुभवों से होता हुआ अब ऐसे सवालों की तरफ बढ़ रहा है जो शायद पहले कभी वास्तव में उनके अनुभव का हिस्सा नहीं रहा होगा। लेकिन इन सवालों के सन्दर्भ को समझकर वे अपनी प्रतिक्रियाएँ दे पाएंगे। उन्होंने एक बार फिर कहा कि बच्चों से मौखिक बातचीत करते हुए एवं चित्र बनाकर इस तरह के सवाल हल कराएँ।

- 12 लड्डुओं को 4 प्लेटों में बराबर-बराबर रखने पर एक प्लेट में कितने लड्डू होंगे?
- 30 फूलों को 3 बच्चों के बीच बराबर-बराबर बाँटने पर प्रत्येक को कितने फूल मिलेंगे?
- राजू के पास 36 बकरियाँ हैं। वह अपने 4 बेटों के बीच इन बकरियों को बराबर-बराबर बाँट देता है। बताओ, प्रत्येक बेटे को कितनी बकरियाँ मिलेंगी?

आम तौर पर हमने देखा है कि बच्चे इबारती सवाल को पढ़ते हुए कुछ ऐसे शब्दों, जैसे- कुल, बाकी, शेष (key words) को अपना सहारा बनाते हैं जिनकी मदद से वे यह जान सकें कि सवाल में करना क्या है। या फिर अपने शिक्षकों से यह सवाल करते हैं कि यहाँ क्या करना है, जोड़ / घटा / गुणा या भाग? यदि आप उन्हें यह बता दें कि इसमें क्या करना है तो कई बच्चे सही हल कर लेते हैं। कक्ष में बैठे कई शिक्षक-शिक्षिकाओं ने इस बात पर अपनी सहमति दी और बताया कि वे भी बचपन में ऐसा ही करते थे। कुछ ने यह भी बताया कि उनके स्कूल में छठी और सातवीं कक्षा के बच्चे भी इबारती सवाल हल करने के दौरान यह पूछते हैं कि सवाल में क्या करना है।

गतिविधि: एक कटोरी में 12 कंचे रखें। इस ढेर से 2-2 कंचे निकालते जाएँ।

ऐसा कितनी बार करने पर कटोरी खाली हो रही है?

इसे लिखें, 12 कंचे, 2-2 करके 6 बार हटाए।

12 कंचे, 2-2 के समूह बनाए।

कितने समूह बने?

इसे लिखें, $12 \div 2 = 6$

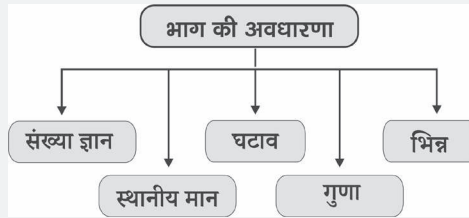
बच्चों को ऐसे और अभ्यास कराए जाएँ।



‘एक शिक्षक के रूप में हमें यह समझने की ज़रूरत है कि आखिर ऐसा क्यों हो रहा है’, रज्जब सर ने अपनी बात जारी रखते हुए कहा। बच्चे सवालों को पढ़कर उनका अर्थ ग्रहण (meaning making) नहीं कर पा रहे हैं। अपरिचित सन्दर्भ (unfamiliar context), गणितीय शब्दावली (mathematical terminology) और भाषाई जटिलता के चलते वे समझ नहीं पाते हैं कि उन्हें क्या करना है। अभी तक की चर्चा में लिखित मानक विधि (भाग के सवाल को हल करने की विधि) की बात नहीं आई है। इसका अर्थ यह है कि बच्चों को अपने तरीकों से सवाल को हल करने की स्वतंत्रता है। वे अपनी समझ से अपने तरीके खोजें और अपने तरीके से लिखें। उन्हें बोलकर, ठोस वस्तुएँ बाँटकर या चित्र बनाकर अपना जवाब देने के लिए प्रोत्साहित किया जाना चाहिए। बच्चों के लिए यह समझना ज़रूरी है कि एक ही सवाल को विभिन्न तरीकों (different methods) से हल किया जा सकता है।

लिखकर हल करना

बच्चों को भाग के सवालों को लिखकर हल करने के तरीके से भी परिचित कराया जाना आवश्यक है। यह काम उनके अब तक के अनुभवों और गणित में सीखी गई अवधारणाओं पर आधारित होगा। हम देख सकते हैं



कि भाग की अवधारणा में संख्या ज्ञान, स्थानीय मान, घटाव और गुणा जैसी अवधारणाओं का उपयोग होता है। अतः इन अवधारणाओं पर उनकी पुख्ता समझ होनी चाहिए। आगे चलकर भाग के सवालों में हमें भिन्न और दशमलव की समझ का उपयोग भी करना होगा।

2.6.4 भाग की मानक विधि से सम्बंधित मुद्दे (Standard Algorithm of Division)

रज्जब सर ने सभी को हल करने के लिए कुछ सवाल दिए और कहा कि इन सवालों को हल करने के बाद अपना तरीका भी समझाना होगा। सभी लोगों ने सवाल हल किए। एक ऐसा तरीका भी मिला जिस पर साझा चर्चा की गई। सवाल था- $2124 \div 3$, इस सवाल को शिक्षक शंकरलाल जी ने इस प्रकार हल किया था। उनसे कहा गया कि बोर्ड पर आकर अपना तरीका समझाएँ।

$$\begin{array}{r}
 78 \\
 3 \overline{) 2124} \\
 \underline{- 21} \\
 \times 24 \\
 \underline{- 24} \\
 \times
 \end{array}$$

संख्या 2124 को 3 से भाग करना था। सबसे पहली संख्या 2 है, जो कि 3 से छोटी है, इसलिए 1 को भी ले लिया। अब हमें 21 को 3 से भाग देना है। तीन सत्ते इक्कीस होता है। इक्कीस में से इक्कीस घटाया तो कुछ नहीं

बचा। अब 24 को उतार लिया। तीन अट्टे चौबीस, इस तरह चौबीस में से चौबीस घटाया तो कुछ नहीं बचा। भागफल 78 मिल गया।

शंकरलाल जी के इस हल को देखकर अन्य शिक्षक कुछ कहने के लिए बेकरार होने लगे थे। ऐसे कई लोग थे जो यह कह रहे थे कि यह तरीका सही नहीं है। रज्जब सर ने सुशीला मैडम को अपनी बात कहने के लिए आमंत्रित किया।

सुशीला मैडम द्वारा किया गया हल इस प्रकार था। वे अपना तरीका समझाने में संकोच कर रही थीं, लेकिन बोर्ड पर सवाल हल कर दिया था। सुशीला मैडम के तरीके पर सभी ने सहमति दी। 'शंकरलाल जी का तरीका क्यों गलत है और सुशीला मैडम का तरीका क्यों सही है?', रज्जब सर ने सवाल किया।

$$\begin{array}{r} 708 \\ 3 \overline{) 2124} \\ \underline{-21} \\ \times 2 \\ \underline{-0} \\ 24 \\ \underline{-24} \\ \times \end{array}$$

सभी लोग विधि का उपयोग करना जानते थे, लेकिन यही विधि क्यों काम करती है, इस सवाल पर कभी नहीं सोचा था। इसलिए रज्जब सर के सवाल का जवाब किसी ने नहीं दिया।

रज्जब सर भाग के मौखिक सवालों से लेकर, वैकल्पिक विधियों और मानक विधि तक की बात करना चाह रहे थे। अतः उन्होंने एक उदाहरण के साथ अपनी बात शुरू की।

सवाल: धनू की मिठाई की दुकान पर एक मिठाई की ट्रे में 24 लड्डू रखे हैं। वह लड्डुओं को डिब्बे में रखना चाहता है। एक डिब्बे में 6 लड्डू आते हैं तो बताओ, कितने डिब्बों की ज़रूरत होगी?

'छह चौक चौबीस ... 4 डिब्बे लगेंगे, ... 6 का पहाड़ा बोलकर पता कर लेंगे', चन्द्रभान सर ने कहा। 'छह को चार बार जोड़ लें ... यह चौबीस होता है', ... सुरभि मैडम का जवाब था। 'सही है, मौखिक रूप से या मनगणित में आप अलग-अलग तरीके से यह सवाल हल कर सकते हैं, लेकिन हमें अपने बच्चों को भाग का तरीका सिखाना है। उन्हें भाग करने की मानक विधि के प्रत्येक चरण के पीछे का तर्क भी मालूम होना चाहिए। उन्हें यह भी निर्णय लेना होगा कि कौन-सा तरीका सही है और कौन-सा गलत।' ऐसा कहते हुए रज्जब सर ने एक और पीपीटी दिखाई।

पीपीटी: भाग की मानक विधि

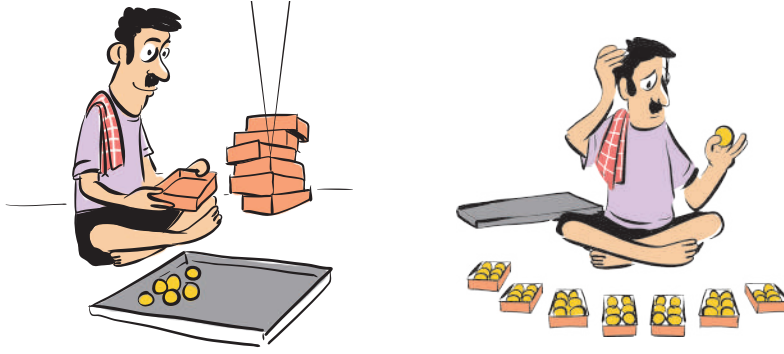
नानू और चेतन की मिठाई की दुकान है। एक डिब्बे में 6 लड्डू आते हैं। चेतन लड्डुओं को डिब्बे में जमाता है। हर ऑर्डर के लिए वह पहले मन ही मन में डिब्बों की संख्या सोचता है।

सवाल: आज दुकान पर बहुत भीड़ है। एक आदमी को 42 लड्डू चाहिए, चेतन को कितने डिब्बे भरने होंगे?

चेतन ने पहले 42 लड्डुओं को एक थाल में अलग रख लिया फिर 6



लड्डुओं से भरा डिब्बा तैयार करता गया। जैसे-जैसे डिब्बे तैयार होते गए, थाल में रखे लड्डुओं की संख्या घटती गई। क्या आप बता सकते हैं कि 6 लड्डुओं से भरे कुल कितने डिब्बे तैयार हुए हैं?



रज्जब सर ने हर बार थाल से छह लड्डू कम होने की प्रक्रिया के गणितीय रूप में लिखे तरीके की तरफ सबका ध्यान दिलाया। उन्होंने सवाल किया, क्या हम इसी बात को और भी छोटे तरीके से लिख सकते हैं?

‘इस बात को ऐसे भी कहा जा सकता है कि 42 लड्डू थे, 6 लड्डुओं को 7 बार उठाया गया’, बलजिंदर कौर मैडम ने जवाब दिया।

‘क्या आप अपनी बात का गणितीय निरूपण यानी इसे गणित की भाषा में लिख सकती हैं?’, रज्जब सर ने सवाल किया। बलजिंदर मैडम ने बोर्ड पर इस प्रकार लिखा:

रज्जब सर ने लिखने के इस तरीके से सहमति जताई, लेकिन इसे ही थोड़ा और व्यवस्थित करते हुए एक नए तरीके से लिख दिया।

लड्डुओं को बराबर समूह में रखने या बराबर समूह बनाने के काम को ध्यान से देखने पर हम पाएंगे कि यह कुल लड्डुओं में से बार-बार घटाने की प्रक्रिया है। इसे हम गुणा की सहायता से लिख रहे हैं। यही काम भाग के सवाल का स्वरूप भी ले रहा है। इस चर्चा से हम घटाव, गुणा और भाग की संक्रियाओं के अंतर्संबंध को बेहतर ढंग से समझ सके होंगे।

$$\begin{array}{r}
 42 \\
 - 6 \\
 \hline
 36 \\
 - 6 \\
 \hline
 30 \\
 - 6 \\
 \hline
 24 \\
 - 6 \\
 \hline
 18 \\
 - 6 \\
 \hline
 12 \\
 - 6 \\
 \hline
 6 \\
 - 6 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 42 \div 6 \\
 6 \overline{) 42} \quad 7 \\
 \underline{- 42} \\
 \text{X X}
 \end{array}$$

42 लड्डू थे
 7 बार 6 लड्डू उठाये गए
 $7 \times 6 = 42$
 7 डिब्बे बनेंगे

बार-बार घटाकर भाग करना

सायना ने रुबीना से कहा— 48 लोगों को ले जाने के लिए कितनी जीपें चाहिए?

रुबीना ने कहा— जीप में 8 लोग ही आराम से बैठ सकते हैं न, तो 6 जीपें लगेंगी।

तो सायना ने रुबीना से पूछा, तुमने कैसे पता लगाया? तब रुबीना ने कहा, मैंने तो ऐसे पता किया।

देखो 48 में से एक जीप में 8 लोग बैठ गए। अब 40 लोग बचे।

उसमें से 8 फिर दूसरी जीप में बैठ गए तो बचे

इस तरह से घटाती गई।

मतलब 6 जीपों में 48 लोग बैठ सकते हैं।

सायना बोली, यानी 48 के 6 भाग किए।

$$8+8+8+8+8+8= 48$$

हाँ, और इसे हम ऐसे लिखते हैं।

$$48 \div 8 = 6$$

48

- 8

40

- 8

32

- 8

24

- 8

16

- 8

8

- 8

0



इस तरह कुछ और उदाहरण लेकर बार-बार घटाने के तरीके से भाग के सवाल तक पहुँचने पर काम किया जाना चाहिए। हमें इबारती सवालों से शुरू कर अपने-अपने तरीके से हल करने का अवसर देना चाहिए। फिर बार-बार घटाने के तरीके को समझते हुए भाग के निशान से परिचित कराना चाहिए। इसके बाद हमें मानक विधि की तरफ बढ़ना चाहिए।

गुणा व भाग के बीच सम्बन्ध

हमारे पास 12 इमली के बीज हैं। पहले इन्हें इस तरह जमा लें।

3 समूह, प्रत्येक में 4

$$3 \times 4 = 12$$

$$12 \div 4 = 3$$

अब इन्हीं बीजों को नए तरीके से जमा लें।

4 समूह, प्रत्येक में 3

$$4 \times 3 = 12$$

$$12 \div 3 = 4$$



इन दोनों उदाहरणों से हम भाग और गुणा की अवधारणाओं में निहित संबंधों को समझ सकते हैं। साथ ही भाज्य संख्या, भाजक संख्या और भागफल के आपसी सम्बन्ध को भी देख सकते हैं।

पीपीटी: बराबर समूह बनाना और बराबर बँटवारा करना (Equal grouping & Equal sharing):

रज्जब सर ने बताया कि भाग के सवालों के दो प्रकार होते हैं— बराबर समूह बनाना और बराबर बँटवारा करना। इसे हम दो उदाहरणों से समझते हैं।

पहला उदाहरण: चेतन की थाल में 42 लड्डू हैं, उसे एक डिब्बे में 6 लड्डू रखना है। ऐसे कितने डिब्बे चाहिए होंगे?

दूसरा उदाहरण: 42 लड्डू हैं, इन्हें 7 डिब्बों में बराबर-बराबर रखना है। प्रत्येक डिब्बे में कितने लड्डू आएंगे? पहले उदाहरण में हमें यह ज्ञात है कि प्रत्येक डिब्बे में कितने लड्डू रखने हैं और इस जानकारी की मदद से ज्ञात करना है कि कुल कितने डिब्बों की ज़रूरत होगी। यहाँ पर लड्डू निकालते हुए प्रत्येक बार यह ध्यान रखना होगा

कि उनकी संख्या 6 ही हो। इस प्रकार 6 लड्डुओं के 7 समूह हम निकाल सकेंगे। भाग के सवालियों के ऐसे सन्दर्भ जहाँ हमें बराबर समूह बनाने/निकालने होते हैं उसे हम बराबर समूह बनाना कहते हैं।

$$42 \div 6$$

दूसरे उदाहरण में हमें यह ज्ञात है कि कितने डिब्बे हैं और उनमें लड्डुओं का बराबर बँटवारा करके यह पता करना है कि हरेक डिब्बे में कितने लड्डू आएंगे। यह भाग का बराबर बँटवारे का संदर्भ है।

$$42 \div 7$$

गणित की अच्छी पाठ्यपुस्तकें बच्चों को दोनों ही प्रकार के सन्दर्भों पर आधारित सवालियों को हल करने का अवसर देती हैं। यदि किन्हीं कारणों से पाठ्यपुस्तक में यह बात छूट रही है तो बतौर गणित शिक्षक हमें अपने बच्चों को यह बात समझने में मदद करनी चाहिए। रज्जब सर ने प्रोजेक्टर की सहायता से कुछ सवाल दिखाते हुए सवाल किया, 'क्या आप बता सकते हैं कि इनमें से कौन-से सवाल बराबर समूह बनाने वाले और कौन-से बराबर बँटवारा वाले हैं?'

$$\begin{array}{r} 6 \overline{)42} \quad (7 \\ -42 \\ \hline \quad \quad \quad \times \times \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \overline{)42} \quad (6 \\ -42 \\ \hline \quad \quad \quad \times \times \end{array}$$

करके देखिए- आप इन सवालियों को हल करने के लिए किस-किस तरह के गणितीय मॉडल काम में ले सकते हैं?

सवाल 1: मनोहर एक बार में 12 चाय लेकर जा सकता है। एक बैठक में 80 लोगों के लिए चाय मंगवाई गई। मनोहर को कितने चक्कर लगाने पड़ेंगे?

सवाल 2: मोहन 100 मीटर कपड़े के थान से 3-3 मीटर के टुकड़े स्कूल ड्रेस के लिए काट रहा है। वह कितनी ड्रेस बना पाएगा?

सवाल 3: भीरू अमरुद का बगीचा बनाने के लिए 49 पौधे लेकर आया। एक लाइन में उसने 7 पौधे लगाए तो वह ऐसी कितनी लाइनें बना सकेगा?

सवाल 4: दुकानदार ने 124 फीट की रस्सी के बण्डल से 4 बराबर नाप के टुकड़े किए। हर एक टुकड़े की नाप क्या होगी?

सभी लोगों ने इन प्रश्नों को देखकर जवाब दिया। साथ ही ऐसे और भी सवाल बनाए।

पीपीटी: भाग के सवाल हल करने की मानक विधि

अगले सत्र में भाग की मानक विधि पर काम किया गया। रज्जब सर ने प्रोजेक्टर पर एक सवाल दिखाया। यह सवाल छठी कक्षा में पढ़ रहे एक बच्चे ने हल किया था। सभी से पूछा गया कि क्या ये तरीका सही है। लोगों ने एक स्वर में कहा कि यह तरीका सही नहीं है। इस तरीके में क्या समस्या है? क्या आप सही तरीके से हल करते हुए समझा सकते हैं? रज्जब सर ने पूछा।

$$\begin{array}{r} 18 \\ 4 \overline{)432} \\ -4 \\ \hline 032 \\ -32 \\ \hline 00 \end{array}$$

भरत सिंह जी ने बोर्ड पर आकर 432 को 4 से भाग दिया। उन्होंने कहा कि एक बार में एक ही संख्या लेनी चाहिए और उसे 4 से भाग देते जाना चाहिए। इस तरह उनकी विधि में भागफल 108 प्राप्त हो रहा था। 'चार सौ बत्तीस रुपये को चार लोगों में बराबर बाँटा जाए तो प्रत्येक को कितना मिलेगा?', भरत सिंह जी ने कक्षा में बैठे शिक्षकों से सवाल किया।

$$\begin{array}{r} 4 \overline{)432} (108 \\ \underline{-4} \\ 03 \\ \underline{-0} \\ 32 \\ \underline{-32} \\ 00 \end{array}$$

'एक सौ आठ रुपया मिलेगा', एक शिक्षिका ने कहा।

'बिल्कुल, लेकिन बच्चे द्वारा हल की गई विधि में भागफल अट्टारह रुपये प्राप्त हो रहा है। इससे हम यह समझ सकते हैं कि बच्चे ने भाग की मानक विधि को ठीक ढंग से नहीं समझा है। इसके अलावा उसे भाग करने का सन्दर्भ तथा उद्देश्य भी मालूम नहीं है। यदि उसे यह मालूम होता कि वह 432 वस्तुओं को 4 लोगों/समूहों में बराबर बाँट रहा है तो उसका उत्तर 18 नहीं आता।' – भरत सिंह ने अपनी बात समझाते हुए कहा।

जमीलुद्दीन जी इसी कक्षा में बैठे थे। वे भरत सर द्वारा किए गए हल से सहमत थे, लेकिन इस बात से असहमति थी कि भाग करते समय हमेशा एक बार में एक ही अंक लेना चाहिए। वे उठकर बोर्ड पर आए और रज्जब सर से अनुमति लेकर एक नया सवाल सभी को हल करने के लिए दिया। यह सवाल था- $284 \div 4$

कुछ देर सभी ने हल किया। बोर्ड पर तरीके एकत्रित किए गए। इसी सवाल को लोगों ने दो अलग-अलग तरीकों से हल किया था।

भरत सिंह जी का मत था कि वे बिल्कुल सही हैं। एक बार में एक ही अंक को भाग देना चाहिए, इससे गलती होने की संभावना बहुत कम हो जाती है। बच्चों को शुरू से ही ऐसा करने की आदत डालनी चाहिए। सवाल $284 \div 4$ के लिए अपनी विधि को बोर्ड पर लिखकर समझाते हुए उन्होंने कहा, 'सबसे पहले 4 से 2 को भाग किया गया है। हम जानते हैं कि $4 \times 0 = 0$ होता है। अब 2 में से 0 घटाया जाएगा। इस तरह 2 शेष बचेगा।'

'अब हम 8 को नीचे उतार लेंगे। इस तरह 28 बन जाएगा। हम जानते हैं कि $4 \times 7 = 28$ होता है, तो 28 में से 28 घटाने पर कुछ नहीं बचेगा। अंततः हम 4 को भी नीचे उतार लेंगे। यह 4 के पहाड़े में 1 बार जाता है। शेषफल कुछ भी नहीं बचेगा। भागफल मिलेगा 071 जो कि वास्तव में 71 है।'

$$\begin{array}{r} 4 \overline{)284} (071 \\ \underline{-0} \\ 28 \\ \underline{-28} \\ 0 \\ \times \times 4 \\ \underline{-4} \\ \times \end{array}$$

कई शिक्षक/शिक्षिकाओं ने इस तरीके से पूर्ण सहमति जताई और साथ ही यह भी बताया कि स्कूली दिनों में उनके गुरुजी ने यह तरीका सिखाया था।

इधर जमीलुद्दीन सर अपनी बात पर अटल थे। उन्होंने कहा कि उनके स्कूली दिनों में गुरुजी ने कहा था कि जब पहला अंक भाजक से छोटा हो तो एक साथ दो अंक ले लेना चाहिए।

‘यहाँ भाजक 4 है और भाज्य संख्या 284 का पहला अंक 2 है। हम देख सकते हैं कि 4 के पहाड़े में 2 नहीं आता है, अतः 8 को भी साथ लेना होगा। इस तरह अब हमें 28 को 4 से भाग देना होगा।’

$$\begin{array}{r} 4 \overline{) 284} \quad (71 \\ \underline{-28} \\ \times 4 \\ \underline{-4} \\ 0 \end{array}$$

‘चार सत्ते अट्ठाईस होता है, अतः 28 में से 28 घटाया जाएगा। अब हम 4 को नीचे उतार लेंगे। चार के पहाड़े में 1 बार में 4 आ जाएगा। शेषफल 0 बचा।’

कक्षा में उपस्थित कुछ लोग इस विधि से भी सहमत थे। एक शिक्षिका ने बताया कि पाँचवी कक्षा की किताब में भी ऐसी ही विधि बताई गई है।

आपको क्या लगता है कि भरत सिंह जी का तरीका सही है या जमीलुद्दीन सर का तरीका सही है? अपने उत्तर के समर्थन में आप कौन-से तर्क देंगे?

2.6.5 टीएलएम द्वारा भाग की मानक विधि को समझना

आम जीवन में भाग के सवाल को हल करने के लिए हम अपनी पसंद की कोई भी विधि उपयोग कर सकते हैं। बहुत सारे लोग मनगणित का उपयोग करते हैं। हम देख सकते हैं कि तमाम लोग जिन्होंने स्कूल जाकर औपचारिक शिक्षा नहीं प्राप्त की है, वे भी अपने दैनिक जीवन के कामकाज के दौरान चीज़ों या रुपयों को बराबर बाँटने का काम कुशलतापूर्वक कर लेते हैं। वे जो भी विधि अपनाते हैं वो सब भी उतना ही महत्वपूर्ण गणित है, जितना कि स्कूल में पढ़ाया जाने वाला। इसके इतर संभव है कि स्कूल में सिखाई गई विधि को तो अच्छे से सीख लिया गया हो, लेकिन उस विधि को कहाँ व कैसे उपयोग करना है, यह नहीं मालूम हो। ऐसे कई बच्चों को हमने अपनी कक्षाओं में भी देखा है।

इन सबके बावजूद भी गणित की कक्षा में भाग करने की मानक विधि सिखाए जाने का अपना महत्त्व है। कई पाठ्यपुस्तकें कक्षा 4 या 5 में आकर भाग की मानक विधि पर काम करने का अवसर देती हैं। अपेक्षा यही रहती है कि एक बार यदि बच्चे इन मानक विधियों का तर्क समझ गए तो वे अपने जीवन में सभी तरह के भाग के सवाल हल कर लेंगे।

इस सवाल को हल करने की प्रक्रिया में कौन-कौन-सी अवधारणाओं का इस्तेमाल किया गया है?

$$\begin{array}{r} 237 \div 5 \\ 5 \overline{) 237} \quad 47 \\ \underline{-20} \\ 37 \\ \underline{-35} \\ 2 \end{array} \quad \text{उत्तर } 47\frac{2}{5}$$

सोपानक्रमिकता

आइए, एक इबारती सवाल के सहारे भाग करने की मानक विधि को खोजने (समझने) का प्रयास करते हैं। ऐसा कहकर रज्जब सर ने बोर्ड पर एक इबारती सवाल लिखा और आगे बात की।

सवाल: पिताजी ने पेड़ से 47 बेर तोड़े। इस काम में रमेश, मीना और गीता ने भी पिताजी का साथ दिया था। पिताजी ने इन 47 बेरों को इन 3 लोगों में बराबर बाँट दिया। प्रत्येक को कितने-कितने बेर मिलेंगे?

‘इस तरह के सवाल मौखिक रूप से पूछे जाने चाहिए। बच्चे अपनी तरह से जवाब बताएंगे। उनके जवाब तक पहुँचने के तरीके पर भी बात की जानी चाहिए। लेकिन कक्षा 4 तथा 5 में आ जाने के बाद बच्चों से लिखकर मानक विधि द्वारा हल करने का तरीका भी सिखाना होगा। आइए, दैनिक जीवन में किया गया बाँटवारा और लिखित रूप में किए गए भाग में क्या सम्बन्ध है, इसे समझते हैं।’

दैनिक जीवन में 47 बेर को 3 लोगों में बराबर बाँटने के कई तरीके संभव हैं। कक्षा में ऐसे अभ्यास कराइए जहाँ बच्चों को 47 कंकड़ / पत्तियाँ / कंचे या कोई अन्य वस्तुओं को 3 लोगों में बराबर बाँटना हो। यह भी देखिए कि उनके तरीके क्या हैं।

दैनिक जीवन में किया गया बाँटवारा और इसके लिखित रूप में क्या समानता है और क्या अंतर है? हम इस विधि तक कैसे पहुँचे हैं? मानक विधि में स्थानीय मान की अवधारणा का क्या उपयोग है? भाग करने के नियम किन तर्कों पर आधारित हैं?

रज्जब सर ने कहा, ‘इन सब सवालों पर हम आपस में मिलकर कुछ समझ बनाने का प्रयास करेंगे। इस गतिविधि में हम आइसक्रीम की तीलियों का उपयोग करेंगे। ऊपर समझे गए ‘समूहीकरण’ और ‘स्थानीय मान’ की अवधारणा के साथ ही हम अंदाज़ लगाने के कौशल का भी उपयोग करेंगे।’

रज्जब सर सवालों को बोर्ड पर हल करने के साथ ही सामग्री का उपयोग भी कर रहे थे। इसके लिए गणित की चार खाने वाली कॉपी का भी उपयोग किया गया। सदन की आपसी चर्चा का विवरण इस प्रकार है:

सवाल: पिताजी ने पेड़ से 47 बेर तोड़े। इस काम में रमेश, मीना और गीता ने भी पिताजी का साथ दिया था। पिताजी ने इन 47 बेरों को इन 3 लोगों में बराबर बाँट दिया।

इस सवाल में 47 वस्तुओं को 3 लोगों में बराबर बाँटा जा रहा है। अभी यह सवाल गणित और भाषा के उपयोग से बन रहा है। इस सवाल को हम विशुद्ध गणितीय रूप (गणितीय निरूपण) में $47 \div 3$ भी लिख सकते हैं।

(आपने कई अभ्यासों में देखा होगा कि बच्चों से सवाल बनवाए जाते हैं। बच्चे मौखिक या भाषाई रूप में सवाल बनाते हैं, फिर उन सवालों को गणित के रूप में भी लिखते हैं। यह कौशल अर्जित किए बिना बच्चे इबारती सवालों से घबराते हैं।)

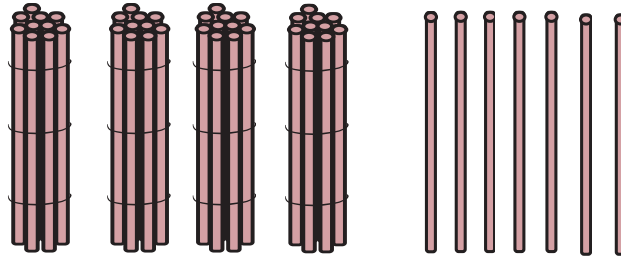
मामला 47 बेर बाँटने तक सीमित होता तो 3 लोगों को बैठाकर कई तरीकों से बाँटवारा किया जा सकता था। प्रत्येक को एक-एक बेर देते जाते, प्रत्येक को पहले पंद्रह-पंद्रह बेर देते और बाकी का दो बेर स्वयं रख लेते। या प्रत्येक को दस-दस बेर देते, फिर पाँच-पाँच बेर और दे देते। ऐसा काम हम दैनिक जीवन में खूब करते

हैं। लेकिन लिखित रूप में 47 को 3 से भाग देने की प्रक्रिया बिल्कुल ठीक ऐसी ही नहीं है। यहाँ हमारे पास वस्तुएँ नहीं हैं। हमारे पास संख्याएँ हैं, जो कि कुछ नियमों और कुछ संकेत चिह्नों के उपयोग से बनी हैं। हम किसी भी तरीके से भाग करें, लेकिन इन नियमों की पालना करनी ही होगी। थोड़ी देर के लिए मान लें कि हमारे पास 47 बेरों की जगह 47 आईसक्रीम की तीलियाँ हैं। इन 47 तीलियों को 3 लोगों में बराबर बाँटना है। यहाँ से हमें $47 \div 3$ प्रश्न मिला।

कागज़ पर लिखा हुआ 47 अब किसी मात्रा को दर्शा रहा है। संख्या लिखने की व्यवस्था दशमिक संख्या पद्धति पर आधारित है, जहाँ हम वस्तुओं को दस के समूहों और खुले के रूप में देखते हैं। यहाँ दस इकाइयाँ मिलकर एक दहाई बनती है, दस दहाइयाँ मिलकर एक सैकड़ा बनता है और दस सैकड़ा मिलकर एक हज़ार बनता है। इस प्रकार 47 तीलियों को 4 दहाई (दस तीलियों को मिलाकर बना बण्डल) और 7 इकाई (खुली तीलियाँ) के रूप में देखा जाता है।



इस तरह हम अपने प्रश्न $47 \div 3$ को चित्र द्वारा दर्शा सकते हैं। यहाँ 47 तीलियों को 3 लोगों में बराबर बाँटा जाना है। हम अपनी 47 तीलियों को भी स्थानीय मान के अनुरूप 4 बण्डल (दहाई) और 7 खुली तीलियों इकाई में रखेंगे। भाग के तरीके के विकासक्रम को चरण-दर-चरण सामग्री की सहायता से समझते हैं।



चरण 1: $47 \div 3$

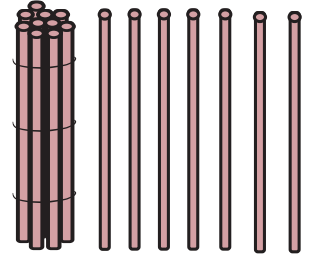
हम देख सकते हैं कि 47 तीलियों को 4 दहाइयों और 7 इकाइयों के रूप में दर्शाया गया है। इसी तरह वे 3 लोग भी दर्शाए गए हैं जिनमें इन्हें बाँटा जाना है। गणित की चार खाने वाली कॉपी पर भाग का सवाल $47 \div 3$ को हल करने का सबसे पहला चरण लिखा है, जहाँ संख्या 47 को स्थानीय मान के अनुरूप स्थान निर्धारित करते हुए लिखा गया है। अपने समझने के लिए भागफल लिखने की जगह को भी स्थानीय मान के अनुरूप लिख लिया है, ताकि आगे मिलने वाली संख्या को भी हम इसी नियम के तहत लिख सकें।

	द	इ		द	इ
3)	4	7		

चरण 2: 3 लोगों को 1 दहाई यानी दस-दस (स्थानीय मान अनुसार 10) तीलियाँ दे दी गईं। इस तरह 30 तीलियाँ (स्थानीय मान अनुसार 3 दहाइयाँ और 0 इकाई) खर्च हो गईं। शेष बची रह गई 17 तीलियाँ (1 दहाई और 7 इकाइयाँ)। हम देख सकते हैं कि 3 दहाइयाँ खर्च होने की घटना को 30 (3 दहाई और 0 इकाई)

		द	इ		द	इ
3)	4	7	(1	
		-	3			

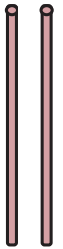
घटाकर दिखाया गया है। इसी तरह प्रत्येक को हिस्से में 1 दहाई (1 दहाई और 0 इकाई) मिलने की घटना को भी स्थानीय मान के अनुरूप बने खाने में लिखा गया है। साथ ही 17 तीलियाँ शेष बचने (1 दहाई और 7 इकाई) को भी स्थानीय मान के अनुरूप निर्धारित खाने में लिखा गया है। बच्चों को सही स्थान पर अंक लिखने के लिए हमेशा ध्यान दिलाना चाहिए। लिखित विधि का एक-एक चरण हमारे द्वारा किए जा रहे सामग्री के बँटवारे का गणितीय निरूपण ही होता है।



चरण 3: अब 3 लोगों को 5-5 इकाइयाँ और दे दी गई। इस तरह प्रत्येक के हिस्से में 15 तीलियाँ (1 दहाई और 5 इकाई के रूप में) आ गई हैं। दो तीलियाँ शेष बची हैं।

	द	इ		द	इ
3	4	7		1	5
	-	3			
		1	7		
		-	1	5	
			X	2	

हम कह सकते हैं कि इस बार के बँटवारे में भी 15 इकाइयाँ खर्च हो गईं। इन 15 इकाइयों के खर्च होने की घटना को भी स्थानीय मान के अनुरूप निर्धारित स्थान में लिखा जाएगा। चरण दो में खर्च हुई 30 और चरण तीन में खर्च हुई 15 तीलियों को मिलाकर देखा जाए तो कुल 45 तीलियाँ (4 दहाइयाँ और 5 इकाइयाँ) खर्च हो चुकी हैं। अब 2 तीलियाँ शेष बची रह गई हैं। इस तरह प्रत्येक के हिस्से में 15 तीलियाँ (दूसरे चरण में मिली 1 दहाई और तीसरे चरण में मिली 5 इकाई) आई हैं।



शुरू में हमने भागफल लिखने के स्थान पर भी इकाई और दहाई का स्थान निर्धारित किया था। इस का औचित्य आप अब समझ सकते हैं। जब दूसरे चरण में तीनों लोगों को 1 दहाई दी गई थी, तब इस काम को इसी निर्धारित स्थान पर 10 इकाई (1 दहाई और 0 इकाई) लिखकर दर्ज किया गया है। इस सवाल (47÷3) में 47 भाज्य संख्या है, 3 भाजक संख्या है और प्रत्येक के हिस्से में आने वाली संख्या 15 भागफल कहलाती है। ऊपर की गई चर्चा के द्वारा उभरकर आती हुई एक प्रक्रिया को हम पहचान सकते हैं। यह भाग के मानक विधि की तरफ बढ़ने का एक महत्वपूर्ण पड़ाव है। आइए, इसी उदाहरण की सहायता से भाग की मानक विधि का आविष्कार करते हैं। (भाग की मानक विधि का यह आविष्कार हमारे पूर्वजों ने बरसों पहले कर दिया है। यहाँ हम सिर्फ मानक विधि के विकासक्रम को समझ रहे हैं।)

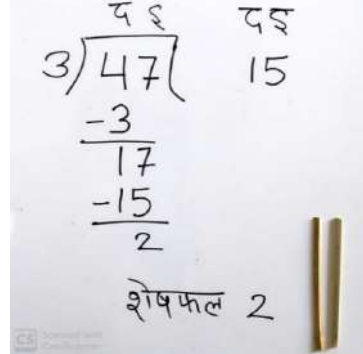
मानक विधि $47 \div 3$

रज्जब सर ने बोर्ड पर चार खाने वाली कॉपी जैसे खाने बना दिए तथा सुनीता मैडम को बोर्ड पर आमंत्रित किया। सुनीता मैडम को 47 को 3 से भाग देना था और अब तक की गई चर्चा और गतिविधियों की समझ से भाग की मानक विधि समझाना था। सुनीता मैडम ने अपनी बात इस प्रकार समझाया:

चरण 1: यहाँ संख्या 47 को 4 दहाई और 7 इकाई के रूप में देखा जा रहा है। संख्या 3 से भाग देने पर सभी को 1 दहाई मिल रही है। इसे भागफल के लिए निर्धारित स्थान में दर्ज किया गया है। इस तरह 3 दहाइयाँ

बाँट दी गई हैं। इस खर्च को हम घटाने के निशान के साथ 3 लिखकर दर्ज करेंगे। अब सिर्फ 1 दहाई शेष बची रह गई है।

चरण 2: हमारे पास 1 दहाई शेष है। अब 7 इकाई को भी नीचे उतारकर रख लेंगे। इस तरह 1 दहाई और 7 इकाई से मिलकर 17 बन रहा है।



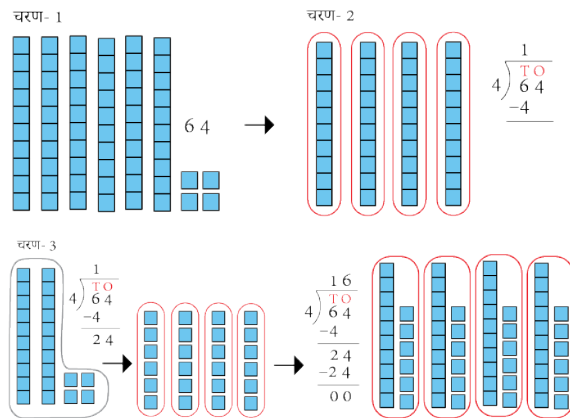
चरण 3: यदि 17 को 3 से भाग दिया जाए तो 5 इकाईयाँ और बाँटी जा सकेंगी। इस तरह 15 खर्च होगा। खर्च को घटाने के निशान के साथ 15 लिखकर दर्ज करेंगे। अब 2 इकाईयाँ शेष बची रह जाएंगी।

हम देख सकते हैं कि भाग के सवालियों को हल करने में उपयोग की जाने वाली मानक विधि का प्रत्येक चरण संख्याओं व मात्रा की समझ के साथ ही स्थानीय मान के सिद्धांत पर भी आधारित है। इसीलिए भाग की मानक विधि पर आने से पहले इन सभी मुद्दों पर पुख्ता काम करने की बहुत ज़रूरत है। इन बातों का ध्यान रखने में चार खाने वाली कॉपी बहुत मदद करती है। इसलिए छोटी कक्षाओं में हम गणित शिक्षण के लिए इस तरह की कॉपी का उपयोग करते हैं। यदि अच्छे से यह नियम समझ लिया गया है तो सादे कागज़ पर भी भाग करना बच्चों के लिए मुश्किल काम नहीं होगा।

सभी लोगों ने सुनीता मैडम की प्रस्तुति की सराहना की। रज्जब सर ने डीन्स ब्लॉक से परिचित कराया और कुछ सवालियों के उदाहरण से इसको इस्तेमाल करने का तरीका समझाया।



ऊपर भाग के सवालियों को हल करने के लिए तीलियों और बण्डलों का उपयोग किया गया है। इस काम को हम डीन्स ब्लॉक की सहायता से भी कर सकते हैं। यह बाज़ार में उपलब्ध एक शिक्षण अधिगम सामग्री है। इसमें इकाई, दहाई, सैकड़ा और हज़ार के समूह पहले से ही बने होते हैं। बच्चों के साथ काम करने के दौरान इन्हीं का उपयोग कर संख्या बनाने का काम किया जाता है। इस उदाहरण में 64 को 4 से भाग करने के लिए डीन्स ब्लॉक का उपयोग किया गया है।

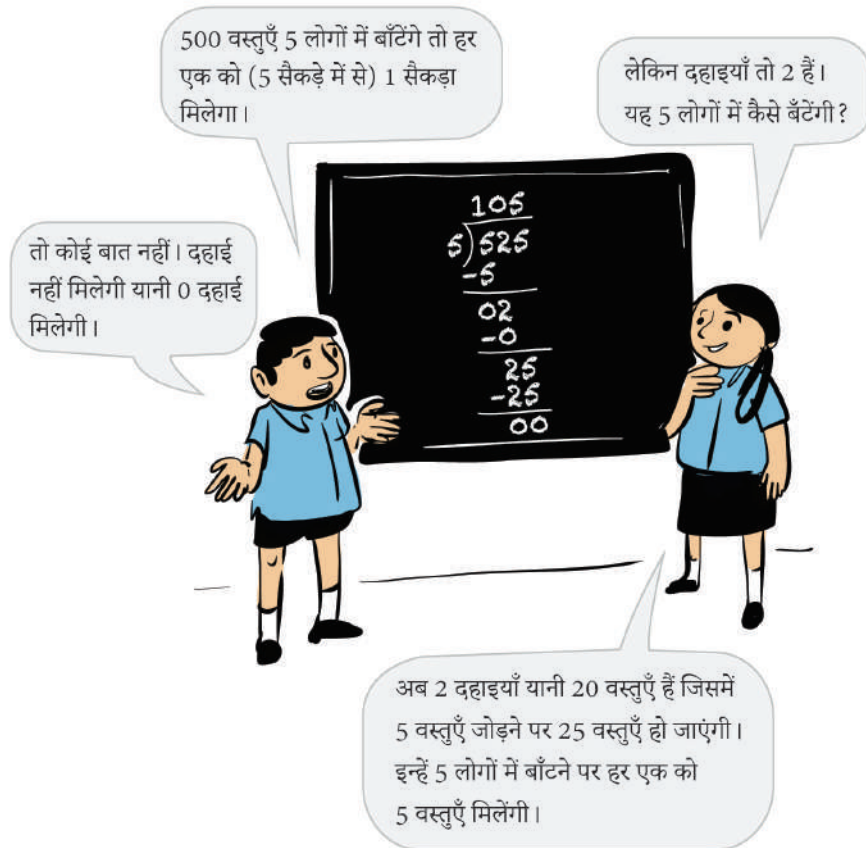


‘आप भी भाग के कुछ सवालों को डीन्स ब्लॉक की सहायता से हल कीजिए।’ रज्जब सर ने कुछ सवाल हल करने को दिए।

एक शिक्षिका ने इसी किताब में दिए सवाल की तरफ ध्यान दिलाते हुए कहा, ‘इस भाग के सवाल में भागफल को भाज्य संख्या के ऊपर ही लिखा गया है। क्या यह सही तरीका है?’

रज्जब सर ने जवाब दिया, ‘हाँ, ऐसा कर सकते हैं। कई किताबों में भी ऐसा है और कुछ लोग भी ऐसा करते हैं। बस एक बात का ख्याल रखना चाहिए की इकाई, दहाई और सैकड़ा के लिए निर्धारित स्थानों पर ही संख्याओं को लिखा जाए। इस सवाल में भी 525 के ठीक ऊपर 105 लिखा है। यह स्थानीय मान के अनुरूप ही है।’ आगे की बात कहते हुए उन्होंने बताया कि बहुत से बच्चों को भाग टूटे शून्य पर आधारित सवालों को हल करने में समस्या आती है। इस चित्र में 525 को 5 से भाग दिया जा रहा है। साथ ही दो बच्चों का आपसी संवाद है। इस उदाहरण को देख भाग टूटे शून्य को समझने में मदद कीजिए।

कई लोगों का प्रश्न होता है कि जोड़, घटाव और गुणा के सवालों को दाहिनी तरफ से हल किया जाता है। फिर ऐसा क्यों है कि भाग के सवाल को हम बाईं तरफ से हल करते हैं? क्या भाग के सवालों को भी दाहिनी तरफ से हल किया जा सकता है?— रज्जब सर ने प्रश्न किया और फिर पुस्तक से ऐसे कुछ उदाहरण दिखाए जहाँ भाग को अलग-अलग तरह से हल किया जा रहा है।



यहाँ दिए गए चित्र में मनीषा और पिकी ने $1648 \div 4$ को अपने-अपने तरीके से हल किया है। आप किसका तरीका सही मानते हैं? क्यों? क्या आप इसी सवाल को दाईं तरफ से हल कर सकते हैं?

प्रायः यह सवाल आता है कि हम भाग को दाहिनी तरफ से क्यों नहीं करते हैं? यहाँ शारदा द्वारा किया गया हल दिया गया है। इसे देखकर विचार करें, क्या यह सही है? यदि इस तरह हल किया जाए तो क्या समस्या है?

मनीषा का तरीका

$$100 + 100 + 100 + 100 + 10 + 2 = 412$$

$$\begin{array}{r} 4 \overline{)1648} \\ - 400 \\ \hline 1248 \\ - 400 \\ \hline 848 \\ - 400 \\ \hline 448 \\ - 400 \\ \hline 48 \\ - 40 \\ \hline 8 \\ - 8 \\ \hline 0 \end{array}$$

पिकी का तरीका

$$400 + 10 + 2$$

$$\begin{array}{r} 4 \overline{)1648} \\ - 1600 \\ \hline 48 \\ - 40 \\ \hline 8 \\ - 8 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \quad 4236 \\ - 36 \\ \hline 4200 \\ 1200 \\ \hline 3000 \\ 3000 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6 \\ + \\ 200 \\ + \\ 500 \\ + \\ 706 \end{array}$$

सवाल: क्या ये विधियाँ सही हैं? आप इन्हें कैसे हल करते हैं?

भरेश का तरीका

$$\begin{array}{r} 18 \\ 4 \overline{)432} \\ - 4 \\ \hline 032 \\ - 32 \\ \hline 00 \end{array}$$

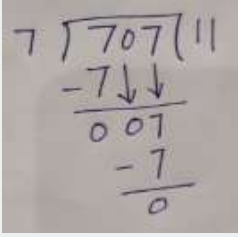
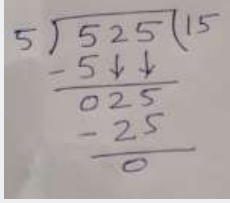
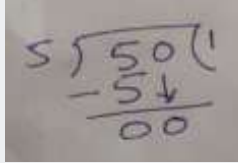
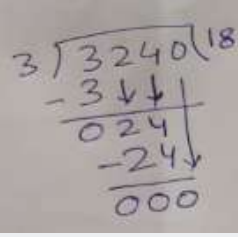
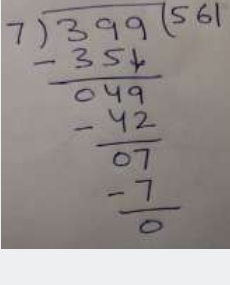
शरदा का तरीका

$$\begin{array}{r} 108 \\ 4 \overline{)432} \\ - 4 \\ \hline 03 \\ - 0 \\ \hline 32 \\ - 32 \\ \hline 00 \end{array}$$

2.6.6 बच्चों की सामान्य चुनौतियाँ (Common Challenges of Learners)

- भाग करने को वो एक प्रक्रिया के तौर पर ही समझते हैं जिसमें कि मानक विधि से एक संख्या का भाग दूसरी संख्या में दिया जाता है। भाग के मायनों (बराबर बाँटना- equal sharing और समान समूह बनाना- equal grouping) पर उनकी कोई समझ नहीं होती है। उदाहरण के लिए जब बच्चों को पूछा जाता है कि $20 \div 5$ से आप क्या समझते हैं तो वे उसे नहीं बता पाते हैं।
- भाग के तथ्यों की समझ न होना, जैसे कि $20 \div 5 = 4$ होता है तो यदि बच्चों से यह पूछा जाए कि $20 \div 4$ क्या होगा तो वे नहीं बता पाते हैं और पूरी प्रक्रिया को दोहराते हैं, या यों कहे कि भागफल, भाज्य और भाजक में संबंध नहीं समझ पाते हैं।

- मानक विधि को केवल चरणबद्ध तरीके से याद कर लेना, जिसके कारण कुछ गलतियाँ होती हैं, जैसे:

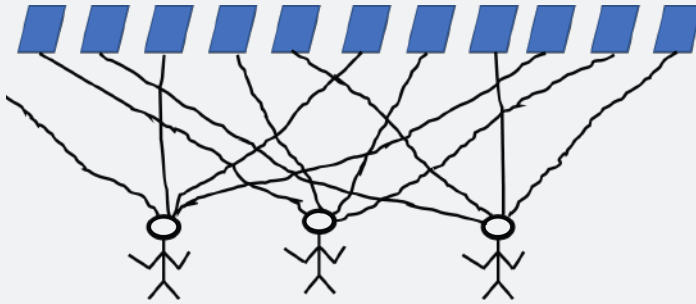
बच्चों द्वारा मानक विधि से हल किए गए सवाल	गलतियों के संभावित कारण
	<ul style="list-style-type: none"> भाग के मायनों- बराबर बँटवारा और बराबर समूहीकरण की समझ न होना।
	<ul style="list-style-type: none"> अनुमान नहीं लगा पाना। जैसे कि पहले उदाहरण में यदि 707 है जो कि 700 के करीब की संख्या है, इसको 7 लोगों में बाँटा जाएगा तो प्रत्येक को कम-से-कम 100 तो मिलेगा ही, अतः 11 उत्तर नहीं हो सकता।
	<ul style="list-style-type: none"> शून्य के मायने कुछ नहीं से लेना और भाग की प्रक्रिया में उसे शामिल ही न करना।
	<ul style="list-style-type: none"> स्थानीय मान की समझ का अभाव, उदाहरण के लिए किसी स्थान पर लिखे अंक को केवल एक अंक ही समझना, जैसे कि दूसरे सवाल में दहाई के स्थान पर लिखे 2 को 20 न समझकर केवल 2 समझना।
	<ul style="list-style-type: none"> अंतिम सवाल के हल को देखें तो यह समझ आता है कि बच्चे नहीं जानते हैं कि मानक विधि कैसे काम करती है, या यों कहें कि उसके काम करने के पीछे के तर्क क्या हैं, इसे वे नहीं जानते हैं। जिस कारण से वे मानक विधि और आंशिक जोड़ द्वारा भाग विधि को मिलाकर सवाल हल कर रहे हैं।

- समस्या या घटना को पढ़कर उसे समझकर उसको चित्र रूप में निरूपण नहीं कर पाते हैं। जैसे कि $12 \div 3$ (बराबर समूह बनाकर) यहाँ 12 चीजों को 3-3 के हिसाब से कितने लोगों में दे सकते हैं?



$12 \div 3$ (बराबर बँटवारा करके)

12 बर्फियों को तीन बच्चों में बराबर देंगे तो प्रत्येक को कितनी बर्फियाँ मिलेंगी?



- किसी सन्दर्भ या इबारत को पढ़कर ये समझ नहीं पाते हैं कि उसमें भाग की संक्रिया करनी है। इबारत में यदि संक्रिया स्पष्ट हो भी जाती है तो ये समझ नहीं आता है कि किस संख्या (भाज्य) में किसका (भाजक) भाग दिया जाना है। उदाहरण के लिए 576 किताबों को बक्सों में रखना है। यदि एक बक्से में 24 किताबों को रखा जाता है तो बताइए, कितने बक्सों की आवश्यकता होगी? इस इबारत को पढ़कर कुछ बच्चे यह पता नहीं लगा पाते हैं कि इसमें भाग की संक्रिया होगी, क्योंकि बाँटना जैसी शब्दावली का उपयोग नहीं हो रहा है। जो बच्चे इसमें यह बता पाते हैं कि भाग किया जाना है तो यह नहीं बता पाते कि यहाँ 576 और 24 में से किसको किससे भाग दिया जाना है और उसे गणितीय रूप में चिह्न का इस्तेमाल करते हुए कैसे लिखें।
- अमूमन यह देखने को मिलता है कि शिक्षक जब बच्चों को भाग पढ़ा रहे होते हैं तो सीधे मानक विधि पर ले जाते हैं, जहाँ भाग के चिह्न से परिचय छूट जाता है। ऐसी स्थिति में यदि सवाल $12 \div 3$ हल करने के लिए दिया जाए तो वे चिह्न पहचान नहीं कर पाते हैं।



2.6.7 उदाहरणात्मक कार्ययोजना (Illustrative Session Plan)

	सत्र	विषय	समय	सामग्री
1	भाग के सवालों पर बच्चों की चुनौतियाँ	<ul style="list-style-type: none"> • शिक्षकों के अनुभव सुनना। • बच्चों की चुनौतियाँ जानना। • शिक्षक साथियों की स्वयं की चुनौतियाँ समझना। • भाग से पहले की अवधारणा पर पक्की समझ। • कक्षा-कक्ष में भाग के सवालों की शुरुआत मौखिक व लिखित सवाल द्वारा। • बच्चों की चुनौतियों के कारण तथा समाधान के तरीके। 	2 घंटे	मौखिक चर्चा, बच्चों द्वारा हल किए गए सवाल के नमूने।

सत्र	विषय	समय	सामग्री
2	पाठ्यक्रम के अनुरूप भाग की अवधारणा से परिचय, बराबर बाँटना, समूह बनाना, बार-बार घटाना	3 घंटे	पाठ्यपुस्तकें, इबारती सवाल, बच्चों द्वारा किए गए हल।
3	भाग करने की विधि	3 घंटे	पाठ्यपुस्तक, पीपीटी, भाग की संक्रिया पर आधारित इबारती तथा संख्या के सवाल, तीली-बण्डल, डीन्स ब्लॉक।



2.6.8 अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)

कक्षा-कक्ष में भाग की अवधारणा पर आधारित काम निम्न प्रक्रियाओं के अनुसार किया जाना अपेक्षित है। शिक्षकों के साथ भाग की अवधारणा पर किए जाने वाले काम का आधार भी यही प्रक्रियाएँ होंगी।

अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)- भाग

1. बच्चों से वस्तुओं को बराबर-बराबर बाँटने के कार्य करवाते हैं। जैसे- समूहों में कंकड़, बीज, मोती आदि देकर समूह के सभी बच्चों में बराबर बाँटने के काम करवाते हैं और इसे भाग की अवधारणा से जोड़ते हैं।
2. वस्तुओं से विभिन्न मात्रा के समूह बनवाते हैं। जैसे- दो-दो के, तीन-तीन के ... आदि एवं इसे भाग की अवधारणा से जोड़ते हैं।
3. भाग सिखाना आरंभ करने के पूर्व संख्या ज्ञान, जोड़, घटाव और गुणा / पहाड़े की समझ सुनिश्चित करते हैं।
4. गुणन तथ्यों को भाग से जोड़कर देखते हैं, जैसे $3 \times 4 = 12$ तो $12 \div 3 = 4$ या $12 \div 4 = 3$, अर्थात् 12 वस्तुओं से 3-3 वस्तुओं के चार समूह या 4-4 वस्तुओं के तीन समूह बनाए जा सकते हैं।

अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)- भाग

5. बीजों / कंकड़ों / तीली-बण्डल / खिलौना नोटों आदि की मदद से भाग से सम्बंधित विभिन्न परिस्थितियाँ बनाकर बच्चों को स्वयं काम करने के अवसर देते हैं।
6. सामग्री के उपयोग के साथ-साथ बोलचाल की भाषा में बातचीत करते हुए मानक शब्दों एवं मानक विधि से परिचय कराते हैं।
7. बच्चों को सामान्यतः आने वाली कठिनाइयों को समझते हैं (जैसे- भाग नहीं जाना या ऐसी संख्याओं में भाग देना जिनमें 0 भी होता है) और कठिनाइयों के हल के लिए सामग्री के साथ तर्कपूर्ण कार्य करवाते हैं।
8. भाग और गुणा के अंतर्संबंधों पर समझ बनाने के लिए कार्य करते हैं।
9. भाग देने के विभिन्न तरीकों से बच्चों को परिचित कराते हैं।
10. विभिन्न संदर्भों पर आधारित दैनिक जीवन की परिस्थितियों के इबारती सवाल बनवाते हैं।
11. मानक विधि द्वारा यांत्रिक तरीके से सवाल हल करवाने के स्थान पर मानक विधि में निहित तर्क समझने में मदद करते हैं।
12. दो संख्याओं के भाग में गलती भी हो जाए तो उनसे चर्चा करके और अनुमान लगाकर सही दिशा में बढ़ने के लिए मदद करते हैं। जैसे $318 \div 3$ का उत्तर यदि 16 आ जाए तो बच्चों से बात करना- 300 रुपये 3 लोगों में बराबर बाँटे जाएँ तो प्रत्येक को कितने रुपये मिलेंगे? 300 से ज़्यादा रुपये 3 लोगों में बराबर बाँटे जाएँ तो प्रत्येक को 100 से ज़्यादा या 100 से कम रुपये मिलेंगे?
13. शिक्षण में ELPS का ध्यान रखते हैं। जैसे कि:
 - ठोस वस्तुओं (कंकड़ / बीज ... आदि) के साथ भाग के विभिन्न संदर्भों के अनुभव देते हैं।
 - वस्तुओं के साथ काम करते हुए बोलचाल की भाषा जैसे 'बराबर बाँटना', 'समूह बनाना', 'बचे' आदि का प्रयोग कर गणितीय शब्दावली 'भाज्य', 'भाजक', 'भागफल', 'शेष' आदि से परिचित करवाते हैं।
 - बच्चों को चित्रात्मक प्रस्तुति करने में मदद करते हैं।
 - इसी तरह मानक विधि से सवाल हल कराने के पूर्व ठोस वस्तुओं, चित्रों पर कार्य कराते हुए वैकल्पिक तरीकों से भी परिचय कराते हैं।
14. बच्चों के स्तर को ध्यान में रखते हुए समूह बनाते हैं एवं एक-दूसरे से सीखने के मौके देते हैं।
15. दैनिक शिक्षण योजना में आकलन को शामिल करते हैं।
16. आकलन के लिए गतिविधियों, मौखिक कार्य एवं लिखित कार्य का उपयोग करते हैं।
17. पाठ्यपुस्तक में दिए गए सवाल के साथ-साथ नए सवाल भी बनाते हैं।
18. आकलन के आधार पर बच्चों की आवश्यकता की पहचान करते हैं।
19. आकलन के परिणामस्वरूप अपनी योजना व तरीकों में आवश्यकतानुसार बदलाव करते हैं।



2.6.9 उदाहरणात्मक पाठ योजना (Illustrative Lesson Plan)

टॉपिक	उद्देश्य	समय	प्रक्रिया	सामग्री
भाग के मायने: बराबर बाँटवारा और बराबर समूहीकरण	<p>- इस पाठ योजना पर काम करने के बाद बच्चे निम्न बिंदुओं पर अपनी समझ बना पाएँगे— बराबर बाँटना, समूह बनाना, उसे गणितीय रूप में निरूपित कर पाना और दैनिक जीवन से जोड़ पाना।</p> <p>- भाग के तथ्यों को बराबर बाँटने और बार-बार घटाने या बराबर समूह बनाने की प्रक्रियाओं के रूप में समझ पाना। उदाहरण के लिए $12 \div 3$ में 12 को 3 जगह बराबर- बराबर बाँटने पर हरेक को 4 मिलेगा तथा 12 में से 3 को बार-बार घटाने की प्रक्रिया 4 बार में सम्पन्न होगी यानी 12 से $3-3$ के 4 बराबर समूह बनेंगे।</p>	<p>2-3 कालांश</p> <p>2-3 कालांश</p>	<p>ठोस चीज़ों को बाँटने पर काम:</p> <ul style="list-style-type: none"> • बच्चों को बाँटने का अनुभव स्कूलों में और स्कूल आने से पहले ही मिलता है। सबको एक-एक चीज़, 2-2 चीज़ आदि देने को कहना। ऐसे अनुभव भी देना जहाँ चीज़ें कम हों, लोग ज़्यादा और जहाँ चीज़ें ज़्यादा हों, लोग कम। (पेज न.- 108) • ठोस चीज़ें देकर बच्चों से 2, 3, 4, 5 ... आदि के समूह बनाने को कहना। • चीज़ें समूह में रखी हों और बच्चों से पूछना कि कुल कितनी चीज़ें हैं, हर एक समूह में कितनी चीज़ें हैं। • कटोरी / कप देकर 4, 6, 8, 10, 14, 20 पत्थर / बीज को दो समूहों में बराबर बाँटने को कहना। इसी तरीके से 3, 4, 5, 6 आदि समूहों में बराबर बाँटना और हर बार पूछना- कितने समूह बने? हर एक समूह में कितनी चीज़ें हैं? कुछ ऐसी परिस्थितियाँ भी देना जहाँ कुछ चीज़ें बच जाएँ। • 12 बीज देकर बोलना कि हर एक कटोरी में अगर $2-2 / 3-3 / 4-4$ चीज़ें रखी जाएँ तो कितने समूह बनेंगे? • ऐसी परिस्थिति भी देना जहाँ कुछ समूहों में अलग-अलग संख्याओं में चीज़ें रखी हों और फिर उनको बोलना कि 3 या 4 आदि समूहों में बराबर रखो। कितने समूह बने? हर एक समूह में कितनी चीज़ें हैं? इसी तरह की प्रक्रिया चित्र के साथ भी करना। NCERT कक्षा 3 पाठ्यपुस्तक के पाठ 12 में ऐसे बहुत सारे उदाहरण हैं। इस काम के लिए बोर्ड या वर्कशीट का इस्तेमाल किया जा सकता है। 	<p>कटोरी / कप</p> <p>पत्थर / बीज</p> <p>NCERT पाठ्यपुस्तक</p>

टाँपिक	उद्देश्य	समय	प्रक्रिया	सामग्री
			<p>गणितीय निरूपण और संकेतों पर काम करना:</p> <ul style="list-style-type: none"> 6 जलेबी 2 बच्चों में बराबर बाँटने पर हरेक बच्चे को कितनी मिलेगी? 6 जलेबी के दो बराबर भाग= 3 जलेबी हर एक के भाग में $6 \div 2 = 3$ भाग को हम '÷' चिह्न से दिखाते हैं। अगर 10 जलेबी हों और 2 बच्चे हों तो हरेक बच्चे को कितनी जलेबी मिलेंगी? हरेक बच्चे को 5 जलेबी मिलेंगी। $10 \div 2 = 5$ अगर 10 जलेबी को 5 बच्चों में बराबर बाँटना हो तो हरेक बच्चे को कितनी जलेबी मिलेंगी? हरेक बच्चे को 2 जलेबी मिलेंगी। $10 \div 5 = 2$ भाग करने की इस क्रिया को संकेतों में लिखने का ज़्यादा-से-ज़्यादा अनुभव देना होगा। जब इस पर कुछ काम हो गया हो तो ऐसे सवाल भी देने होंगे जहाँ गुणा और भाग के सम्बंध को समझने में मदद मिले— $6 \div 3 = ?$ देखो $3 \times 2 = 6$ $8 \div 2 = ?$ देखो $2 \times 4 = 8$ 12 लड्डुओं को 4 बच्चों में बराबर बाँटने पर हरेक बच्चे को कितने लड्डू मिलेंगे? $12 \div 4 = ?$ 4 को किससे गुणा करने पर 12 मिलेगा? 3 ($4 \times 3 = 12$), तो इस तरीके से $12 \div 4 = 3$ हम गुणा करके या पहाड़ा पढ़कर भी भाग के सवालों को हल कर सकते हैं। एक और तरीके से इस सवाल को हल करते हैं। 	

टॉपिक	उद्देश्य	समय	प्रक्रिया	सामग्री
			<p>12 लड्डुओं में से एक बार 4 लड्डू कम किए तो $12-4=8$</p> <p>अब 8 लड्डुओं में से एक बार 4 लड्डू कम किए तो $8-4=4$ और अब 4 में से 4 लड्डू कम किए तो $4-4=0$, हमारे पास अब कोई लड्डू नहीं बचा। तो हम कह सकते हैं कि 12 में से 4-4 लड्डू कम करने से 3 बार में सारे लड्डू खत्म हो जाएंगे।</p> <p>अब तुम लोग इसी तरीके से बताओ $16\div 2=?$ $24\div 4=?$ सवालों को इस तरीके से कैसे हल करोगे?</p> <p>आकलन:</p> <p>आकलन करते हुए, जिनको समझने में समस्या आ रही हो उनके साथ फिर से काम करना होगा। आकलन के लिए कुछ सवाल इस प्रकार हो सकते हैं:</p> <ul style="list-style-type: none"> • 16 लड्डुओं को 4 प्लेटों में बराबर-बराबर रखने पर एक प्लेट में कितने लड्डू होंगे? • 30 फूलों को 3 बच्चों के बीच बराबर-बराबर बाँटने पर प्रत्येक को कितने फूल मिलेंगे? • 42 कंचे हैं, इन्हें कुछ डिब्बों में बराबर-बराबर रखना है। अगर एक डिब्बे में 6 कंचे आते हैं तो कितने डिब्बों की ज़रूरत पड़ेगी? • राजू के पास 36 बकरियाँ हैं, वह अपने 4 बेटों के बीच इन बकरियों को बराबर-बराबर बाँट देता है। प्रत्येक बेटे को कितनी बकरियाँ मिलेंगी? • कुछ सवाल भाग के तथ्यों पर भी पूछना चाहिए। इसके लिए NCERT, कक्षा 3 पाठ्यपुस्तक, पेज संख्या 175-176 देखें। 	

2.6.10 सार संक्षेप (Summary)

- भाग दो प्रकार के सन्दर्भों पर आधारित है— बराबर समूह बनाना और बराबर बँटवारा करना।
- बच्चों के दैनिक जीवन के अनुभवों पर आधारित मौखिक सवाल पूछें। उनके उत्तर तक पहुँचने के तरीके समझने के लिए बच्चों के साथ संवाद करें। उन्हें भी इबारती प्रश्न बनाने और एक-दूसरे से पूछने के लिए प्रेरित करें।
- बच्चों को अपने तरीके लिखकर बताने के लिए प्रेरित करें। मानक विधि के उपयोग की जल्दबाजी न करें।
- ठोस वस्तुओं के बँटवारे की प्रक्रिया को लिखकर दर्ज करना सीखने का अवसर दें। मानक विधि पर आने से पहले भाग करने के विविध तरीके बताएँ।
- भाग टूटे शून्य पर आधारित सवालों को हल करने में बहुत-से बच्चे (कई बड़े भी) गलती करते हैं। भाग करने के नियमों को समझाने के लिए तीली-बण्डल और डीन्स ब्लॉक का उपयोग अवश्य करें।
- कक्षा-कक्ष में बच्चों को भाग सिखाने के लिए हम सामग्री के रूप में मोतीमाला, माचिस की तीलियों के बण्डल, आइसक्रीम की तीलियों के बण्डल और डीन्स ब्लॉक का उपयोग कर सकते हैं।
- शिक्षक साथियों को अच्छे सन्दर्भों पर आधारित भाग के सवाल बनाने का अवसर दें। यह भी अच्छा होगा यदि वे अपने हाथ से बनाई गई शिक्षण अधिगम सामग्री का उपयोग करें।



2.6.11 कार्यपत्रक तथा गतिविधियाँ (Worksheets and Activities)

बराबर समूह बनाना (Equal grouping):

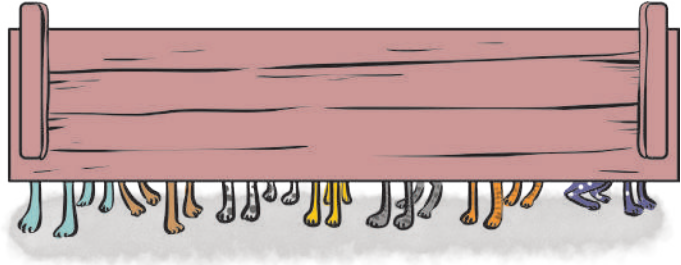
- **गतिविधि:** बच्चों से कहा जाए कि 30 बीजों / पत्तियों / कंकड़ों को 3-3 के समूहों में रखें और फिर समूहों की संख्या गिनें। उसके बाद उनसे पूछा जाए, '30 में कितने 3 हैं?'
- **गतिविधि:** खेल के ज़रिए, जैसे कि बच्चों को मैदान या कक्षा-कक्ष में खड़ा होने के लिए कहें और बताएँ कि मैं पहले एक लाइन बोलूंगा और फिर एक संख्या बोलूंगा। जितनी संख्या बोली जाएगी उतने के समूह बनाने हैं। जैसे- मामा जी ने लड्डू खाए, कितने भाई कितने- 4, तो सभी बच्चे 4-4 के समूह बनाकर खड़े हो जाएंगे। यदि सभी में बराबर 4-4 के समूह बन जाएंगे तो कितने समूह बने, ये गिनने को कहा जाएगा। इसी प्रकार फिर से खेल को किसी और संख्या के साथ आगे बढ़ाया जाएगा। और यदि किसी समूह में कम या ज़्यादा हुए तो उस समूह को आउट (out) माना जाएगा और फिर से सभी बच्चों के साथ खेल को आगे बढ़ाया जाएगा।
- **गतिविधि:** 20 कंचे देकर बच्चे को कहा जाए कि आपको इस समूह में से एक बार में 2 कंचों को ही निकालना है। फिर पूछें, ऐसा करके कितनी बार में आपने ये काम पूरा किया? इसी प्रक्रिया को कंचों की संख्या बदल-बदल कर करा सकते हैं। हर बार के अपने अवलोकन को दर्ज करें कि कितनी बार में काम पूरा हो रहा है।

- **कार्यपत्रक:** यहाँ 9 बच्चों का एक समूह है। हमें इनमें से 3-3 बच्चों की टोलियाँ बनानी हैं। कितनी टोलियाँ बनेंगी?



_____ टोलियाँ बनेंगी।

- गायत्री की कुछ बिल्लियाँ एक डिब्बे के अंदर खेल रही थीं। जब उसने उन्हें गिनने के लिए डिब्बे में झाँका तो उसे सिर्फ उनके पैर नज़र आए। उसने गिने तो 28 पैर थे। डिब्बे में कितनी बिल्लियाँ थीं?

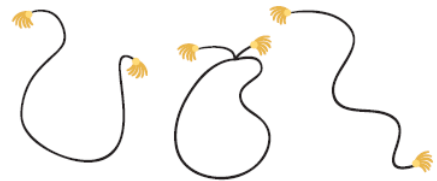


डिब्बे में _____ बिल्लियाँ थीं।

बराबर बाँटना (Equal sharing):

- **गतिविधि:** 5 बच्चों की एक टोली में एक बच्चे को 20 कंचे दिए जाते हैं। टोली के उस बच्चे को कहा जाता है कि इन कंचों को टोली के बच्चों में बराबर-बराबर बाँट दो। बच्चे अवलोकन कर रहे होंगे और उनसे यह सवाल किया जाएगा कि प्रत्येक को कितने कंचे मिले।
- **गतिविधि:** बच्चों को मैदान में ले जाकर तीन बड़े गोले बनाने को कहा जाता है। फिर बच्चों को बोला जाता है कि वे तीनों गोलों में बराबर-बराबर बँटकर खड़े हो जाएँ। उन्हें गिनकर जाँचने के लिए बोला जाए कि प्रत्येक गोले में कितने बच्चे खड़े हैं।

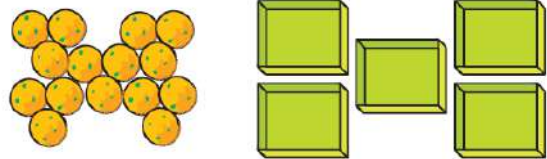
- **कार्यपत्रक:** 18 मोती बनाओ। उन्हें 3 बराबर समूहों में बाँटो।



source: गणित का जादू, कक्षा 3, एनसीईआरटी

हर समूह में _____ मोती हैं।

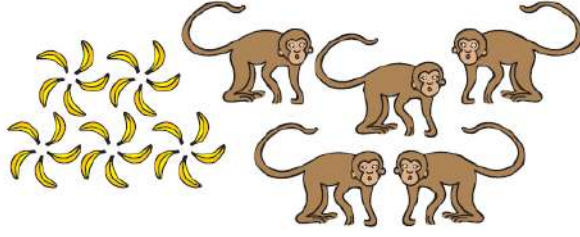
- मिकू के पास 15 लड्डू हैं और वह उन्हें 5 बक्से में बराबर-बराबर रखती है। बताइए, हर बक्से में कितने लड्डू होंगे?



source: गणित का जादू, कक्षा 3, एनसीईआरटी

हर बक्से में _____ लड्डू होंगे।

- 25 केलों को 5 बंदरों में बराबर-बराबर बाँटना है। हर बंदर को कितने केले दोगे?



हर बंदर को _____ केले मिलेंगे।

- **गतिविधि:** इन सवालों को हल कीजिए तथा तीली-बण्डल या फिर डीन्स ब्लॉक की सहायता से अन्य साथियों को समझाइए।

1. सोनू ने बाज़ार से कुछ अंडे खरीदे। यदि वह उनके 2-2 के समूह बनाता है तो 1 अंडा बच जाता है। यदि वह उन्हें 3-3 के समूह में जमाता है तो भी 1 अंडा बच जाता है। यदि वह उन्हें 4-4 के समूह में जमाता है तो भी 1 अंडा बच जाता है। और यदि वह 5-5 के समूह में जमाता है तो एक भी अंडा नहीं बचता है। बताओ सोनू ने कुल कितने अंडे खरीदे?
2. अब्दुल के पास 240 मोती हैं। उसे एक जैसी 7 मालाएँ बनानी हैं। हर माला में अधिक-से-अधिक कितने मोती होंगे? कितने मोती बचेंगे?
3. पारुल अपनी बहन की शादी के बाद एक फूलमाला स्कूल ले आई। माला में 203 गुलाब के फूल थे। पारुल की कक्षा के सभी बच्चों ने फूल मांगे तो पारुल ने सभी को बराबर-बराबर फूल बाँटने की सोची। कक्षा में कुल 27 बच्चे हैं। हर एक को कितने फूल मिलेंगे? और कितने शेष बचेंगे?

नोट: कार्यपत्रक और गतिविधियों के साथ इन तीन सवालों की तरफ ध्यान दिलाएँ।

1. कुल कितनी चीजें हैं?
2. कितने लोगों/स्थान में बाँटना है?
3. प्रत्येक या हर एक को कितना मिला?

इन सवालों के माध्यम से भाग के चिह्न एवं समस्या के गणितीय स्वरूप तक बच्चों को लाएंगे।

इन्हें भी हल करो:

- एक पेंसिल की कीमत 3 रुपये है तो 120 रुपये में जूलिया कितनी पेंसिलें खरीद सकती है?
- राहुल ने 136 नींबू के पौधे लगाए। वह एक कतार में 8 पौधे लगाता है तो कुल कितनी कतारें बनेंगी?
- एक पैकेट में 39 मीटर रिबन है। यदि हर बच्चे को 3 मीटर रिबन देना है तो एक पैकेट रिबन कितने बच्चों में बाँटा जा सकता है?
- एक जग में 6 गिलास पानी आता है और बाल्टी में 84 गिलास पानी आता है। बाल्टी में कितने जग पानी आएगा?
- सलमा 513 मोतियों को 3 लोगों में बराबर बाँटना चाहती है। प्रत्येक को कितने मोती मिलेंगे?
- नंदू 8650 रुपये को अपने 5 बच्चों में बराबर बाँटना चाहता है। प्रत्येक को कितने रुपये मिलेंगे?

- मानक विधि से हल करो।

$639 \div 3$

$805 \div 5$

$288 \div 6$

$424 \div 6$

$2124 \div 3$

$441 \div 2$

अतिरिक्त अध्ययन सामग्री (Additional Reading Resources):

1. भाग की संक्रिया पर आधारित पुलआउट- लर्निंग कर्व, अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी
2. राज्य की पाठ्यपुस्तकें
3. कक्षा 1 से 5, गणित पाठ्यपुस्तकें- एनसीईआरटी

2.7 भिन्न (Fractions)

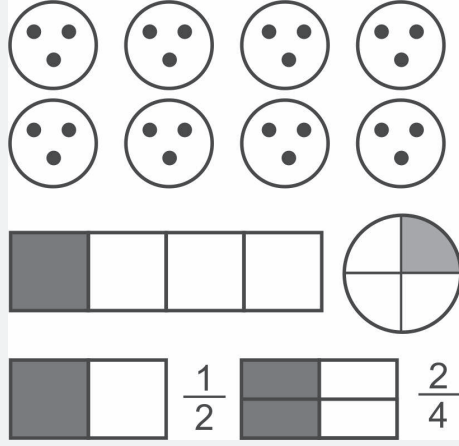
सीखने के प्रतिफल (Learning Outcomes)

कक्षा 3

- बराबर बाँटना, समूह बनाना तथा उसे गणितीय रूप से अपने दैनिक जीवन से जोड़कर समझना।

कक्षा 4

- भाग क्रिया के लिए समूह बनाएँ, जैसे $24 \div 3$ का अर्थ यह पता करना है कि 24 में 3 के कितने समूह हो सकते हैं, या 3-3 के कितने समूह मिलकर 24 बनाते हैं।
- भिन्न संख्याएँ जैसे- आधा, एक चौथाई, तीन चौथाई पर चर्चा करें। इसे दैनिक जीवन से जोड़कर समझें।
- भिन्न संख्याओं को चित्रों / कागज़ को मोड़ने की गतिविधियों द्वारा प्रस्तुत करें। जैसे- चित्र के आधे भाग में रंग भरें।
- दिए गए चित्र अथवा वस्तुओं के समूह में से आधा, एक चौथाई, तीन चौथाई भाग को पहचानें।
- संख्याओं/संख्याकों की मदद से भिन्नों को आधा, एक चौथाई तथा तीन चौथाई के रूप में प्रदर्शित करें।
- किसी भिन्न की अन्य भिन्न से तुल्यता बनाएँ।



कक्षा 5

- दैनिक जीवन के सन्दर्भ/स्थितियों के बारे में चर्चा कर एक समूह के बराबर हिस्से को समझें। जैसे- आधा दर्जन में कितने फल होंगे?
- विभिन्न तरीके जैसे- कागज़ मोड़कर, चित्रों में छायांकन के द्वारा भिन्नों की तुलना करें।
- विभिन्न गतिविधियों द्वारा तुल्य भिन्न को समझें। जैसे- कागज़ मोड़ना और छायांकन।
- दशमलव भिन्न (1/10वाँ भाग, 1/100वाँ भाग) की अवधारणा समझें।
- समूह के हिस्से के लिए भिन्न संख्या बनाएँ।
- दिए गए भिन्न के समतुल्य भिन्न की पहचान करना तथा समतुल्य भिन्न बनाना।
- दिए गए भिन्न $1/2$, $1/4$, $1/5$ को दशमलव भिन्न के रूप में लिखें। लम्बाई, मुद्रा आदि की इकाइयों को समझें।
- भिन्न को दशमलव संख्या तथा दशमलव संख्या को भिन्न में लिखें।

पिछले सभी पाठों में कार्यपत्रक अंत में दिए गए हैं। भिन्न पर आधारित इस पाठ की शुरुआत कार्यपत्रक से की जा रही है। नीचे दिए गए सभी सवालों को हल कीजिए। सबसे पहले स्वयं हल करिए। अब अपने साथियों से बात करके जानिए, क्या आपका तरीका और उनका तरीका एक-सा है? या एक ही सवाल को कितने विविध तरीके से हल किया गया है?



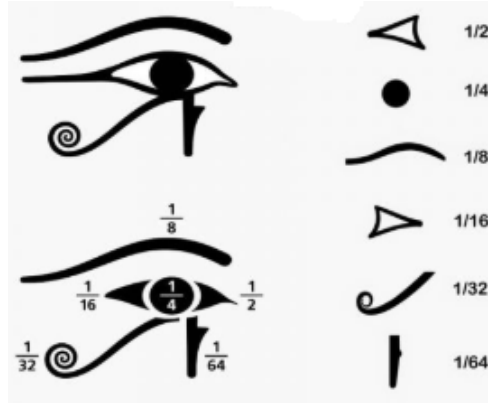
2.7.1 कार्यपत्रक

- संख्याएँ 3, 8, 5, 2 को बढ़ते क्रम में लिखिए। $2/3$, $5/4$, $3/2$ और $1/2$, इन भिन्न संख्याओं को भी बढ़ते क्रम में लिखिए।
- पूर्ण संख्याओं को आपने बहुत जल्दी बढ़ते क्रम में जमा लिया था, लेकिन भिन्न संख्याओं को जमाने में ज़्यादा वक्त लगा। ऐसा क्यों हुआ? पूर्ण संख्याओं को देखते ही बढ़ते क्रम में जमा लिया, लेकिन भिन्न संख्याओं को सिर्फ़ देखकर ही उनकी माला का अंदाज़ क्यों नहीं लगा पाए?
- उचित और अनुचित भिन्न छाँटकर अलग कीजिए- $1/4$, $5/4$, $3/2$, $3/5$, $5/5$, $1/2$
- इन भिन्न संख्याओं को चित्र बनाकर छायांकित हिस्सों के रूप में दर्शाइए।
 $3/4$, $5/4$ और $4\frac{2}{3}$
- एक पूरनपोली को माँ ने तीन बराबर हिस्सों में बाँटा। एक हिस्सा राम को, एक हिस्सा लक्ष्मण को और एक राहुल को दिया। दूसरी पूरनपोली को 6 टुकड़ों में बाँटा। इसके 3 टुकड़े पिताजी को, 2 टुकड़े रानी को दिया और 1 टुकड़ा खुद के लिए रखा। भिन्न में बताएँ कि हरेक को पूरनपोली का कितना हिस्सा मिला? बताएँ कि किसको ज़्यादा और किसको कम मिला?
- रानी और पिंकी केक लेने गए। दुकान में सभी केक एक साइज़ के थे। पिंकी ने 1 केक को 6 टुकड़ों में बाँटा। उसने ऐसे 15 टुकड़े खरीदे। रानी ने केक को 8 टुकड़ों में बाँटा और ऐसे 15 टुकड़े खरीदे। किसने ज़्यादा केक खरीदा, रानी ने या पिंकी ने? इतने में रम्या भी वहाँ आ गई। वह भी केक खरीदना चाहती थी। उसने भी केक लिया और उसके 6 बराबर टुकड़े किए। उसने ऐसे 19 टुकड़े खरीदे। किसने ज़्यादा केक खरीदा, रम्या ने या पिंकी ने? तीनों में से किसने सबसे ज़्यादा केक खरीदा?
- प्रेरणा के माता-पिता ने अपनी ज़मीन का बँटवारा किया। उन्होंने प्रेरणा को $1/3$ हिस्सा ज़मीन दिया और उसकी छोटी बहन प्रवीणा को $2/5$ हिस्सा ज़मीन दी गई। बाकी बची ज़मीन उनके भाई राहुल को मिली। किसको सबसे ज़्यादा और किसको सबसे कम ज़मीन मिली?
- मेरे पास तीन अलग-अलग लम्बाई वाली कॉपियाँ हैं। उनकी नपाई के लिए पेन का इस्तेमाल करती हूँ। नीली कॉपी का नाप 1 और $1/4$ पेन है। पीली कॉपी का नाप 1 और $3/4$ पेन है। लाल कॉपी का नाप 2 और $1/8$ पेन है। कौन-सी कॉपी सबसे बड़ी और कौन-सी सबसे छोटी है?

2.7.2 भिन्न संख्याएँ: परिचय (Introduction)

भिन्न, जिसे हम अंग्रेजी में Fraction कहते हैं। लैटिन भाषा में हम इसे फ़्रक्टोस कहते हैं, जिसका अर्थ है टूटना, यह किसी पूर्ण (whole) के हिस्से को कहते हैं। गिनने और संख्या ज्ञान पर आधारित अभ्यासों में हमने प्राकृत संख्याओं (natural numbers) के बारे में समझा है। प्राकृत संख्या की अवधारणा असतत (discrete) मात्राओं की गणना से आई है। जबकि सतत (continuous) मात्राओं जैसे- लम्बाई, समय,

आयतन आदि का सटीक मापन हम भिन्न की समझ से मापन इकाई को छोटे हिस्सों में बाँटकर करते हैं।
होरस की आँख: आज तो हमारे पास हिस्सों को गणितीय रूप से लिखने के लिए भिन्न संख्याएँ हैं, लेकिन बहुत पुराने समय के लोग भला इसे कैसे लिखते रहे होंगे? हिस्सों को लिखने के लिए उनके पास क्या तरीके थे?



source: alamy.com

1650 ईसा पूर्व में मिस्रवासी केवल इकाई भिन्न का उपयोग करते थे। प्रतीक चिह्न के रूप में होरस की आँख के हिस्सों का उपयोग करते थे। प्राचीन मिस्र की मिथक कथाओं के अनुसार होरस एक शक्ति का देवता है। वह अपने पिता की हत्या का बदला लेने के लिए एक युद्ध लड़ता है। इस युद्ध में होरस विजयी रहता है, लेकिन उसकी एक आँख घायल हो जाती है। आँख के ज़ख्मी होने की इसी घटना के सन्दर्भ से हिस्सों को अभिव्यक्त करने के प्रतीक गढ़े गए हैं। उदाहरण के लिए आँख का बायाँ हिस्सा $1/2$ दर्शाता है।

जबकि गोल पुतली का उपयोग $1/4$ को दर्शाने के लिए किया जाता है। इसी तरह होरस की आँख का प्रत्येक हिस्सा एक संकेत के रूप में अलग-अलग हिस्सों को दर्शाता है। होरस की आँख के हिस्सों को संकेत के रूप में लिखते हुए प्राचीन मिस्रवासी $1/2$ से लेकर $1/64$ तक की मात्रा दर्शा लेते थे।

भाग के पाठ से दोहरान...

भिन्न की उत्पत्ति किसी 'वस्तु' (object) या 'वस्तुओं के समूह' (collection of objects) का 'बराबर बाँटवारा करने' (equal sharing) या 'बराबर समूह बनाने' (equal grouping) से होती है। इसे हमने पूर्ण संख्याओं (whole numbers) के सन्दर्भ में भाग पर आधारित पाठ में विस्तार से समझा है। यहाँ उसी पाठ का कुछ हिस्सा दोहरान के रूप में प्रस्तुत है। यहाँ हम समझेंगे कि बराबर बाँटवारा (equal sharing) और बराबर समूह बनाने (equal grouping) के सन्दर्भ से हम किस तरह भिन्न की अवधारणा तक पहुँच रहे हैं।

'एक वस्तु' या 'वस्तुओं के समूह' का बराबर बाँटवारा

कक्षा 3 से उदाहरण: 1 सेब को 2 लोगों में बराबर बाँटो।

आम बोलचाल की भाषा में हम कहते हैं- दोनों लोगों को आधा-आधा सेब मिल गया है। गणित के नज़रिए से 1 पूर्ण इकाई (whole) (यहाँ 1 सेब) 2 बराबर हिस्सों में बाँटी (equal sharing) गई है। अतः प्रत्येक हिस्सा $1/2$ है।



कक्षा 3 से उदाहरण: 12 लड्डुओं को 4 बच्चों में बराबर बाँटो।

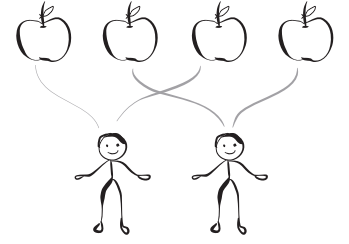
12 लड्डुओं को 4 बच्चों में बराबर-बराबर बाँटने की प्रक्रिया में हमें इन सभी लड्डुओं को 4 बराबर समूहों (equal grouping) में रखना पड़ा है। प्रत्येक समूह में 3 लड्डू हैं। इस उदाहरण में हम किसी 'एक वस्तु' को नहीं, बल्कि वस्तुओं के समूह को बराबर बाँट रहे हैं। अतः इस समूह को पूर्ण इकाई (whole) के रूप में देखा जाएगा।



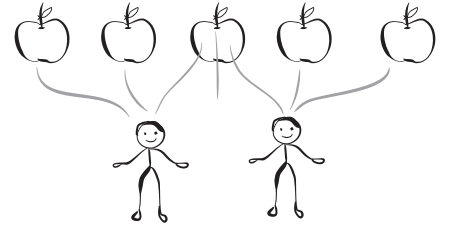
भाग (division) के सन्दर्भ में हम कहेंगे कि प्रत्येक बच्चे को 3 लड्डू मिले हैं। लेकिन भिन्न (fraction) के सन्दर्भ में प्रत्येक के हिस्से को पूर्ण इकाई (whole) के सन्दर्भ में देखा जाएगा। इस तरह प्रत्येक बच्चे को कुल लड्डुओं (12 लड्डुओं) का 'एक चौथाई' यानी $1/4$ हिस्सा मिला है। भिन्न संख्याओं की आधारभूत समझ का निर्माण 'बराबर बाँटवारे' के सवालों से ही किया जाना चाहिए। इसे हम एक नए उदाहरण से समझते हैं।

भाग के सवालों के सन्दर्भ और भिन्न संख्या को लिखना

- 4 सेबों को 2 लोगों में बराबर-बराबर बाँटो।
बताओ, प्रत्येक को कितने सेब मिलेंगे?
- 5 सेबों को 2 लोगों में बराबर-बराबर बाँटो।
बताओ, प्रत्येक को कितने सेब मिलेंगे?



पहले उदाहरण में 4 सेबों को 2 लोगों में बराबर-बराबर बाँटा जा रहा है। प्रत्येक को 2 सेब मिल जाएंगे। लेकिन दूसरे उदाहरण में 5 सेबों को 2 लोगों में बराबर-बराबर बाँटा जा रहा है। प्रत्येक को 2 सेब मिलेंगे, लेकिन 1 सेब शेष बचा रहेगा। हम तीसरी और चौथी कक्षाओं में बच्चों से शेष बचने (remainder) वाले सवाल भी हल करवाते हैं।



तीसरी कक्षा में ही हम ऐसे सवालों पर भी काम करते हैं जहाँ वस्तुओं को पूरा-पूरा बाँटना होता है। भले ही 'एक वस्तु' या 'वस्तुओं के समूह' को तोड़ना, काटना या फिर बाँटना ही क्यों न पड़े। इस तरह के सवालों से ही भिन्न संख्याओं (fractions) की समझ का विकास होता है। बल्कि सच कहें तो भिन्न संख्याओं की उत्पत्ति बराबर बाँटवारा (equal sharing) की प्रक्रिया से ही हुई है।

2.7.3 अर्थपूर्ण सन्दर्भ (Meaningful Context)

बच्चों का भिन्न के साथ शुरुआती परिचय बहुत ही अर्थपूर्ण सन्दर्भों से किया जाना चाहिए, जो उनके अनुभव का हिस्सा हो। चौथी कक्षा की पाठ्यपुस्तक (NCERT) में दी गई ऐसी ही एक रोचक कहानी बराबर बाँटवारे को समझने का अवसर देती है। यह एक बहुत ही प्रसिद्ध कहानी है, जिसमें दो बिल्लियाँ कहीं से एक रोटी लेकर आती हैं। एक चालाक बन्दर उनके हिस्सों का बराबर बाँटवारा करता है। बाँटवारा करते हुए वह चालाकी

मिटू बिल्ली और मोटू बिल्ली दोस्त थे। एक दिन उन्होंने मालिनी की रसोई से चपाती चुराई। इसे मैं लूँगा – मिटू ने कहा। नहीं, इसे मैं लूँगी – मोटू ने कहा। जब वे दोनों लड़ रहे थे तब वहाँ टीटू बंदर आया। अरे! लड़ क्यों रहे हो? क्या समस्या है? – उसने पूछा। बिल्लियों ने कहा – हम समझ नहीं पा रहे हैं कि इस चपाती को हम दोनों कैसे बाँटें। तब टीटू ने कहा – अच्छा चिंता मत करो, मैं इस चपाती को तुम दोनों में बाँट दूँगा। चालाक टीटू ने चपाती को कुछ इस तरह बाँटा –



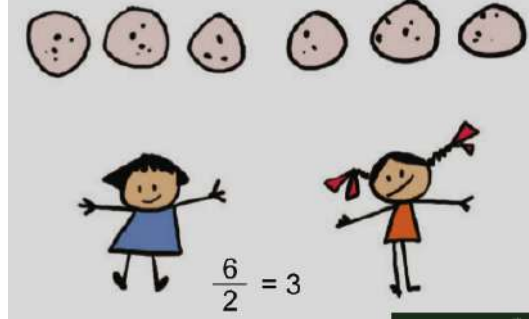
ये बराबर नहीं है, बायाँ भाग ज़्यादा बड़ा है – मिटू और मोटू ने कहा। ओह, कोई बात नहीं, मैं इसे बराबर कर दूँगा – कहकर टीटू ने बायाँ हिस्सा तोड़ा और एक टुकड़ा खा गया।

source: गणित का जादू, कक्षा 4, एनसीईआरटी

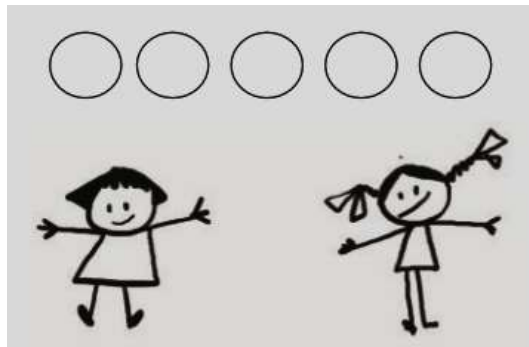
से पूरी रोटी खुद खा जाता है। यह कहानी बराबर बँटवारे के साथ ही हिस्से के रूप में 'आधा' की अवधारणा को भी पुख्ता करती है। कक्षा 4 की पाठ्यपुस्तकों में बराबर बँटवारा के ही और कई अभ्यास दिए गए हैं।

सवाल: 6 रोटियों को 2 लड़कियों में बराबर-बराबर बाँटा। प्रत्येक को कितनी रोटियाँ मिलेंगी? 6 रोटियों को 2 लोगों में बराबर बाँटा 'छह बटा दो', इस बात को गणितीय रूप में यानी $6/2$ के रूप में भी लिखते हैं। प्रत्येक को तीन रोटियाँ मिल रही हैं।

अतः $6/2=3$



सवाल: 5 रोटियों को 2 लड़कियों में बराबर-बराबर बाँटा। प्रत्येक को कितनी रोटियाँ मिलेंगी? बच्चों को अपनी तरह से बँटवारा करने तथा अपनी बात को लिखकर बताने का अवसर दिया जाना चाहिए। ऊपर किया गया पहला सवाल उन्हें लिखने की व्यवस्था समझने में मदद करेगा।



source: गणित की मजेदार दुनिया, कक्षा 3, राजस्थान

साथ ही हम जाँच सकते हैं, क्या इस सवाल को हल करते हुए बच्चे सही ढंग से बराबर बँटवारा कर पा रहे हैं? और इसे गणितीय रूप में कैसे लिख रहे हैं?

‘आपको क्या लगता है, इस सवाल के लिए बच्चे क्या-क्या कर सकेंगे? और कहाँ पर उन्हें चुनौती आएगी? ऐसे में बतौर शिक्षक हमारी भूमिका क्या रहनी चाहिए? संभव है, कुछ बच्चे दो-दो रोटी बाँटकर एक शेष बचा देंगे या फिर चित्र देखकर बराबर बाँटवारा कर लेंगे, लेकिन इसे लिख नहीं पाएँगे। जो अपने दैनिक जीवन में इस तरह के सन्दर्भ से परिचित होंगे वो बोलकर बता सकेंगे कि दोनों को ढाई-ढाई रोटी मिल रही है। लेकिन एक शिक्षक के रूप में हमें इन बातों को गणितीय रूप में लिखने के तरीके पर भी उनका ध्यान दिलाना होगा।

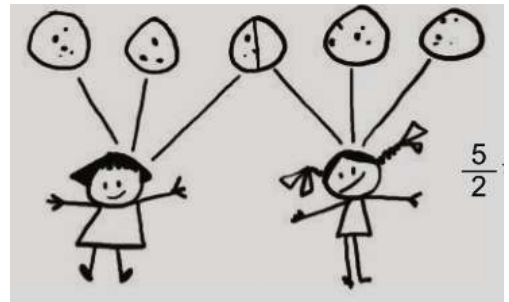
जैसे ऊपर के सवाल में 6 रोटियों को 2 बच्चों में बाँटा गया था, तब हमने $6/2$ लिखा था। यह $6/2$ एक भिन्न संख्या है। जहाँ 6 अंश है और 2 हर है। इसी तरह 5 रोटियों को 2 बच्चों में बाँटा जा रहा है। इसे हम $5/2$ के रूप में लिख सकते हैं। यहाँ 5 अंश है और 2 हर है। इस तरह के बहुत-से अभ्यास तथा आपसी बातचीत बच्चों को भिन्न संख्याओं को समझने में मदद करेंगे। अंश और हर के मायने समझने के साथ ही भिन्न संख्याओं की माला की समझ का विकास भी हो सकेगा।

$$5 \div 2$$

$$\frac{5}{2}$$

$$2 \overline{) 5} \begin{array}{r} 2 \\ -4 \\ \hline 1 \end{array}$$

इस चित्र में 5 रोटियों को 2 बच्चों में बाँटना है। एक स्तर तक बच्चे दो-दो रोटियाँ बाँटकर एक रोटी शेष बचाते हैं। इसे हम लिखित रूप में इस प्रकार करते हैं। लेकिन यदि इस सवाल में ज़ोर देकर कहा जाए कि 5 रोटियों को 2 बच्चों में बराबर-बराबर बाँटो तब हम शेष बचाकर छोड़ नहीं सकते। हमें वस्तुओं का पूरा-पूरा बाँटवारा करके ही प्रत्येक का हिस्सा बताना होगा।



source: गणित की मजेदार दुनिया, कक्षा 4, राजस्थान

यदि कुछ बच्चे यह जवाब दे पा रहे हैं कि बराबर बाँटवारा करने के बाद दोनों लड़कियों को ‘ढाई-ढाई’ या ‘दो और आधी रोटी’ मिलेगी, इसके आगे हमें लिखने की एक नई व्यवस्था से परिचित होने में बच्चों की मदद करनी पड़ेगी। जहाँ बाँटी जा रही वस्तु को अंश (Numerator) के रूप में लिखते हैं और जितने लोगों में बाँटा जा रहा है, उसे हर (Denominator) के रूप में लिखते हैं। जैसे- 5 रोटियों को 2 बच्चों में बराबर-बराबर बाँटो। इसे हम $5/2$ के रूप में लिखेंगे। इसी तरह ‘ढाई या दो और आधी’ जैसे परिवेशीय शब्दों को आधार बनाकर इसका गणितीय रूप लिखने की तरफ बढ़ा जाएगा। जैसे- दो और आधी रोटी या 2 और $1/2$ रोटी या $2+1/2$ रोटी।

इस उदाहरण से हम देख सकते हैं कि बराबर बाँटवारे (भाग करना) की अवधारणा, एक नई अवधारणा जिसे हम भिन्न (fraction) कहते हैं, के जन्म का आधार बन रही है। इस काम को करते हुए बच्चों को बहुत-से इबारती सवाल हल करने और बनाने के अवसर मिलने चाहिए। साथ ही शुरु में इस बात की भी आज्ञादी होनी चाहिए कि वे अपने जवाबों को बोलकर तथा चित्र बनाकर भी समझा सकें। भिन्न की अवधारणा और भिन्न संख्याओं के साथ जुड़ी माला को समझने में ठोस वस्तुओं, दैनिक जीवन से लिए गए अच्छे सन्दर्भों और चित्रों का भरपूर उपयोग होना चाहिए।

2.7.4 भिन्न संख्याएँ और कक्षा-कक्षीय शिक्षण (Fractions and Classroom Teaching)

यूसुफ़ जी कर्नाटक राज्य के मांड्या जिले में ब्लॉक शिक्षा अधिकारी के पद पर कार्यरत हैं। वे अपने शैक्षणिक कार्यकाल में लम्बे समय तक गणित विषय के शिक्षक रहे हैं। ब्लॉक शिक्षा अधिकारी का पदभार उन्होंने एक साल पहले ही ग्रहण किया है। वे अपने ब्लॉक के सभी स्कूलों में बच्चों की शिक्षा के लिए सदैव तत्पर रहते हैं। गणित विषय में बच्चों को काफी परेशानी आती है। अतः वे समय-समय पर गणित शिक्षकों के साथ अतिरिक्त मीटिंग भी करते हैं। इस साल उन्होंने गणित में कमज़ोर रह गए बच्चों को अपेक्षित स्तर तक लाने के लिए एक समयबद्ध कार्ययोजना तैयार की है। सभी विद्यालयों में गणित विषय के शिक्षकों की उपलब्धता सुनिश्चित की है। साथ ही कक्षा 1 से लेकर 8 तक की सभी अवधारणाओं को पढ़ाने के लिए गणित किट भी उपलब्ध कराया है। ब्लॉक के पाँच अच्छे गणित शिक्षकों को प्रशिक्षक के रूप में ज़िम्मेदारी दी है। प्रत्येक माह गणित विषय के सभी शिक्षकों का दो दिवसीय प्रशिक्षण आयोजित किया जाता है।

यूसुफ़ सर ने कई स्कूलों में घूम-घूम कर बच्चों के साथ बातचीत की थी। अगस्त और सितम्बर महीने में की गई अपनी स्कूल विजिट में उन्होंने चौथी कक्षा से लेकर सातवीं कक्षा में पढ़ रहे बच्चों से भिन्न संख्याओं से सम्बंधित कुछ सवालों पर बात की थी। कुछ स्कूलों के बच्चों के साथ उनके शिक्षक-शिक्षिकाओं ने काफी अच्छा काम किया था। इनके बच्चों का स्तर अच्छा था। जबकि कई स्कूलों में बच्चों का स्तर संतोषजनक नहीं पाया गया। भिन्न के सवालों में बच्चे बहुत सारी गलतियाँ कर रहे थे।



एक स्कूल में सातवीं कक्षा के बच्चों से उन्होंने कुछ सवाल हल करने को कहा। बच्चों से जो जवाब मिले उन्हें देखकर यूसुफ़ सर को बहुत दुःख हुआ। सातवीं कक्षा के बहुत सारे बच्चे इन सवालों को सही तरह हल नहीं कर सके थे। कई स्कूलों से प्राप्त ऐसे ही अनुभवों के बाद यूसुफ़ सर ने अक्टूबर माह के दो दिवसीय शिक्षक प्रशिक्षण के लिए टॉपिक तय कर लिया था। यह था— भिन्न संख्याएँ।

निर्देश: अपने आस-पास के विद्यालय में जाकर कक्षा 5 से लेकर कक्षा 7 तक के बच्चों से ये सवाल हल कराइए। उनसे बात कीजिए और उनके द्वारा किए गए हल को समझने का प्रयास कीजिए।

प्र.1. रंगे भाग के लिए भिन्न संख्या लिखो।



प्र.2. हल करो।

$$(1) 5/8 - 4/8 = \frac{\square}{\square}$$

$$(2) 7/10 + 2/10 = \frac{\square}{\square}$$

प्र. 3 बड़े का निशान लगाओ।

$$(1) 1 \square 1/4$$

$$(2) 1/4 \square 1/2$$

source: भिन्न से अनुपात की ओर, सन्दर्भ, एकलव्य

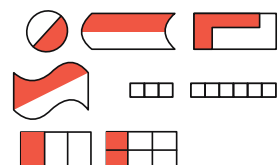
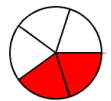
2.7.5 दो दिवसीय शिक्षक प्रशिक्षण- गणित ('Two-Days' Teachers' Training- Mathematics)


आज इस दो दिवसीय शिक्षक प्रशिक्षण का पहला दिन था। पूरे ब्लॉक से गणित विषय के कुल 36 शिक्षक-शिक्षिकाओं को आमंत्रित किया गया था। गणित विषय के दक्ष प्रशिक्षक नागप्पा चंद्रशेखरन और जयलक्ष्मी मैडम उपस्थित थे। ये दोनों पिछले कई वर्षों से गणित विषय का शिक्षण कर रहे हैं। साथ ही ब्लॉक शिक्षा अधिकारी यूसुफ़ जी भी आए हुए थे। सर्वप्रथम सभी ने एक साथ मिलकर एक अभियान गीत गाया। सभी लोगों की हाजिरी दर्ज की गई। इसके बाद यूसुफ़ जी ने सभी का स्वागत किया। उन्होंने बताया कि पिछले दिनों कई स्कूलों में उन्होंने देखा है कि बच्चों को भिन्न संख्याओं पर आधारित सवालों को हल करने में कई तरह की चुनौतियाँ आ रही हैं। सिर्फ कुछ ही शिक्षक शिक्षण अधिगम सामग्रियों का बेहतर उपयोग कर रहे हैं। इस प्रशिक्षण/कार्यशाला में हम लोग भिन्न की अवधारणा और उसे पढ़ाने के तरीकों को समझेंगे और कुछ शिक्षकों के अनुभव भी सुनेंगे। उन्होंने नागप्पा सर और जयलक्ष्मी मैडम को आमंत्रित किया और बताया कि दक्ष प्रशिक्षक के रूप में यही दोनों लोग आपके साथ काम करेंगे। आप सभी लोग अपनी चुनौतियाँ रखें और उनके समाधान पर भी बात करें। ज़रूरी बातों को अपनी डायरी में नोट करते रहें, साथ ही आप अपने अनुभवों को पूरे सदन से साझा करें। इस तरह उन्होंने आज पहले दिन का पहला सत्र जयलक्ष्मी मैडम को सौंप दिया और स्वयं कक्षा में बैठकर सभी की बात सुनने लगे।

सत्र एक: भिन्न संख्याओं में बच्चों की चुनौतियाँ

जयलक्ष्मी मैडम ने सबसे पहले सभी शिक्षकों से उनकी कक्षा के अनुभव पूछे। ख़ास तौर से भिन्न शिक्षण के दौरान उन्हें क्या समस्या आ रही है? शिक्षक बारी-बारी से समस्याएँ बता रहे थे और जयलक्ष्मी मैडम उनसे पूरक प्रश्न पूछ रही थीं। नागप्पा सर चर्चा से निकल रहे महत्वपूर्ण बिन्दुओं को बोर्ड पर दर्ज करते जा रहे थे:



- चौथी और पाँचवीं कक्षा के बच्चों के साथ भी अभी जोड़-घटाव, गुणा-भाग पर ही काम करना पड़ रहा है। अभी हम भिन्न तो शुरू ही नहीं कर पा रहे हैं।
- बच्चे भिन्न संख्या को चित्र द्वारा नहीं दर्शा पाते हैं और न ही चित्र का छायांकित भाग देखकर भिन्न संख्या लिख पाते हैं।
- किसी चित्र का $1/2$ हिस्सा छायांकित करते समय यह ध्यान नहीं रखते कि वह हिस्सा वास्तव में आधा है भी या नहीं। जैसे- इस त्रिभुज में $1/2$ का छायांकन।
- भिन्न संख्या $2/3$ को छायांकित चित्र में इस प्रकार दर्शाते हैं। यदि यह चित्र दिखाकर भिन्न संख्या लिखने को कहा जाए तो $2/3$ या $3/2$ लिखते हैं।
- बच्चे विषम भिन्न जैसे $5/4$ और $3/2$ को चित्र द्वारा नहीं दर्शा पाते हैं।
- हमेशा सवालों में छायांकित भाग का भिन्न पूछा जाता है। यदि कोरे भाग का भिन्न पूछ लिया जाता है तो बच्चे गलती करते हैं। वे इसे भिन्न समझते ही नहीं हैं।
- किसी चित्र में सभी हिस्से बराबर नहीं हैं और छायांकित हिस्से का भिन्न बताने को कहा जाए। ऐसे सवालों में कई तरह की गलतियाँ करते हैं। वे पूर्ण के सन्दर्भ में छायांकित हिस्से को नहीं समझ पाते हैं।
- किसी चित्र को 2, 3 या 4 भागों में बाँटने का काम कई तरीकों से किया जा सकता है। ज़्यादातर बच्चे एक-दो तरीकों को ही समझते हैं।



- भिन्न संख्या $1/2$ और $1/4$ में से $1/4$ को बड़ी भिन्न बताते हैं।
- मिश्र भिन्न $2\frac{1}{3}$ को $2/3$ लिखते हैं।
- इस चित्र में छायांकित हिस्से को $1/3$ लिखते हैं। 
- भिन्न संख्याओं का जोड़ $2/3 + 3/4 = 5/7$ के रूप में हल करते हैं।
- भिन्न संख्याओं $3/4$, $1/2$ और $2/3$ को बढ़ते क्रम में नहीं जमा पाते हैं।

जयलक्ष्मी मैडम ने सभी लोगों से इन समस्याओं के कारणों के बारे में भी पूछा। ज़्यादातर शिक्षकों ने बताया कि नीचे की कक्षाओं में बच्चों के साथ ठीक ढंग से काम नहीं किया गया है। कुछ का कहना था कि भिन्न तो बहुत कठिन अवधारणा है। इसका बच्चों के दैनिक जीवन में बहुत ज़्यादा उपयोग भी नहीं होता है। अतः वे कई तरह की गलतियाँ करते हैं। बच्चों की चुनौतियों के इस सत्र पर अपनी बात रखने के बाद जयलक्ष्मी मैडम ने अगले सत्र के लिए नागप्पा सर को आमंत्रित किया।

सत्र दो: भिन्न संख्याओं के शिक्षण में शिक्षकों की चुनौतियाँ

नागप्पा सर ने कहा, 'अभी आप सभी ने बच्चों की चुनौतियाँ बताई हैं। अब हम कुछ बातें शिक्षकों की चुनौतियों को समझने के लिए भी करेंगे।' उन्होंने करुणाकरण सर को आमंत्रित किया और भिन्न संख्या $2/3$ तथा $5/4$ को छायांकित रूप में प्रदर्शित करने के लिए कहा।   करुणाकरण सर ने ये चित्र बनाए। कुछ लोग इसमें सुधार करना चाहते थे, लेकिन सर ने कहा इस विषय पर हम आगे और काम करेंगे।

अब उन्होंने सकीना मैडम को आमंत्रित किया तथा भिन्न संख्याओं $3/4$, $2/3$, $5/4$ को बढ़ते क्रम में जमाने के लिए कहा। सकीना मैडम बोर्ड पर आई और अपने फोन की सहायता से कैलकुलेटर का उपयोग कर सभी भिन्न संख्याओं को दशमलव संख्या (Decimal numbers) के रूप में बदल दिया। इस तरह भिन्न संख्याओं को उन्होंने बढ़ते क्रम (increasing order) में जमाया।

$$\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}$$

$$0.75, 0.66, 1.25$$

$$0.66, 0.75, 1.25$$

$$\frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{5}{4}$$

सर ने कहा, 'आप दशमलव समझती हैं। आपके पास कैलकुलेटर भी है, इसलिए आपने कर लिया। पाठ्यक्रम के अनुसार भिन्न पहले सिखाया जाता है। दशमलव तो इसके बाद आता है। बच्चों ने तो अभी दशमलव सीखा ही नहीं होगा। तो वे कैसे कर सकेंगे?'

सकीना जी के पास इस बात का कोई जवाब नहीं था। वे चुपचाप अपनी जगह पर जा कर बैठ गईं।

अब थॉमस सर की बारी थी। इसी सवाल को हल करते हुए उन्होंने सबसे पहले लघुत्तम समापवर्त्य (Lowest Common Multiple)

$$\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}$$

2	4, 3, 4
2	2, 3, 2
3	1, 3, 1
	1, 1, 1

$$\frac{3 \times 3}{4 \times 3}, \frac{2 \times 4}{3 \times 4}, \frac{5 \times 3}{4 \times 3}$$

$$\frac{9}{12}, \frac{8}{12}, \frac{15}{12}$$

अतः $2 \times 2 \times 3 = 12$
L.C.M. = 12

$$\frac{8}{12} < \frac{9}{12} < \frac{15}{12}$$

$$\frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{5}{4}$$

निकालकर हर को समान (Equal Denominator) किया, फिर इन्हें बढ़ते क्रम में जमाया।

‘आपने सभी भिन्नों का हर क्यों समान किया है?’ – नागप्पा सर ने पूछा।

‘स्कूल में ऐसे ही सिखाया गया था। हम भी बच्चों को इसी तरह सिखाते हैं।’ – थॉमस सर ने जवाब दिया।

देखिए हम शिक्षक लोग किसी-न-किसी तरह भिन्न संख्याओं को बढ़ते क्रम में जमा लेते हैं। कोई इन्हें दशमलव में बदल लेता है और कोई हर समान कर लेता है। लेकिन हम ऐसा क्यों कर रहे हैं? इसका जवाब नहीं होता है।

गणित शिक्षण सिर्फ सवालों को जैसे-तैसे हल करने के लिए नहीं है। हमें यह भी मालूम होना चाहिए कि हम जो कर रहे हैं वो क्यों कर रहे हैं। इसके अलावा सबसे बड़ी बात यह है कि भिन्न संख्याओं की माला का भी अहसास होना चाहिए। आप सभी लोग पूर्ण संख्याओं को तो तुरंत ही बढ़ते क्रम में जमा लेते हैं, लेकिन भिन्न संख्याओं को क्रम में जमाने में समय लग रहा है। पूर्ण संख्याएँ हमारे रोज़मर्रा के जीवन का हिस्सा बन चुकी हैं। हम उनका उपयोग खूब करते हैं। इसलिए पूर्ण संख्याओं की माला के बारे में हमें कोई संदेह नहीं रहता है, जबकि भिन्न को उसी रूप में देखकर माला जान पाना मुश्किल होता है। इसीलिए कोई दशमलव में बदल देता है और कोई उनके हर समान करता है।

क्या हम भिन्न की माला को समझने में बच्चों की मदद कर सकते हैं? कुछ रोचक गतिविधियों द्वारा? यह कहते हुए नागप्पा सर ने शिक्षक-शिक्षिकाओं को आमंत्रित किया।

रुक्मिणी मैडम ने कहा कि वो अपनी कक्षा के बच्चों के साथ भिन्न पर काम करते हुए पेपर फोल्डिंग और चित्रों को रंगने की गतिविधियाँ करती हैं। इन गतिविधियों से बच्चों को भिन्न संख्या और उनकी माला समझाने में मदद मिलती है।

सभी को रंगीन चौकोर कागज़ दिया गया। रुक्मिणी मैडम के साथ-साथ कागज़ को मोड़कर बराबर हिस्से करने की यह गतिविधि सभी ने रुचिपूर्वक की। मैडम चरण-दर-चरण बताती रहीं और सभी वैसा ही करते गए।

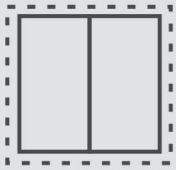
इस तरह 1 कागज़ को 4 बराबर हिस्सों में बाँट लिया गया। रुक्मिणी मैडम ने बताया कि यहाँ हमने 1 कागज़ को 4 बराबर हिस्सों में बाँटा है, अतः प्रत्येक हिस्सा $1/4$ होगा। इसी तरह वर्गाकार और वृत्ताकार कागज़ को मोड़-मोड़



बराबर-बराबर बांटने के लिए:



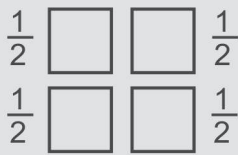
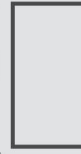
1. कागज को आधा मोड़ो, ऐसे—
2. जहां से मोड़ा वहां से फाड़ लो। कागज के 2 हिस्से हो गए? हर एक हिस्सा पहले के चौकोर का आधा ($\frac{1}{2}$) है।



चाहे तो इन दोनों को ज़मीन पर चॉक से बनाए चौकोर के ऊपर जमा कर देखो।

पर अभी तो दो ही बच्चों को कागज मिल सकता है। तुम्हें दो हिस्से और बनाने होंगे।

3. दोनों हिस्से को फिर से बीच में से मोड़ लो, ऐसे—
4. दोनों को उस जगह से फाड़ लो जहां से मोड़ा है। अब कागज के कितने हिस्से हो गए?

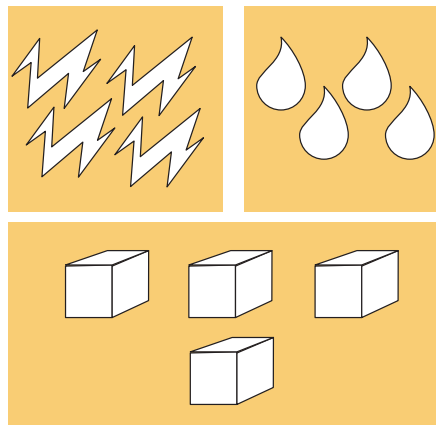


हर एक हिस्सा पहले के चौकोर का चौथाई ($\frac{1}{4}$) हिस्सा है।

कर उसे और भी छोटे हिस्सों में बराबर-बराबर बाँटा जा सकता है। इस तरह बच्चों के साथ आधा, चौथाई और आठवें हिस्सों पर काम किया जा सकता है। उनके पास भिन्न संख्याओं के कार्ड हैं, जिनकी सहायता से वे माता के साथ ही भिन्न संख्याएँ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ और $\frac{1}{8}$ से भी परिचित कराती हैं।

इसी तरह पाठ्यपुस्तक में दिए गए अभ्यासों में चित्रों में रंग भरने का काम दिया गया है। वे बच्चों को एक सवाल समझा देती हैं, फिर बच्चे उसी तरह रंग भरते हैं। जैसे- इस अभ्यास में कुछ वस्तुओं के समूह का चित्र बना है। बच्चों को प्रत्येक समूह के $\frac{1}{4}$ यानी चौथाई हिस्से में रंग भरना है। इस तरह उनकी कक्षा के बच्चे एक इकाई का $\frac{1}{4}$ और किसी समूह का $\frac{1}{4}$ करने का अर्थ समझ पाते हैं।

नागप्पा सर ने रुक्मिणी मैडम द्वारा बताई गई गतिविधियों के महत्त्व पर बात की। साथ ही एक वस्तु के हिस्से करने और किसी समूह की वस्तुओं के हिस्से करने में फ़र्क की तरफ सभी का ध्यान दिलाया। उन्होंने कहा कि वृत्ताकार



कागज़ की एक चकती (इकाई) का $\frac{1}{4}$ और वस्तुओं के समूह का $\frac{1}{4}$ करने में जो अंतर है वह हमारे सभी बच्चों को भी समझ में आना चाहिए। बच्चों को इस तरह के अभ्यासों का अवसर मिलना चाहिए।

गतिविधियाँ

इसी क्रम में नागप्पा सर ने बोर्ड पर कुछ रोचक गतिविधियाँ लिखी। सभी ने इसे अपनी कॉपी में नोट किया।

- **गतिविधि एक:** एक आयताकार/वर्गाकार कागज़ लो, उसे दो बराबर हिस्सों में बाँटो। आप कितने तरीके से दो बराबर भागों में बाँट सकते हो? सभी करके देखें और अपनी कॉपी में उसका चित्र बनाएँ। हम दो बराबर भागों में से प्रत्येक भाग को पूरे के संदर्भ में 'आधा' कहते हैं। दो भाग बराबर हैं या नहीं, इसका पता कैसे करें?
- **गतिविधि दो:** एक आयताकार/वर्गाकार कागज़ को चार बराबर भागों में बाँटो। यह काम कितने अलग-अलग तरीकों से किया जा सकता है? स्वयं करके देखें और कॉपी में चित्र भी बनाएँ। हम 4 बराबर भागों में से प्रत्येक भाग को पूरे के संदर्भ में एक-चौथाई कहते हैं। चार भाग बराबर हैं या नहीं, इसका पता कैसे करें?
- **गतिविधि तीन:** राजमा के 4 बड़े बीज या 4 कंचे बच्चों के सामने रखें। दो लोगों में बराबर-बराबर बाँटने को कहें। प्रत्येक को कितना मिला? हम दो बराबर भागों में से एक-एक भाग को क्या कहते हैं? आधा। तो आधे बीज कितने हुए? अब 4 बीजों को चार लोगों में बराबर बाँट लो। एक को कितना मिला? हम चार बराबर भागों में से एक-एक भाग को क्या कहते हैं? एक-चौथाई। तो एक-चौथाई बीज कितने हुए?

बराबर बँटवारा करना (Equal Sharing)

नागप्पा सर ने सब को आगे बढ़ाते हुए कहा कि भिन्न पर काम करते हुए बच्चों को स्वयं बराबर हिस्से करने (बराबर बँटवारा करने) का अवसर देना चाहिए। शिक्षणशास्त्र में ELPS सिद्धांत की बात करते हुए उन्होंने बताया कि बच्चों के सीखने को पुख्ता करने के लिए हमें क्रमशः E- Experience, L- Language, P- Picture और S- Symbol की तरफ बढ़ना चाहिए। रुक्मिणी मैडम ने कागज़ मोड़ने या चित्रों को रंगने का काम करने का जो अवसर बच्चों को दिया, वह भी गणित शिक्षण में मूर्त से अर्द्ध-अमूर्त और अर्द्ध-अमूर्त से अमूर्त (Concrete, Semi-abstract and Abstract) की तरफ बढ़ने की प्रक्रिया का एक महत्त्वपूर्ण चरण है।

इसी क्रम में उन्होंने एक कहानी सुनाई— छुटकी और मोना घूमने गए थे। उनके पास 3 रोटियाँ थीं। दोपहर में खाना खाते समय छुटकी ने रोटियों को बराबर-बराबर बाँट दिया। उसने 1 रोटी अपने लिए रखी। दूसरी रोटी मोना को दे दी और तीसरी रोटी को इस तरह बाँटकर एक हिस्सा (काले रंग से छायांकित) मोना को दिया और एक अपने लिए रख लिया।



‘यह बराबर हिस्सा कैसे हुआ?’ – मोना ने कहा।

उसने अपना हिस्सा छुटकी को वापिस कर दिया और उसके पास रखी पूरी रोटी को उठाकर इस तरह बँटवारा कर दिया।



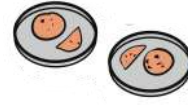
‘क्या अब दोनों के हिस्से बराबर हो गए होंगे?’ – नागप्पा सर ने सवाल किया।

‘हाँ, सभी ने सहमति जताई।

‘बराबर बँटवारा करने के बाद दोनों के हिस्से में कितनी रोटी आई?’ – नागप्पा सर ने सवाल किया।

‘दोनों को डेढ़-डेढ़ रोटी मिली, यानी एक पूरी रोटी और आधी रोटी मिल जाएगी।’ – श्रीनाथ शेटी सर ने कहा। ‘बोर्ड पर आकर छुटकी और मोना को मिलने वाले हिस्से का चित्र बनाना है और उसे भिन्न के रूप में भी लिखना है।’ – नागप्पा सर ने श्रीनाथ जी को चॉक का टुकड़ा देते हुए कहा।

श्रीनाथ सर ने बोर्ड पर आकर छुटकी और मोना को मिलने वाले हिस्से का चित्र बना दिया। उन्होंने बताया कि आम बोलचाल में हम इसे डेढ़ रोटी कहते हैं। दोनों को एक रोटी और आधी रोटी मिल रही है। गणितीय रूप में निरूपित करते हुए हम लिखेंगे— प्रत्येक को 1 रोटी और 1/2 रोटी मिल रही है। या $1 + 1/2$ हिस्सा मिल रहा है। नागप्पा सर ने श्रीनाथ जी के काम की सराहना की और उन्हें बैठने को कहा।

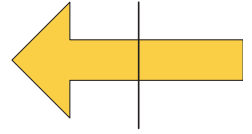


आगे की बात जोड़ते हुए उन्होंने कहा कि इस उदाहरण में ठोस चीजों का बँटवारा करने का अनुभव, उस पर आधारित बातचीत, हिस्सों को भाषा में अभिव्यक्त करना, उसे चित्र रूप में दर्शाना और फिर उसे गणितीय चिह्नों के रूप में लिखना, यह सब कुछ शामिल था। इसे ही हम ELPS सिद्धांत कहते हैं। गणित विषय की शिक्षण प्रक्रिया में यह बहुत ज़रूरी है। भिन्न संख्या के साथ बड़ी समस्या यही रहती है कि बच्चे संख्या और मात्रा में सम्बन्ध ही नहीं बना पाते हैं। इसीलिए उन्हें भिन्न से चित्र रूप में या फिर चित्र से भिन्न रूप में निरूपित करने में बहुत समस्या आती है। यदि भिन्न संख्या के साथ मात्रा की समझ ही नहीं बन पाई है तो आगे आने वाले अभ्यासों में भिन्न संख्याओं की तुलना का काम भी नहीं हो पाता है।

आधा की समझ (Understanding of Half) और बराबर बाँटने के तरीके

यूसुफ़ सर इस मुद्दे पर अपने कुछ अनुभव साझा करना चाहते थे। उन्होंने बताया कि वे अपने स्कूल में तीसरी और चौथी कक्षा के बच्चों को एक कहानी सुनाते थे। इस कहानी में दो बहन भाई हैं— मुन्नी और गोलू। एक दिन इनके चाचा जी बाज़ार से एक अनोखी बनावट वाली चॉकलेट लेकर आए और दोनों को देते हुए कहा— तुम दोनों आपस में आधा-आधा बाँटकर खा लो। चाचा जी चले गए। गोलू ने चॉकलेट को बीचों-बीच से

इस तरह तोड़कर (कागज़ की चॉकलेट मोड़कर दिखाते हुए) आधा हिस्सा मुन्नी को दे दिया।



सवाल: क्या दोनों के हिस्से बराबर हैं?

कक्षा के बच्चे इस सवाल पर अपने जवाब देते थे। अब कहानी आगे बढ़ती है। यह हिस्सा पाकर मुन्नी गुस्सा हो गई। वह बोली, मेरा हिस्सा तो छोटा है। मुझे बिल्कुल आधा चाहिए।

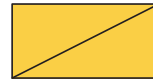
सवाल: क्या तुम इस चॉकलेट को आधा-आधा बाँट सकते हो? कैसे? करके बताओ।

इसी तरह के कई और कागज़ के चॉकलेट बच्चों के हाथ में देकर आधा-आधा करने को कहा जाता। बच्चे अपने-अपने तरीकों से आधा करने का प्रयास करते थे।

यूसुफ़ सर ने एक शिक्षक को यह कागज़ की चॉकलेट दो हिस्सों में बराबर बाँटने के लिए आमंत्रित किया। उन्होंने इस तरह आधा-आधा कर दिया। सभी इस बँटवारे से सहमत थे। इस गतिविधि से हम बच्चों को क्या-क्या समझने का अवसर दे रहे हैं?— सर ने प्रश्न किया। लोगों ने अपने-अपने विचार साझा किए। इसी क्रम में सर ने बोर्ड पर कुछ आकृतियाँ बनाकर सवाल किया।



इन आकृतियों को हम कितने अलग-अलग तरीकों से दो बराबर भागों में बाँट सकते हैं? क्या हम इस बात की जाँच कर सकते हैं कि किए गए दोनों हिस्से वास्तव में बराबर हैं या नहीं?

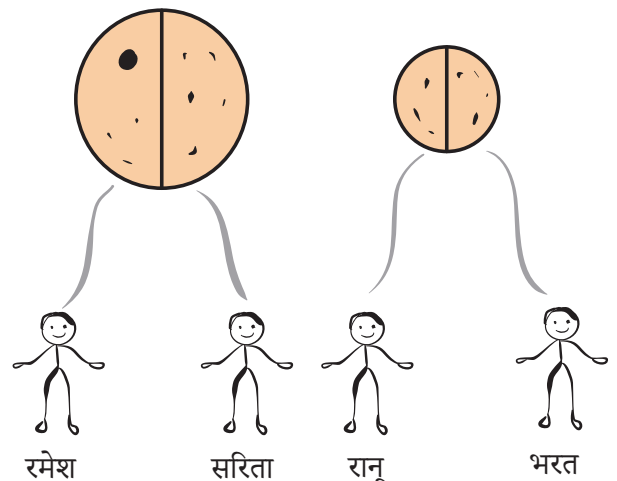


आकृतियों को बोर्ड पर बनाकर अलग-अलग तरह से आधा-आधा करने के तरीके समझे गए। कुछ लोगों ने कागज़ की आकृति को बाँटने के बाद जाँच भी की।

पूर्ण की समझ (Understanding of Whole)

कक्षा में बैठे शिक्षक अरविन्द जी ने एक बहुत महत्वपूर्ण बात की तरफ ध्यान दिलाया। उन्होंने कहा कि सिर्फ आधा-आधा करने से बात नहीं बनेगी। बच्चों को यह भी मालूम होना चाहिए कि वे किसका आधा कर रहे हैं।

यूसुफ़ सर ने अरविन्द जी को अपनी बात और बेहतर ढंग से समझाने के लिए बोर्ड पर आमंत्रित किया। अरविन्द जी ने बोर्ड पर 2 रोटियाँ बनाई और 4 बच्चे बनाए, फिर कहा—



2 रोटियों को लेकर 4 बच्चे- रमेश, सरिता, रानू और भरत घूमने गए। दोपहर में उन्होंने रोटियों को आधा-आधा बाँटकर खा लिया। क्या सभी को बराबर हिस्से मिलेंगे?

‘नहीं, रमेश को सरिता के बराबर हिस्सा मिलेगा और रानू को भरत के बराबर हिस्सा मिलेगा। चारों को बराबर नहीं मिलेगा।’ – एक शिक्षिका ने कहा।

‘हाँ, सही है। लेकिन ऐसा क्यों हो रहा है?’ – अरविन्द सर ने कहा।

‘क्योंकि दोनों रोटियाँ बराबर नहीं हैं।’ एक साथ सभी की आवाज आई।

‘हाँ, मैं भी इसी तरफ ध्यान दिलाना चाहता हूँ। भिन्न शिक्षण में पूर्ण (whole) को समझना बहुत ज़रूरी है। जब तक पूर्ण बराबर नहीं होंगे तब तक यह नहीं कह सकते कि दोनों का आधा हिस्सा भी बराबर होगा। हम देख सकते हैं कि रमेश, सरिता, रानू और भरत सभी को आधा-आधा हिस्सा तो मिल रहा है, लेकिन यह आधा-आधा कितना बड़ा या कितना छोटा होगा, यह पूर्ण के आकार पर निर्भर करता है। यहाँ रमेश को मिलने वाली आधी रोटी रानू को मिलने वाली आधी रोटी से बड़ी है। बच्चों को भी यह बात समझानी पड़ेगी।’ – अरविन्द सर ने कहा।

सभी ने अरविन्द सर द्वारा बताई गई पूर्ण की समझ को ध्यान से सुना। यूसुफ़ सर ने अरविन्द सर की सराहना की। इस तरह सत्र समाप्त हुआ। दोपहर के भोजन का समय हो गया था। सभी भोजन के लिए गए।

सत्र तीन: भिन्न संख्याओं की तुलना या बढ़ते-घटते क्रम में जमाना

भोजन करने के बाद कुछ देर का विराम हुआ। इसके बाद सभी कक्षाओं में लौटे। नागप्पा सर ने एक बार फिर सभी की हाजिरी दर्ज की। साथ ही पिछले सत्र में माला की समझ पर किए गए काम के बारे में बात रखते हुए भिन्न संख्याओं की तुलना के सवाल पर आए। उन्होंने बोर्ड पर दो सवाल लिख दिए—

सवाल: $3/4$, $1/4$, $2/4$ और $2/3$, $2/5$, $2/4$ को बढ़ते क्रम में जमाओ।

फिर सभी की तरफ घूमकर कहा, ‘आपकी कक्षा में बच्चे इस तरह के सवालों को कैसे हल करते हैं?’

संगम रेड्डी मैडम ने कहा, ‘ये बहुत आसान सवाल हैं। मैंने तो अपनी कक्षा के बच्चों को दो नियम याद करवा दिए हैं। वे इन्हीं नियमों की सहायता से सवाल हल करते हैं।’

1. जब भिन्नो का हर समान हो तो जिस भिन्न का अंश बड़ा हो, वही भिन्न बड़ी है।
2. जब भिन्नो का अंश समान हो तो जिसका हर बड़ा हो, वह भिन्न छोटी है।

‘अच्छा, फिर ऐसे सवालों में बच्चे क्या करते हैं जब अलग-अलग तरह की भिन्न संख्या दी गई होती है?’ जैसे-

सवाल: $2/3$, $5/4$, $3/2$ को बढ़ते क्रम में जमाओ।

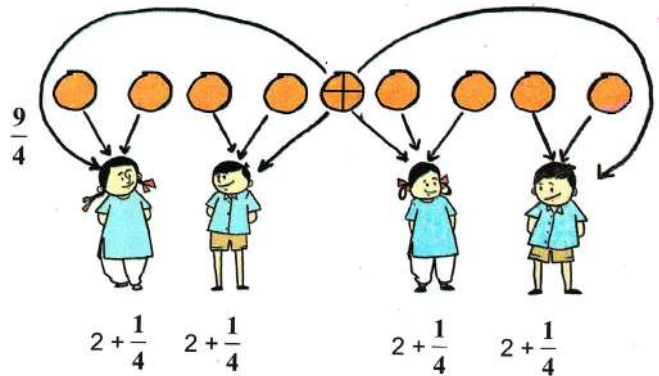
नागप्पा सर ने सवाल को बोर्ड पर लिखते हुए कहा।

‘ऐसे सवाल बच्चे नहीं कर पाते हैं। मैं उन्हें लघुत्तम समापवर्त्य (Lowest Common Multiple) की सहायता से हर समान करने का तरीका सिखा रही हूँ।’ – संगम मैडम ने कहा।

नागप्पा सर ने कहा– ‘देखिए, इस तरह सिर्फ कुछ नियमों को याद करके सवाल हल कर लेना सिखा देने से काम नहीं चलेगा। हम जब तक भिन्न संख्या को देखकर मात्रा जान पाने के तरीके नहीं बताएंगे तब तक बच्चों का ज्ञान अधूरा है। भिन्न संख्याओं के साथ जुड़ी मात्रा और सन्दर्भ दोनों को समझने की आवश्यकता होती है। इस बात को समझने के लिए हम भिन्न की पाँच उप-अवधारणाओं (Sub-Constructs) को समझेंगे। इन पाँच उप-अवधारणाओं से मिलकर ही भिन्न की अवधारणा पूरी होती है। पाठ्यक्रम में हम कक्षा 3 से शुरू कर कक्षा 6 तक बढ़ते हुए इन सभी उप-अवधारणाओं पर काम करते हैं।’ उन्होंने पीपीटी की सहायता से इनसे संबंधित चित्र सहित एक-एक उदाहरण को बताया। साथ ही विस्तार से बात भी की।

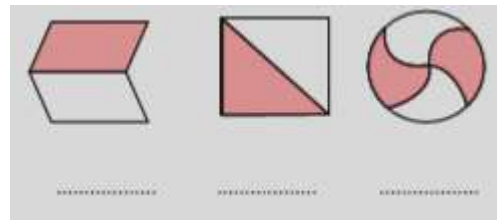
भिन्न की उप-अवधारणाएँ (Sub-Constructs of Fraction)

1. बराबर बँटवारा (Equal Sharing): 9 रोटियों को 4 बच्चों में बराबर बाँटा जाए तो प्रत्येक को कितना हिस्सा मिलेगा? इसे कितने प्रकार से बाँटा जा सकता है, चित्र बनाओ।



source: गणित की मजेदार दुनिया, कक्षा 5, राजस्थान

2. पूर्ण के हिस्से (Part-Whole): एक सेब के 5 बराबर हिस्से किए। अहमद और वीणा को एक-एक हिस्सा दिया तो बताइए, प्रत्येक को पूरे सेब का कितना हिस्सा मिला? सेब के लिए एक गोले का चित्र बनाकर दिखाइए कि सेब का कितना हिस्सा दिया जा चुका है। छायांकित भाग का भिन्न लिखिए।



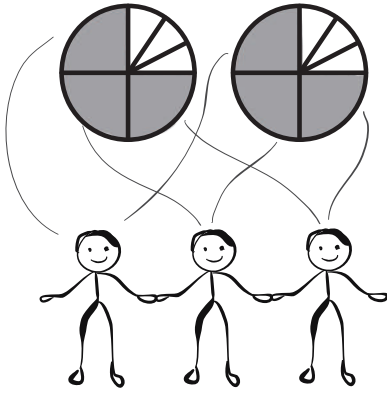
Source: आओ सीखें गणित, कक्षा 4, राजस्थान

3. अनुपात (Ratio): अलका के पास 10, वन्दना के पास 15 और सेहा के पास 20 कंचे हैं। हम कह सकते हैं कि सेहा के पास अलका की तुलना में दुगुने कंचे हैं, या अलका के पास सेहा की तुलना में और वंदना की तुलना में कंचे हैं।
4. मापक (Measure): सरस्वती के पास ज़मीन के दो टुकड़े हैं। केलवाड़ा वाली ज़मीन, सायरा वाली ज़मीन से डेढ़ गुनी है। या सायरा की ज़मीन केलवाड़ा वाली ज़मीन की है।

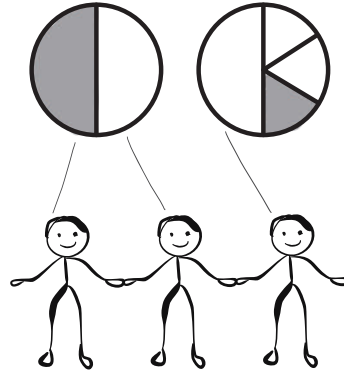
5. **प्रचालक (Operator):** एक डिब्बे में 24 नीली चूड़ियाँ रखी हैं। आलिया ने उसमें से $2/8$ चूड़ियाँ उठाई और मिताली ने $1/4$ चूड़ियाँ लीं। किसने ज़्यादा चूड़ियाँ लीं? चित्र बनाकर बताइए।

नागप्पा सर ने कहा— ‘इन सवालियों में दिए गए अलग-अलग सन्दर्भों पर गौर करें तो हम पाएंगे कि इनमें काफी विविधता है। भिन्न की अवधारणा को अलग-अलग सन्दर्भों में हम अलग-अलग प्रकार से उपयोग करते हैं। उदाहरण के लिए भिन्न संख्या $2/3$ को देखते हैं।

परिस्थिति एक: 2 रोटियों को 3 लोगों में बराबर बाँटने पर प्रत्येक को मिलने वाला हिस्सा बताओ।



$$1/4 + 1/4 + 2/12 = 8/12 = 2/3$$



$$1/2 + 1/6 = 4/6 = 2/3$$

हम देख सकते हैं कि बराबर बाँटवारा करने के लिए हमारे पास एक से अधिक तरीके भी संभव हैं। लेकिन इससे प्रत्येक को मिलने वाले हिस्से पर कोई फ़र्क नहीं पड़ता। परिस्थिति 1 में 2 रोटियों को 3 लोगों में बाँटने को कहा गया है। हल करने पर प्रत्येक को रोटी का $2/3$ हिस्सा मिल रहा है।

बराबर बाँटवारा करते हुए बच्चे यह भी समझ रहे होते हैं कि $2/3 = 8/12$, यह समतुल्य भिन्न (Equivalent Fraction) की अवधारणा है जो आगे चलकर बहुत काम आती है। खास तौर से भिन्न संख्याओं की तुलना करने और जोड़-घटाव में समतुल्य भिन्न का बहुत महत्त्व है।

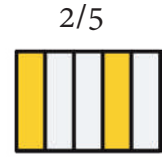
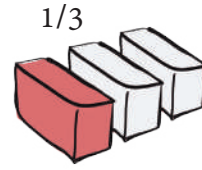
परिस्थिति दो: रवीना अपने घर से मीठा पराठा लेकर स्कूल आई थी। उसने पराठे का छायांकित हिस्सा अपने दोस्त सपना और रोहित को दे दिया। बताओ, रवीना ने पराठे का कितना हिस्सा अपने दोस्तों को दिया? हम देख सकते हैं कि यहाँ पर एक पराठे का छायांकित भाग $2/3$ है।



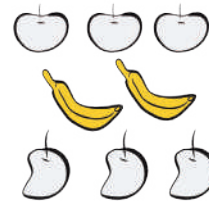
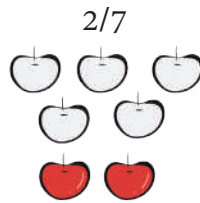
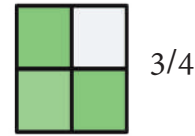
इस सन्दर्भ में हमें ऊपर लिए गए उदाहरण की तरह 2 पराठे लेकर 3 लोगों में बराबर बाँटवारा करने का सन्दर्भ लेने की आवश्यकता नहीं पड़ी है, बल्कि एक पूर्ण के माध्यम से ही हम $2/3$ हिस्सा दर्शा रहे हैं।

कक्षा 3 तथा कक्षा 4 में इस तरह से छायांकित हिस्सों को रंगकर भिन्न संख्या लिखने के लिए कई अभ्यास

कराए जाते हैं। इसे ही हम पूर्ण के हिस्से कहते हैं। यह पूर्ण एक वस्तु भी हो सकता है या वस्तुओं के समूह को भी पूर्ण माना जा सकता है।



परिस्थिति तीन: रफीक अपना घर बनवा रहे हैं। मिस्त्री ने 2 बोरी सीमेंट के साथ 3 बोरी रेत मिलाकर मसाला तैयार किया है। इसी अनुपात में सीमेंट और रेत का उपयोग करते हुए मसाला तैयार किया जा रहा है। आम बोलचाल में हम कहते हैं



कि 2 बोरी सीमेंट और 3 बोरी रेत के मिश्रण से मसाला तैयार किया जा रहा है। गणित में हम इसे अनुपात के रूप में 2 : 3 या $2/3$ लिखते हैं।

परिस्थिति चार: सरिता छोटे बच्चों के लिए कमीज़ सिलकर बेचती है। एक कमीज़ बनाने के लिए $2/3$ मीटर कपड़े की ज़रूरत पड़ती है। यदि सरिता ने 18 कमीज़ बनाई हैं तो कुल कितने मीटर कपड़ा लगा है?

इस सन्दर्भ में भिन्न संख्या $2/3$ मापक के रूप में उपयोग की जा रही है। यदि हम $2/3$ मीटर को 18 बार मापेंगे तो कुल 12 मीटर कपड़े की ज़रूरत पड़ेगी। इस तरह के कई सवालों में हम भिन्न को मापक के रूप में उपयोग कर रहे होते हैं।

परिस्थिति पाँच: रामदीन अपने खेतों में पैदा होने वाली फ़सल का $1/4$ हिस्सा शहर में स्थित अनाथालय में दान दे देते हैं।

इस सन्दर्भ में भिन्न संख्या $1/4$ एक प्रचालक के रूप में काम कर रहा है। कुल जो भी होगा, उस पर यह प्रचालक संक्रिया करके उत्तर ज्ञात करने में सहायक होगा।

इसी तरह का एक और उदाहरण है— दुकान पर बोर्ड लगा है कि सभी कपड़ों पर 12 प्रतिशत की छूट है। हम जानते हैं कि 12 प्रतिशत = $12/100$, यह भी एक भिन्न संख्या है। कपड़े की कीमत कुछ भी हो, उसकी वास्तविक कीमत ज्ञात करने में यह भिन्न एक प्रचालक के रूप में सहायता करती है।

इतनी महत्वपूर्ण बातें करने के बाद नागप्पा सर वापस दो सवालों की तरफ लौटे, जहाँ से यह बात शुरू हुई थी।

भिन्न संख्या: माता की समझ और तुलना करना

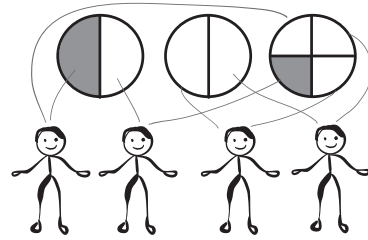
सवाल था, $3/4$, $1/4$, $2/4$ और $2/3$, $2/5$, $2/4$ को बढ़ते क्रम में जमाना है। नागप्पा सर ने कहा, संगम मैडम ने सही कहा है। कई किताबों में यह लिखा मिलता है—

1. जब भिन्नों का हर समान हो तो जिसका अंश बड़ा हो, वही भिन्न बड़ी है।
2. जब भिन्नों का अंश समान हो तो जिसका हर बड़ा हो, वह भिन्न छोटी है।

लेकिन यह नियम क्यों माना जा रहा है? इसके पीछे तर्क क्या है? क्या हम बच्चों को नियम रटने की बजाय नियम समझने में मदद कर सकते हैं? आइए, बराबर बँटवारा के तरीके से हम इन नियमों का तर्क समझते हैं। पहले $3/4$, $1/4$, $2/4$ के लिए:

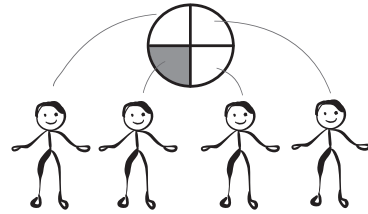
$3/4$ के लिए, 3 रोटियों को 4 लोगों में बराबर-बराबर बाँटा है।

प्रत्येक का हिस्सा है, 'आधी और चौथाई रोटी' यानी $1/2 + 1/4 = 3/4$



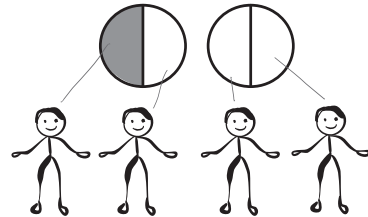
$1/4$ के लिए, 1 रोटी को 4 लोगों में बराबर-बराबर बाँटा है।

प्रत्येक का हिस्सा है, 'चौथाई रोटी' यानी $1/4$



इसी तरह $2/4$ के लिए, 2 रोटी को 4 लोगों में बराबर-बराबर बाँटा है।

प्रत्येक का हिस्सा है, 'आधी रोटी' यानी $1/2$



अब हम देख सकते हैं कि किस टोली के चारों बच्चों को सबसे कम हिस्सा मिलेगा और किस टोली के बच्चों को सबसे अधिक। इस चित्र के आधार पर माता को समझते हुए भिन्न संख्याओं $3/4$, $1/4$, $2/4$ को बढ़ते या घटते क्रम में रखा जा सकता है। अब हम कह सकते हैं कि भिन्न $1/4$ सबसे छोटी है, उससे बड़ी भिन्न है $2/4$ और सबसे बड़ी भिन्न $3/4$ है।

इस बात को हम गणितीय निरूपण करते हुए लिख सकते हैं— $1/4 < 2/4 < 3/4$

यहाँ हम देख पा रहे हैं कि इन तीनों ही भिन्न संख्याओं के हर समान हैं। साथ ही जिसका अंश सबसे छोटा है, वह सबसे छोटी भिन्न है और जिसका अंश सबसे बड़ा है, वह सबसे बड़ी भिन्न है। ऊपर की बातचीत में हम जिस नियम को बच्चों को याद करवाने की बात कर रहे थे, वह नियम इसी तरह के बहुत-से अवलोकनों के आधार पर बना है। बच्चों के साथ बतौर एक शिक्षक काम करते हुए ज़्यादातर लोग भिन्न की माता का ऐसा अवलोकन करने का अवसर नहीं देते हैं। वे सबसे पहले नियम याद कराने लगते हैं। हमें पहले नियम बनने के पीछे का तर्क समझाना चाहिए। इसके बाद यदि बच्चे इन्हें याद भी करते हैं तो कोई हर्ज़ नहीं।

नियम- जब हर समान हो तो जिसका अंश बड़ा हो, वही भिन्न बड़ी है।

सवाल: इसी तरह दूसरे नियम- जब अंश समान हो तो जिसका हर बड़ा होगा, वह भिन्न छोटी है, इसको चित्र बनाकर भी समझाओ।

इस सवाल को समझाने के लिए रघुरामन सर को आमंत्रित किया गया। उन्होंने बोर्ड पर तीनों भिन्न संख्याएँ लिखीं $2/3$, $2/5$, $2/4$ और इन संख्याओं को दिखाते हुए बताने लगे कि $2/5$ सबसे छोटी होगी, $2/4$ उससे बड़ी और सबसे बड़ी $2/3$ होगी।

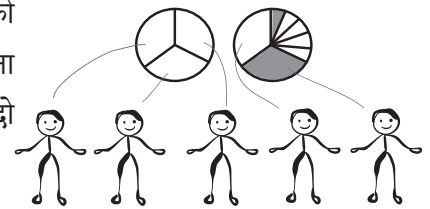
‘बिना हल किए आपको कैसे पता चला कि कौन-सी सबसे छोटी है और कौन-सी सबसे बड़ी है?’ – नागप्पा सर ने सवाल किया।

‘सभी में अंश की संख्या 2 है, जबकि हर की संख्या बदल रही है। मैंने अंश की संख्या 2 को ‘2 रोटी’ मान लिया है। तीनों ही भिन्न संख्या को देखिए: $2/3$, $2/5$, $2/4$

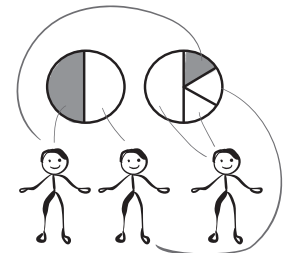
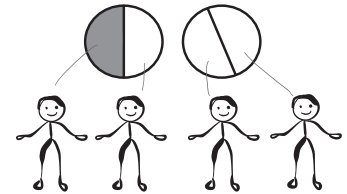
सबसे पहले 2 रोटी को 3 लोगों में बाँटा गया है, फिर 2 रोटी को 5 लोगों में बाँटा गया है और अंत में 2 रोटी को 4 लोगों में बाँटा गया है।

इस तरह जब 2 रोटी को 5 लोगों में बाँटा जाएगा तो सभी को छोटा हिस्सा मिलेगा। जबकि 2 रोटी को 3 लोगों में बाँटा जाएगा तो सभी को पहले की अपेक्षा ज़्यादा बड़ा हिस्सा मिल सकेगा।’

यह तर्क सुनकर सभी लोग खुश हुए और रघुरामन सर के लिए ताली बजाई। नागप्पा सर भी बहुत खुश हुए। उन्होंने कहा कि बिल्कुल सही बात है। अब आप भिन्न संख्याओं को देखकर उनकी माला का अंदाज़ लगा पा रहे हैं। हमें प्रयास करना है कि बच्चे भी ऐसे ही कर सकें। लेकिन अभी वो छोटे हैं। एक-दो बार में तर्क नहीं पकड़ पाएंगे।



बच्चों के साथ इस तरह का अभ्यास कई बार करना पड़ेगा। उन्हें चित्र बनाकर माला को समझने का अवसर देना होगा। आगे चलकर वे भी आप ही की तरह बिना चित्र बनाए भी भिन्न संख्या की माला समझ सकेंगे और बिना चित्र बनाए ही तुलना कर पाएंगे। सभी लोग आपकी बात समझ सकें, इसलिए चित्र बनाकर भी समझा दीजिए। रघुरामन सर ने तीनों भिन्न संख्याओं के लिए ये चित्र बनाए और संख्याओं को बढ़ते क्रम में भी लिखा।



भिन्न संख्या $2/5$ के लिए, 2 रोटियों को 5 बच्चों में बराबर-बराबर बाँटा। भिन्न संख्या $2/4$ के लिए, 2 रोटियों को 4 बच्चों में बराबर-बराबर बाँटा। और भिन्न संख्या $2/3$ के लिए, 2 रोटियों को 3 बच्चों में बराबर-बराबर बाँटा।

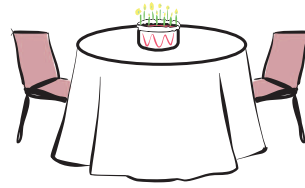
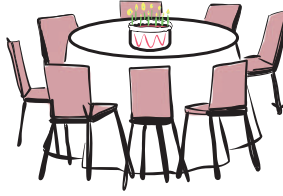
इस प्रकार हम मात्राओं को देख सकते हैं।

$$2/5 < 2/4 < 2/3$$

नियम- जब अंश समान होगा तो जिसका हर बड़ा होगा, वह भिन्न छोटी है।

गतिविधि एक: इकाई भिन्न की मात्रा की समझ और तुलना करना

रमेश अपने दोस्त के जन्मदिन पर गया है। दो टेबलों पर समान आकार के 1-1 केक रखे हैं। पहली टेबल पर 2 कुर्सियाँ हैं, जबकि दूसरी टेबल पर 8 कुर्सियाँ हैं। रमेश सोचने लगा कि वह किस टेबल पर बैठे। उसने सोचा, 1 केक 2 लोगों में बराबर-बराबर बाँटा जाएगा तो उसे कितना बड़ा हिस्सा मिलेगा? और दूसरी टेबल पर 1 केक को 8 लोगों में बाँटा जाएगा तो उसे कितना बड़ा हिस्सा मिलेगा?



सवाल 1: बताओ रमेश को किस टेबल पर बैठना चाहिए?

सवाल 2: साथ ही इस सवाल में $<$ या $>$ का निशान लगाकर बताओ, कौन-सा भिन्न बड़ा है?

$$1/2 \dots\dots\dots 1/8$$

सवाल 3: क्या इस गतिविधि के सन्दर्भ से बता सकते हो कि इन इकाई भिन्न में कौन-सी भिन्न सबसे बड़ी है और कौन-सी भिन्न सबसे छोटी? इन्हें बढ़ते क्रम में जमाओ।

$$1/8, 1/3, 1/5, 1/4, 1/6$$

सवाल 4: यदि भिन्न संख्याओं के अंश समान हैं तो क्या उनके हर देखकर बताया जा सकता है कि कौन-सी भिन्न सबसे छोटी और कौन-सी भिन्न सबसे बड़ी है?

तुलना करने के लिए आयताकार और वृत्ताकार मॉडल

‘सर, भिन्न पर काम करते हुए हमें बच्चों से आयताकार चित्र बनवाना चाहिए या वृत्ताकार? क्या इससे कोई फ़र्क पड़ता है?’ – शिक्षिका राधिका मैडम ने सवाल किया।

जयलक्ष्मी मैडम ने इस सवाल से जुड़ा हुआ अपना एक अनुभव साझा किया। उन्होंने दो भिन्न संख्याओं की

तुलना पर आधारित एक सवाल को बोर्ड पर लिखा और इसे हल करने के लिए आयताकार और वृत्ताकार दोनों तरह के चित्र बनाए।

$$\frac{4}{5} \square \frac{5}{6}$$

पूर्ण के हिस्से द्वारा (Part-Whole Method): आयताकार चित्रों में एक पूर्ण इकाई के हिस्से किए गए थे।

भिन्न संख्या $4/5$ के लिए एक पूर्ण इकाई को 5 बराबर हिस्सों में बाँटा गया। फिर उसमें से 4 हिस्सों को नीले रंग से छायांकित किया गया। नीले रंग से छायांकित हिस्सा $4/5$ दर्शाता है।



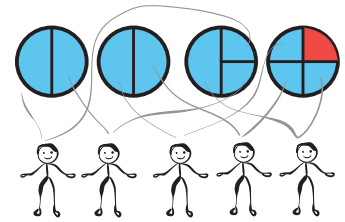
इसी तरह की एक और समान पूर्ण इकाई के 6 बराबर हिस्से करके 5 हिस्सों को नीले रंग से छायांकित किया गया। यह नीला छायांकित हिस्सा $5/6$ दर्शाता है।



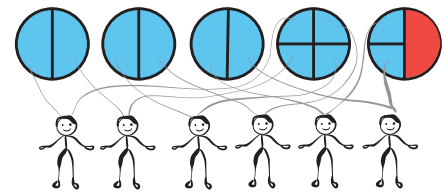
दोनों ही पूर्ण इकाइयों के नीले रंग से छायांकित हिस्से लगभग एक समान दिख रहे हैं। यह बताना मुश्किल है कि कौन छोटा है और कौन बड़ा है।

बराबर बँटवारा द्वारा (Equal Sharing Method): इन्हीं भिन्न संख्याओं $4/5$ और $5/6$ के लिए वृत्ताकार रोटियों के चित्र बनाकर बराबर बँटवारा किया गया है।

4 रोटियों को 5 बच्चों में बराबर-बराबर बाँटा गया है। इस तरह प्रत्येक को आधी रोटि, चौथाई रोटि और शेष चौथाई रोटि का पाँचवाँ हिस्सा मिलेगा। भिन्न के रूप में प्रत्येक को रोटि का $1/2 + 1/4 + 1/20$ भाग मिलेगा।



जबकि 5 रोटियों को 6 बच्चों में बराबर-बराबर बाँटने पर प्रत्येक को आधी रोटि, चौथाई रोटि और आधी रोटि का छठा हिस्सा मिलेगा। भिन्न के रूप में प्रत्येक को रोटि का $1/2 + 1/4 + 1/12$ भाग मिलेगा।



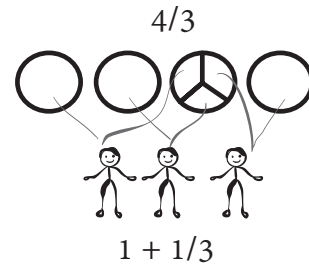
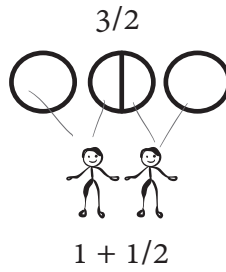
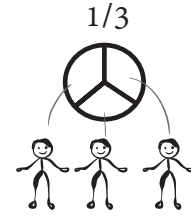
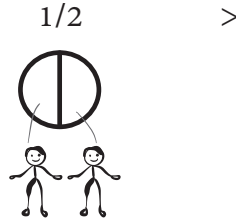
इस स्थिति में गौर करें तो हम पाएंगे कि प्रत्येक बच्चे को मिलने वाले हिस्से का अंदाज़ लगा पाना ज़्यादा आसान है। सिर्फ लाल रंग के शेष बचे रह गए हिस्से को बराबर बाँटने की प्रक्रिया और उनसे बनने वाले और भी छोटे हिस्सों का अनुमान लगाने से ही हम समझ सकेंगे कि भिन्न संख्या $5/6$ बड़ी है, जबकि भिन्न संख्या $4/5$ उससे छोटी है।

इस उदाहरण से हम समझ सकते हैं कि वृत्ताकार आकृतियाँ मात्रा और बराबर बँटवारे के बाद प्राप्त होने वाले छोटे हिस्सों के बारे में ज़्यादा बेहतर अंदाज़ लगाने में मददगार होती है। इसीलिए शुरुआती कक्षाओं में वृत्ताकार भिन्न चकतियों का उपयोग करना ज़्यादा बेहतर माना जाता है।

अपनी बात को सिद्ध करने के लिए जयलक्ष्मी मैडम ने सभी लोगों को दो टुकड़े दिखाकर उनकी मात्रा के बारे में अंदाज़ लगाने के लिए कहा। वृत्ताकार हिस्से को देखते ही सभी ने बता दिया कि यह एक रोटी का आधा भाग है। इसे हम भिन्न संख्या $1/2$ के रूप में भी लिख सकते हैं। जबकि दूसरा आयताकार टुकड़ा देखकर किसी ने इसे आधा बताया, किसी ने चौथाई और किसी ने इसे पूर्ण इकाई माना।



जयलक्ष्मी मैडम ने कहा कि वृत्ताकार टुकड़े की परिधि की गोलाई हमें मूल आकृति और आकार के बारे में एक अंदाज़ा देती है। हम यह तय कर पाते हैं कि दिखाया जा रहा हिस्सा अपनी मूल इकाई का कौन-सा हिस्सा हो सकता है। आयताकार टुकड़े को देखकर हम यह नहीं जान सकते हैं कि यह कितनी बड़ी मूल इकाई का हिस्सा है। उदाहरण के लिए लाल रंग का कागज़ एक चादर जितना भी हो सकता है, टेबल जितना भी और अखबार जितना भी। यह भी संभव है कि यही पूर्ण इकाई हो। जयलक्ष्मी मैडम



की बातों से सभी लोग सहमत थे। मैडम ने प्रोजेक्टर की सहायता से अपनी कक्षा के एक बच्चे द्वारा हल किया गया सवाल दिखाया। इस सवाल में भिन्न संख्याओं में छोटा और बड़ा ज्ञात करना था। बच्चे ने बराबर बँटवारा के तरीके से हल करके प्रश्नों का उत्तर लिखा था। इसी क्रम में नागप्पा सर ने सभी को हल करने के लिए दो सवाल बोर्ड पर लिखे। सभी को यह सवाल अपनी कॉपी में हल करना था।

सवाल: अंजना ने 3 गिलास पानी में 7 चम्मच शक्कर डाला, जबकि राहुल ने 5 गिलास पानी में 11 चम्मच शक्कर डाला। बताओ किसका शरबत ज़्यादा मीठा होगा?

सवाल: क्या तुम चित्र बनाकर बता सकते हो कि ये दोनों बराबर क्यों हैं?

क्या तुम रोटी बाँटकर बता सकते हो कि ये दोनों बराबर क्यों हैं? अपनी कॉपी में करके देखो।

$$(क) \frac{1}{4} = \frac{2}{8} \quad (ख) \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \quad (ग) \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

शाम के 5 बज चुके थे। आज प्रथम दिन के सत्रों का समापन किया गया। सभी को पढ़ने के लिए आलेख- 'भिन्न से अनुपात की ओर' की प्रतियाँ दी गईं।

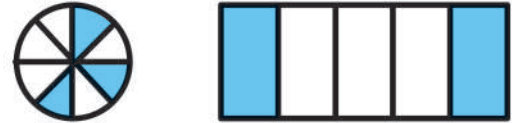
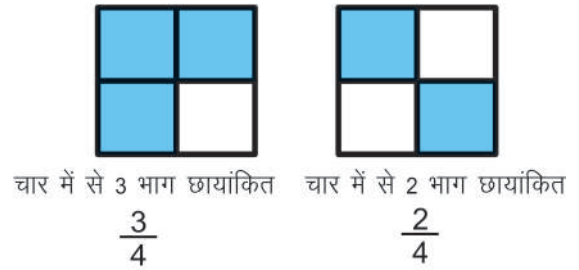
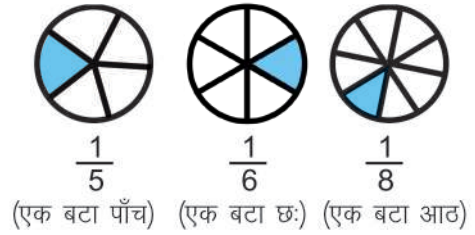
कार्यशाला का दूसरा दिन

दैनिक जीवन के सन्दर्भ: भिन्न की माता और अंश-हर की समझ

अगले दिन सुबह ठीक 9 बजे सत्र फिर शुरू हुआ। सबसे पहले एक अभियान गीत गाया गया। फिर सभी की हाजिरी दर्ज की गई। जयलक्ष्मी मैडम ने कल किए गए काम का संक्षिप्त दोहरान किया। कल के काम पर लोगों की प्रतिक्रियाएँ सुनीं। आलेख पढ़कर आए हुए लोगों से उसमें लिखे मुख्य बिन्दुओं पर बात की।

सत्र एक: इसी क्रम में आज पहले सत्र में एक पीपीटी का उपयोग किया गया। यहाँ कुछ सवाल और बच्चों द्वारा किए गए हल के तरीके देखे गए। साथ ही बच्चों की गलतियों और उनके कारणों पर बात भी की गई। जयलक्ष्मी मैडम ने इन अवधारणाओं पर बेहतर ढंग से काम करने के कुछ तरीके समझाए।

सबसे पहले उन्होंने पूर्ण के छायांकित हिस्सों को देखकर भिन्न संख्या बताने वाले अभ्यासों से परिचित कराया। इसी तरह के कुछ अभ्यासों को हल करते हुए बच्चों ने कई अलग-अलग तरह के जवाब दिए थे। बच्चों के जवाबों को देखकर शिक्षक-शिक्षिकाओं ने अपने अनुभव भी साझा किए।



आठ बराबर भागों में से तीन भाग

पहले चित्र में एक वृत्त का चौथाई हिस्सा छायांकित किया गया है। भिन्न संख्या के रूप में यह $1/4$ है। जबकि जवाब में बच्चों ने $1/3$, $4/1$, $4/3$ और $1/4$ लिखा है।



इसी प्रकार आयताकार पट्टी में कुल चार में से तीन हिस्से छायांकित हैं। अतः यह भिन्न संख्या के रूप में $3/4$ है। लेकिन बच्चों ने अपने जवाब में $3/1$, $4/3$, $1/4$ और $1/3$ लिखा है।

$\frac{1}{3}$, $\frac{4}{1}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{1}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$



जयलक्ष्मी मैडम ने कहा, 'आप सभी को क्या लगता है कि बच्चों ने इस तरह के जवाब क्यों लिखे हैं?' 'उन्हें छायांकित हिस्सों को भिन्न के रूप में लिखना नहीं आता, इसीलिए गलती करते हैं।' – जानकी मैडम ने कहा।

$\frac{2}{1}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{1}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{1}$

‘हाँ, लेकिन उन्होंने भिन्न संख्याओं को लिखने का प्रयास तो किया है। उन्हें यह तो मालूम है कि भिन्न संख्याओं को बटे में लिखते हैं।’ – जयलक्ष्मी मैडम ने कहा।

राघव सर उठकर स्क्रीन के पास आए और आयताकार पट्टी के लिए लिखे गए उत्तरों को दिखाते हुए कहा— ‘मैं बताता हूँ कि क्या हो रहा है, बच्चे छायांकित भाग, कोरे भाग और कुल भाग को गिनकर कोई-न-कोई संयोजन बना दे रहे हैं। जैसे- 3 छायांकित भाग और 1 कोरा भाग देखकर $3/1$ लिखा है।

कुल 4 भाग और 3 छायांकित भाग देखकर $4/3$ लिखा है।

1 कोरा भाग और कुल 4 भाग देखकर $1/4$ लिखा है।



1 कोरा भाग और 3 छायांकित भाग देखकर $1/3$ लिखा है।

$$\frac{3}{1}, \frac{4}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}$$

बच्चे किसी-न-किसी तरह अंश और हर बना रहे हैं। उन्हें बस इतना मालूम है कि चित्र देखकर एक संख्या ऊपर और एक नीचे लिखनी है। इस तरह सभी जवाबों में उन्होंने संख्याएँ बनाई हैं।’

जयलक्ष्मी मैडम ने कहा, ‘बिल्कुल सही बात है। सिर्फ चित्रों में रंग भरना और उन्हें भिन्न संख्या के रूप में लिखने के अभ्यास कराते रहने से बच्चों की पुख्ता समझ नहीं बनती है। जैसा हमने नागप्पा सर के सत्र में देखा है कि बिना वस्तुओं का हिस्सा किए एवं हिस्सों की मात्रा को समझते हुए हम भिन्न सिखाने का प्रयास करते रहते हैं। बच्चे इस काम को अपने दैनिक जीवन के अनुभवों से जोड़कर तो समझ ही नहीं पाते हैं। अतः वे अंश और हर को मशीनी ढंग से लिखना सीखते हैं। आइए, हम गणित की पाठ्यपुस्तकों से कुछ उपयोगी सन्दर्भों को देखते हैं और उन पर बात करते हैं।’

‘हमारी पाठ्यपुस्तकों में बताया गया है कि सबसे पहले हम बच्चों के सामने ऐसी स्थिति रखें जहाँ वस्तु या वस्तुओं के समूह के हिस्से करने की आवश्यकता पड़ रही है।’

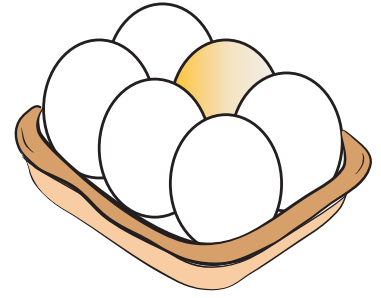
‘इस उदाहरण में माँ रोटी बना रही है। मोहन और स्नेहा खाना खाने बैठे हैं। माँ ने दोनों को एक-एक रोटी

देने के बाद एक और रोटी उनके सामने रख दी। दोनों ने उस रोटी को बराबर बाँटकर खाया।’ मैडम ने स्क्रीन की तरफ सभी का ध्यान आकर्षित करते हुए कहा।

इसी तरह एक और उदाहरण में 6 अंडों को एक ट्रे में रखा हुआ दर्शाया गया है। इन 6 अंडों में से 1 अंडा खराब हो गया है। बच्चों



से पूछा गया कि कुल अंडों का कितना हिस्सा खराब हो गया है। इस चित्र को देखकर शुरू-शुरू में बच्चे यह कह सकते हैं कि 6 अंडे हैं और इनमें से 1 अंडा खराब है। बतौर शिक्षक हमें यह समझाना होगा कि यदि 6 अंडों की यह ट्रे एक पूर्ण (whole) मान ली जाए तो हम कह सकते हैं कि इस पूर्ण का $1/6$ वाँ हिस्सा खराब है। यहीं पर एक और प्रश्न बनता है कि इस ट्रे का कितना हिस्सा अच्छा है?



सभी लोगों ने एक स्वर में जवाब दिया, $5/6$ वाँ हिस्सा अच्छा है।

‘कक्षा में काम करते हुए हमें भी बच्चों के अनुभवों में शामिल उदाहरण लेकर भिन्न की मात्रा और अंश तथा हर के आपसी सम्बन्ध को समझाने का प्रयास करना चाहिए। हो सकता है कि बहुत-से बच्चों के दैनिक जीवन में इस तरह के अनुभव बहुत कम हों। अतः कक्षा में ठोस चीजों (concrete materials) और चित्रों का इस्तेमाल खूब किया जाना चाहिए। हमारी गणित किट (Maths TLM kit) में मोती, कंचे, मोतीमाला, भिन्न चकती और ऐसी कई चीजें दी गई हैं, जिनकी सहायता से हम इस तरह के उदाहरण पर काम कर सकते हैं। इस तरह सभी बच्चों के साथ दैनिक जीवन के सन्दर्भ से जोड़कर और चित्र दिखाते हुए हिस्सों की मात्रा समझाई जाए। उनसे भी चित्र और सवाल बनवाए जाएँ। इसके बाद ही छायांकित हिस्सों को देखकर उनके लिए भिन्न संख्याएँ लिखने के अभ्यास कराए जाने चाहिए।’ – जयलक्ष्मी मैडम ने कहा।

नागप्पा सर ने सभी को तीसरी कक्षा की पाठ्यपुस्तक से ही एक और उदाहरण दिखाया। यहाँ एक केक को बाँटकर रीमा को $1/2$ हिस्सा मिल रहा है। जबकि इसी तरह के एक और केक को काटकर रीमा के भाई को $2/4$ हिस्सा मिल रहा है। यहाँ बच्चों से बात करके यह समझने का प्रयास किया जाना चाहिए कि वे एक केक के $1/2$ और $2/4$ हिस्से को कैसे समझ रहे हैं।



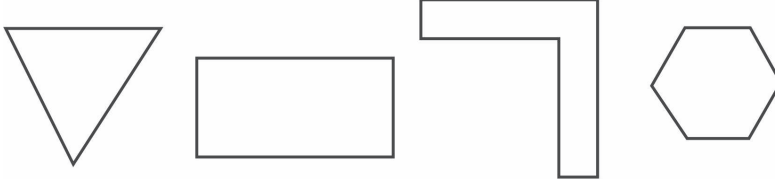
यदि कागज़ की चकती को केक का प्रतीक मानकर उनके सामने ही बाँटवारा किया जाए तो वे समझ सकेंगे कि असल में रीमा और उसके भाई को बराबर हिस्सा मिल रहा है। इस तरह वे यह भी समझ सकेंगे कि एक केक का $1/2$ हिस्सा और ऐसे ही एक और केक का $2/4$ हिस्सा आपस में बराबर है।

आगे हम इस तरह के छायांकित हिस्सों को देखकर भिन्न संख्या लिखने के और भी अभ्यास कराएँ। इस तरह बच्चों को समतुल्य भिन्न की अवधारणा से परिचित होने का अवसर मिलेगा।

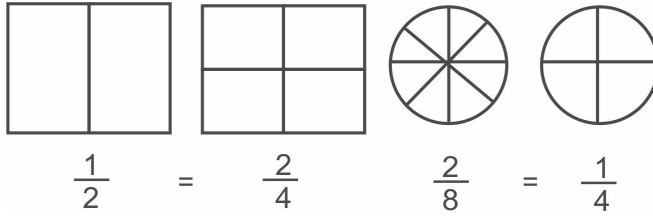


हम उनका ध्यान इस तरफ भी दिलाएँ कि इसी केक को 8 बराबर हिस्सों में बाँटकर यदि 4 हिस्से ले लिए गए हैं तो यह भिन्न संख्या के रूप में $4/8$ बनेगी। हम देख सकते हैं कि ये सभी भिन्न संख्याएँ आपस में बराबर हैं, $1/2 = 2/4 = 4/8$, इसलिए हम इन्हें समतुल्य भिन्न कहते हैं। इन बातों के साथ ही पहला सत्र पूरा किया गया।

सवाल: इन आकृतियों के $1/3$ हिस्से में रंग भरो।



सवाल: भिन्न संख्याओं को देखकर छायांकित कीजिए।

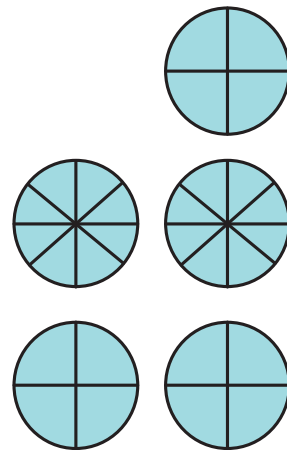


समतुल्य भिन्न के मायने

सत्र दो: इस सत्र में नागप्पा सर ने समतुल्य भिन्न की अवधारणा को पुरखा करने के लिए कुछ गतिविधियों और अभ्यासों से परिचित कराया। वे अपनी बात को बोर्ड पर लिखकर समझाने के साथ ही प्रोजेक्टर का सहारा भी ले रहे थे।

गतिविधि एक: समतुल्य भिन्न बनाना

- 1 रोटी को 4 लोगों में बराबर-बराबर बाँटो। प्रत्येक को मिलने वाला हिस्सा $1/4$ है।
- अब 2 रोटियों को 8 लोगों में बराबर-बराबर बाँटो। प्रत्येक को मिलने वाला हिस्सा $2/8$ है।
- 2 रोटियों को 8 लोगों में बराबर-बराबर बाँटने के लिए एक और तरीका अपनाया जा सकता है। पहली रोटी के चार टुकड़े तथा दूसरी के भी चार टुकड़े। इस तरह भी प्रत्येक का हिस्सा $1/4$ है।



हम देख सकते हैं कि इन सभी परिस्थितियों में प्रत्येक के हिस्से आने वाली मात्रा पर कोई फ़र्क नहीं पड़ा है। अतः हम गणितीय रूप से कह सकते हैं कि $1/4 = 2/8$ है।

सवाल: यदि इसी तरह से 3 रोटी को 12 लोगों, 4 रोटी को 16 लोगों और 5 रोटी को 20 लोगों में बराबर-बराबर बाँटा जाए तो क्या सभी को मिलने वाला हिस्सा बराबर होगा? स्वयं करके देखो।


इस तरह हम देख सकेंगे कि $1/4 = 2/8 = 3/12 = 4/16 = 5/20 = 6/24$ है। यह समतुल्य भिन्न है।

आम तौर पर हम किसी भिन्न संख्या का समतुल्य भिन्न प्राप्त करने के लिए उसके अंश और हर को एक ही संख्या से गुणा करते हैं। उदाहरण के लिए $1/4$ का समतुल्य भिन्न प्राप्त करने के लिए अंश और हर को 5 से गुणा किया गया। इस तरह $(1 \times 5)/(4 \times 5) = 5/20$ मिलेगा। इसी तरह और भी समतुल्य भिन्न बनाए जा सकते हैं।


अभ्यास: पाठ्यपुस्तक में दिए गए समतुल्य भिन्न की अवधारणा से सम्बंधित अभ्यास कराएँ।

सवाल: क्या चारों चित्रों में दिए गए नीले रंग के हिस्से एक-दूसरे से कम/ज़्यादा हैं? क्यों?


रंगीन हिस्से
इन्हें पूरा करो :

1 


इस वृत्त को दो बराबर हिस्सों में बाँटा गया है। _____ बराबर हिस्सों में से एक भाग में नीला रंग किया गया है।

2 

इस वृत्त को _____ बराबर हिस्सों में बाँटा गया है। _____ बराबर भागों में से _____ भागों में नीला रंग किया गया है।


3 

इस वृत्त को

4 

इस वृत्त को

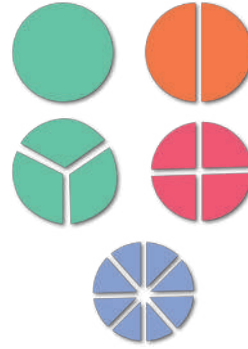
तो हम कह सकते हैं कि $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$



बच्चों को अपनी समझ बोलकर व्यक्त करने का अवसर दें। भिन्न चकती या कागज़ की चकती का उपयोग करते हुए उन्हें स्वयं बँटवारा करने और अपनी समझ को अभिव्यक्त करने का अवसर दें।

गतिविधि: बच्चों के साथ मिलकर भिन्न चकती और भिन्न दीवार बनाएँ। इनका एक-एक सेट सभी बच्चों के पास उपलब्ध रहे तो और भी अच्छा होगा।

भिन्न चकती: भिन्न चकती बनाने के लिए रंगीन चार्ट पेपर पर कटोरे या प्लेट की सहायता से गोल घेरा बनाएँ। फिर इन्हें कैंची की सहायता से काट लें। ये भिन्न चकतियाँ भिन्न संख्याओं की माता समझने, कम-ज़्यादा ज्ञात करने और समतुल्य भिन्न खोजने में सहायक होंगी।



भिन्न दीवार: भिन्न दीवार बनाने के लिए चार्ट पेपर या गत्ता कागज़ पर स्केल से नापकर लाइन बनाएँ तथा इनमें अलग-अलग रंग भरकर भिन्न संख्याएँ लिख लें। अपनी भिन्न दीवार पर $1/2$ से लेकर $1/10$ तक हिस्से दर्शाएँ। इसकी सहायता से आप देख सकते हैं कि भिन्न संख्या $1/2$ का हिस्सा, $2/4$, $3/6$ और $4/8$ के हिस्से के बराबर है।

$\frac{1}{1}$							
$\frac{1}{2}$				$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$	
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

भिन्न दीवार की सहायता से तुलना के सवाल भी आसानी से हल किए जा सकते हैं, जैसे खाली स्थान पर $<$, $>$ या $=$ में से कोई एक सही निशान लगाओ।

$3/5$ $5/6$

भिन्न दीवार में देखा जा सकता है कि भिन्न संख्या $3/5$ की तुलना में भिन्न संख्या $5/6$ बड़ी है। सभी लोगों को सामग्री के निर्माण करने का यह तरीका बहुत पसंद आया। इसी क्रम में जयलक्ष्मी मैडम ने समतुल्य भिन्न की उपयोगिता से सम्बंधित एक रोचक सवाल पूछा।

समतुल्य भिन्न की उपयोगिता

सवाल: चंदू और मुन्नी अपने घर में आमने-सामने की दीवार की पुताई कर रहे थे। चंदू ने कहा, मैंने $2/3$ हिस्सा पूरा कर लिया है। जबकि मुन्नी ने कहा कि मैंने $3/4$ हिस्सा पूरा कर लिया है। चंदू बोला— मैंने ज़्यादा

हिस्सा कर लिया है, जबकि मुन्नी बोली- मैंने ज़्यादा किया है। क्या आप बता सकते हैं कि किसने ज़्यादा दीवार पर पुताई की है?

सरस्वती मैडम ने कहा, 'भिन्न संख्या 2/3 और 3/4 में से जो बड़ी होगी वह हिस्सा ज़्यादा होगा। दोनों भिन्न के हर समान करके बताया जा सकता है।'

सरस्वती मैडम ने बोर्ड पर आकर इसे हल कर दिया।

$$(2 \times 4) / (3 \times 4)$$

$$= 8/12$$

$$(3 \times 3) / (4 \times 3)$$

$$= 9/12$$

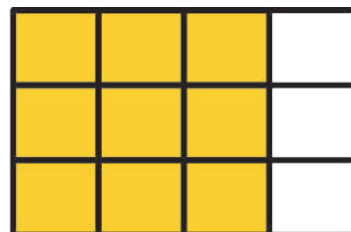
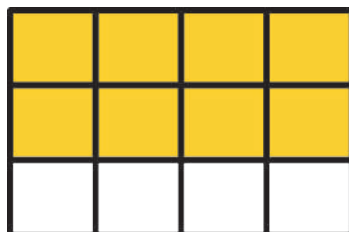
इस तरह मुन्नी ने ज़्यादा हिस्से में पुताई की है।

'मैडम का तरीका सही है, लेकिन हर को समान करने का अर्थ क्या है? क्यों करना है?' - जयलक्ष्मी मैडम ने पूछा।

कुछ देर जवाब का इंतज़ार करने के बाद उन्होंने स्वयं बोर्ड पर समझाना शुरू किया, 'दोनों दीवारों, कमरे में आमने-सामने की दीवार थी। अतः उनकी लम्बाई-चौड़ाई बराबर है। भिन्न संख्या में तुलना तब ही संभव है जब पूर्ण बराबर हो। यहाँ दोनों ही दीवार बराबर हैं, अतः चंदू और मुन्नी दोनों का पूर्ण बराबर है। अब हमें यह देखना है कि दोनों ने इस पूर्ण के कितने हिस्से में पुताई की है। अभी देखकर बता पाना मुश्किल है।



यदि हम चंदू की दीवार पर 4 खड़ी पट्टियाँ मान लें और मुन्नी की दीवार पर 3 आड़ी पट्टियाँ मान लें तो दोनों ही दीवारों पर बराबर लम्बाई-चौड़ाई के कुल 12 खाने बन जाएंगे। हम देखकर ही जान सकते हैं कि मुन्नी ने ज़्यादा हिस्से में पुताई की है।



अब हम देख सकते हैं कि चंदू ने कुल 12 हिस्सों में से 8 में पुताई की है। इसे हम भिन्न संख्या के रूप में $8/12$ लिख सकते हैं।

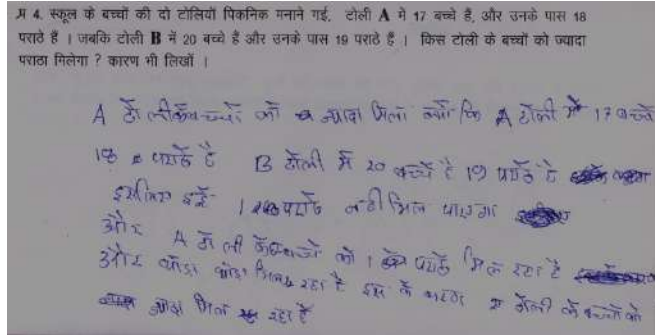
इसी तरह मुन्नी ने कुल 12 हिस्सों में से 9 में पुताई की है। इसे हम भिन्न संख्या में $9/12$ लिख सकते हैं।

हम देख सकते हैं कि यहाँ हर को समान करते हुए सरस्वती मैडम ने भी दोनों भिन्नो के हर को 12 बनाया था। यहाँ दीवारों को भी हम 12 हिस्सों में बाँट रहे हैं। इस तरह हम भिन्न संख्या के रूप में लिख सकते हैं कि $9/12 > 8/12$ । तो हर समान करके हम समान भिन्न या सजातीय भिन्न (Like fractions) बनाते हैं। इस तरह तुलना करना आसान हो जाता है।

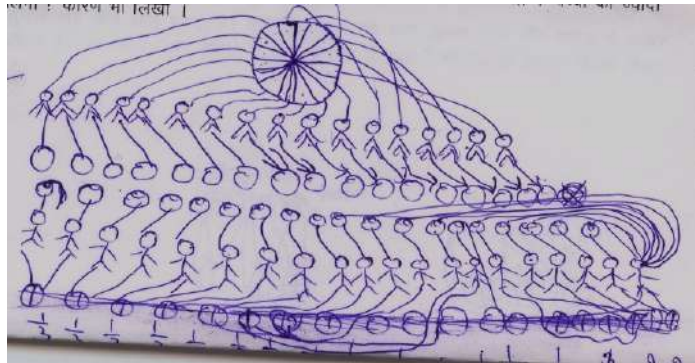
जयलक्ष्मी मैडम ने सभी के सामने एक और सवाल रखा। इस सवाल को कक्षा 6 के बच्चों ने अपने-अपने तरीके से हल किया है। एक बच्चे ने अपनी समझ को शब्दों में लिखा है और दूसरे बच्चे ने चित्र बनाकर अभिव्यक्त किया है।

सवाल: स्कूल के बच्चों की दो टोलियाँ पिकनिक मनाने गईं। टोली A में 17 बच्चे हैं, उनके पास 18 पराठे हैं। जबकि टोली B में 20 बच्चे हैं और उनके पास 19 पराठे हैं। किस टोली के बच्चों को ज़्यादा पराठा मिलेगा?

पहला हल: इस बच्चे ने अपनी समझ को भाषा में लिखते हुए यह कहने का प्रयास किया है कि टोली B में 20 बच्चे हैं और 19 पराठे हैं। अतः सभी को 1-1 पराठा नहीं मिल सकेगा। जबकि टोली A के बच्चों के पास 18 पराठे हैं और कुल 17 बच्चे हैं। इन सभी को 1-1 पराठा पूरा मिलेगा और साथ ही थोड़ा-थोड़ा टुकड़ा और मिल रहा है। इसलिए टोली A के बच्चों को ज़्यादा बड़ा हिस्सा मिलेगा।



दूसरा हल: इस बच्चे ने टोली A के 17 बच्चों को पहले 1-1 पराठा दे दिया है। इस तरह 17 पराठे बाँट दिए गए हैं। अंत में 18वें पराठे के छोटे-छोटे सबह टुकड़े करके सभी को दे दिया जा रहा है। जबकि टोली B के 20 बच्चों में कुल 19 पराठे बाँटे जा रहे हैं।



सबसे पहले 19 बच्चों को 1-1 पराठा दे दिया गया है। अंत में 20वाँ बच्चा ऐसा भी है जिसे कुछ भी नहीं मिला है। अतः सभी लोग अपने-अपने पराठे में से तोड़कर छोटा-छोटा हिस्सा इस 20वें बच्चे को दे रहे हैं।

इन दोनों तरीकों का विश्लेषण करने पर हम पाएंगे कि भिन्न संख्याओं की तुलना करने का यह मानक तरीका नहीं है। लेकिन इस तरह हल करते हुए बच्चों ने मात्रा या हिस्सों की समझ को अपना औज़ार बनाया है। साथ ही एक मजबूत तर्क भी पकड़ने का प्रयास किया है। जिस गणितीय सोच के विकास के लिए हम बच्चों को गणित पढ़ाते हैं, उसका एक बेहतरीन उदाहरण है यह। फिलहाल हमारी पारंपरिक कक्षाओं में इन तरीकों के लिए अभी कोई जगह नहीं है, लेकिन यही वह असली काम है जो हमें गणित शिक्षण में करना है।

इतनी चर्चा के साथ ही यह सत्र समाप्त हुआ। दोपहर के भोजन का समय हो गया था। सभी लोगों ने साथ बैठकर भोजन किया। कुछ देर के विराम के बाद सभी लोग पुनः कक्षा में एकत्रित हुए।

समतुल्य बनाने के तरीके और उनका उपयोग

सत्र तीन: यूसुफ़ सर ने भी अपने शैक्षणिक कार्यकाल में लम्बे समय तक गणित शिक्षण किया है। वे इस कार्यशाला में पूरी तरह से शामिल रहे और बहुत गौर से सभी लोगों के विचार सुन रहे थे। समतुल्य भिन्न की अवधारणा और इसके शिक्षण के संबंध में वे अपने कुछ अनुभवों को साझा करना चाहते थे। मैडम से कुछ देर समय लेकर उन्होंने समतुल्य भिन्न बनाने का एक रोचक तरीका बताया।

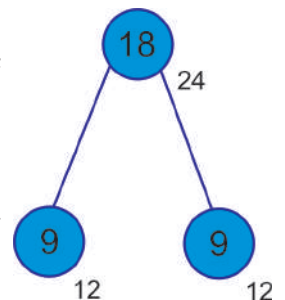
यूसुफ़ सर ने सभी को समझाते हुए कहा, 'मान लीजिए कि 18 गोल पराठों को 24 लोगों में बराबर बाँटना है। इसे हम भिन्न संख्या के रूप में $18/24$ के रूप में लिख लेते हैं। संदर्भ के अनुरूप मान लेते हैं कि एक बड़े-से टेबल पर 18 पराठे रखकर 24 लोग अपनी कुर्सियों पर गोल घेरे में बैठ जाएंगे और इन पराठों को आपस में बिल्कुल बराबर-बराबर बाँट लेंगे। कैसे बाँटेंगे, ये उन पर छोड़ देते हैं, पर बँटवारा बिल्कुल बराबर होना चाहिए।'

परिस्थिति 1: गोल टेबल पर रखे 18 पराठे और घेरे में बैठे 24 लोगों को संकेत रूप में इस तरह दिखाया जा सकता है। भिन्न संख्या होगी $18/24$ । ये तो हो गई एक परिस्थिति।



हम चाहते हैं कि एक ही टेबल पर ज़्यादा भीड़ न हो। अतः बैठने के तरीके में कुछ बदलाव कर लेते हैं।

परिस्थिति 2: हमने 2 टेबल पर 9-9 पराठे रख लिए। साथ ही 12-12 कुर्सियाँ रख दी हैं।

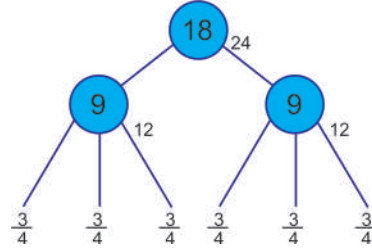


प्रत्येक टेबल पर 9 पराठों को 12 लोगों में बाँटा जा रहा है। अतः भिन्न संख्या है $9/12$ ।

‘हम देख सकते हैं कि इस तरह लोगों को प्राप्त होने वाले हिस्से में कोई अंतर नहीं आ रहा है। पहले 18 पराठों को 24 लोगों में बाँटने पर जितना हिस्सा प्रत्येक को मिलता, उतना ही हिस्सा 9 पराठों को 12 लोगों में बराबर बाँटने पर भी आ रहा है। इस तरह नई परिस्थितियाँ खोजने की यात्रा को हम और आगे भी बढ़ा सकते हैं।’

परिस्थिति 3: हमने 6 टेबल पर 3-3 पराठे रखे हैं। क्या आप बता सकते हैं कि प्रत्येक टेबल पर कितनी कुर्सियाँ रखनी होंगी, जिससे लोगों को प्राप्त होने वाले हिस्से पर कोई अंतर न पड़े?

हम देख सकते हैं कि $18/24$, $9/12$ और $3/4$ के बँटवारे के दौरान प्रत्येक को मिलने वाले हिस्से पर मात्रात्मक रूप में कोई अंतर नहीं आता है। हमने सिर्फ बँटवारा करने की परिस्थितियाँ बदली हैं। इस अनुभव से हम कह सकते हैं कि $3/4$, $9/12$ और $18/24$ समतुल्य भिन्न हैं।



सवाल: इसी तरीके से भिन्न संख्या $18/24$ के लिए और भी समतुल्य भिन्न बनाइए।

यूसुफ़ सर ने प्रोजेक्टर की सहायता से बच्चों द्वारा हल किए गए कुछ सवाल दिखाए। इन सवालों में बच्चों ने भिन्न संख्याओं की तुलना करने के लिए समतुल्य भिन्न का उपयोग किया है।

(1) $\frac{6}{5} \gt \frac{9}{8}$	(2) $\frac{17}{13} \gt \frac{17}{15}$	(3) $\frac{29}{30} \lt \frac{21}{20}$
$\frac{18}{15}$	$\frac{18}{16}$	$\frac{34}{26}$
$\frac{34}{30}$	$\frac{34}{30}$	$\frac{58}{60}$
		$\frac{63}{60}$

बच्चों द्वारा किए गए हल को देखकर कुछ देर आपस में बातचीत हुई। गलतियों और उनके कारणों पर भी थोड़ी चर्चा हुई। इसके बाद इस सत्र का समेकन किया गया।

सत्र चार: संख्या रेखा पर भिन्न को दर्शाना

चौथे सत्र की शुरुआत करते हुए नागप्पा सर ने कहा— ‘आप सभी ने बताया था कि बच्चों को संख्या रेखा पर भिन्न संख्या दर्शाने में बहुत समस्या आती है। इस सत्र में हम इसी मुद्दे पर बात करेंगे।’ वे अपनी बात कह ही रहे थे कि सदन में बैठे अरविन्द सर ने एक सवाल किया।

‘भिन्न संख्याओं को संख्या रेखा पर दर्शाने के लिए कोई आसान तरीका बताइए। हमारे स्कूल के बच्चे इस काम में बहुत गलतियाँ कर रहे हैं।’— अरविन्द सर ने कहा।

‘हाँ, यह बहुत ज़रूरी बात है। हमें बच्चों के साथ संख्या रेखा की समझ और इसके उपयोग पर बेहतर तरीके से काम करना चाहिए। यह आगे की कक्षाओं में भी बहुत उपयोगी होगा। यदि बच्चों को मोतीमाला पर पूर्ण

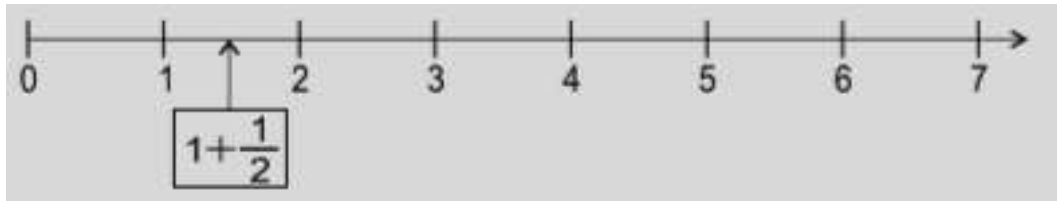
संख्याओं के संख्या कार्ड टांगना आता है तो यह काम उनके लिए और आसान हो जाएगा। – नागप्पा सर ने कहा।

सवाल: बच्चे 1 और 2 के बारे में जानते हैं। लेकिन भिन्न संख्या $3/2$ को कहाँ प्रदर्शित करना है?

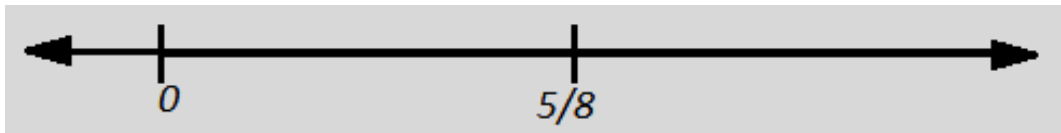
यह समझने के लिए उन्हें भिन्न संख्या $3/2$ की मात्रा ज्ञात होनी चाहिए। ऊपर बताए गए तरीकों से वे चित्र बनाकर भी मात्रा ज्ञात कर सकते हैं। या कई बार अभ्यास करने के बाद वे यह सोच सकेंगे कि 3 रोटियों को 2 लोगों में बराबर-बराबर बाँटने पर प्रत्येक के हिस्से में एक पूरी रोटी और आधी रोटी आएगी।

इसे गणितीय रूप में लिखा जा सकता है— 1 रोटी और $1/2$ रोटी, या $1+1/2$

यह मात्रा 1 से अधिक है, लेकिन 2 से कम है। अतः संख्या 1 और 2 के बीच में लिखी जाएगी। संख्या रेखा पर दो संख्याओं के बीच की दूरी को एक पूर्ण इकाई के रूप में समझना होगा। इस तरह 0 से 1 की दूरी एक इकाई है और 1 से लेकर 2 तक की दूरी एक और इकाई है। इसका अर्थ यह हुआ कि डेढ़ वस्तु को दर्शाने के लिए एक पूरी इकाई और दूसरी इकाई का आधा चाहिए होगा। इसे गणितीय रूप में $1+1/2$ लिख सकते हैं। अब हम इसे संख्या रेखा पर दर्शा सकते हैं।



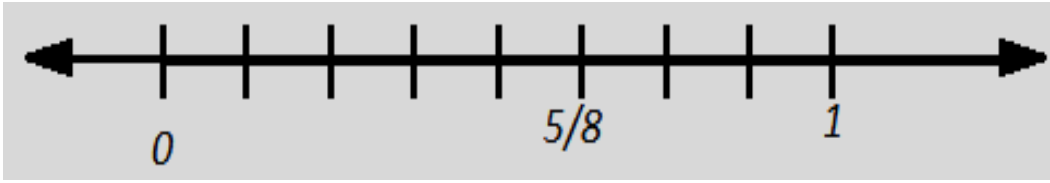
सवाल: संख्या रेखा पर भिन्न संख्या $5/8$ का स्थान दर्शाया गया है। इसी संख्या रेखा पर $5/4$ को दर्शाओ।



सवाल: भिन्न संख्या $5/8$ के स्थान को देखकर 1 को सही स्थान पर दर्शाओ।

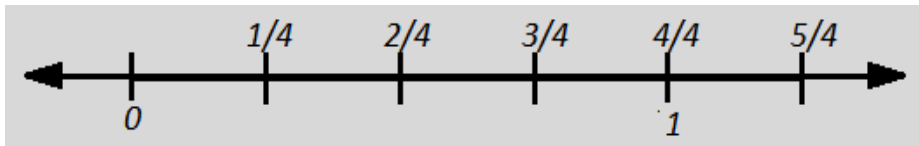
इस संख्या रेखा पर 1 का सही स्थान खोजने के लिए हमें किस तरह की रणनीति का उपयोग करना पड़ेगा? मापक उप-इकाइयों के रूप में देखें तो संख्या रेखा पर निर्धारित प्रारंभ बिन्दु 0 से मापन की शुरुआत की जा रही है। सबसे पहले 0 से 1 तक की दूरी को एक पूर्ण इकाई (whole) माना गया है। इस पूर्ण इकाई को बार-बार रखते हुए हमने संख्या रेखा का निर्माण किया है।

एक पूर्ण इकाई के आठ बराबर हिस्से करने से प्राप्त $1/8$ उप-इकाई को लगातार पाँच बार रखकर हम $5/8$ का स्थान निर्धारित कर सकते हैं। पूर्ण के बराबर हिस्से करने की समझ के आधार पर हम यह कह सकते हैं कि $1/8$ जैसे 8 टुकड़ों को दोबारा जोड़कर हम वापिस पूर्ण प्राप्त कर सकते हैं। इस तरह आठ बार $1/8$ को लगातार जोड़कर हम 1 पर पहुँचेंगे।



$$\begin{aligned}
 &1/8+1/8+1/8+1/8+1/8+1/8+1/8+1/8 \\
 &= 8 \times 1/8 \\
 &= 8/8 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

भिन्न संख्या 5/4 को भी इसी संख्या रेखा पर निरूपित करना है। इसके लिए हमें अपनी मापक इकाई को पुनः निर्धारित करना होगा। यदि हम 5/4 को इस अर्थ में देखें कि 1/4 उप-इकाई जैसे 5 टुकड़ों को प्रारंभ बिन्दु 0 से लगातार रखते हुए हम आगे बढ़ रहे हैं। ऐसी स्थिति में 4 उप-इकाइयों को लगातार रखने पर हम 1 पूर्ण का निर्माण कर लेंगे। पाँचवी 1/4 उप-इकाई अभी शेष है। इसे भी रखने के लिए हमें 1 से आगे की ओर बढ़ना पड़ेगा। तो इसका स्थान हमने निर्धारित कर लिया है। कुल मिलाकर देखें तो 1/4 उप-इकाइयों वाले 5 टुकड़ों को लगातार जोड़कर हम 5/4 दर्शा सके हैं।



$$\begin{aligned}
 &1/4+1/4+1/4+1/4+1/4 \\
 &= 5 \times 1/4 \\
 &= 5/4
 \end{aligned}$$

ऊपर लिए गए दोनों उदाहरणों में हम देख सकते हैं कि दो अलग-अलग मात्राओं के बीच तुलनात्मक सम्बन्ध को दर्शाने के लिए एक मात्रा को मापक के रूप में उपयोग किया गया है।

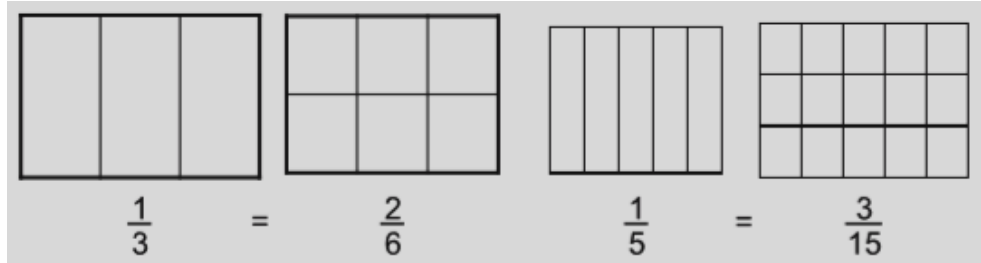
एक मात्रा दूसरी मात्रा की तुलना में कम या ज़्यादा है? कितनी गुना है? यह ज्ञात करने में भिन्न की मापक उप-अवधारणा बहुत मदद कर रही है। इस तरह कम या ज़्यादा की मात्रा को सटीकता से भिन्न रूप में दर्शाया जा सकता है।

नागप्पा सर ने प्रोजेक्टर की सहायता से संख्या रेखा पर भिन्न संख्या दर्शाने के कुछ और अभ्यास कराए। साथ ही यह भी कहा कि बच्चों के साथ ये अभ्यास नियमित रूप से किए जाने चाहिए। बेहतर होगा कि स्केल पर पहले से बनी हुई लाइनों का सन्दर्भ लेकर वे अपनी कॉपी पर ऐसी ही संख्या रेखा बनाएँ और लाइनों को गिनकर भिन्न संख्याएँ लिखें।

5. संख्या रेखा देखकर गुब्बारे में संख्याएँ भरिए।

सभी लोगों ने सर द्वारा बताई गई महत्वपूर्ण बातों को अपनी डायरी में नोट किया।

सवाल: तुल्य भिन्नों को चित्रों में रंग भरकर दर्शाएँ।



सवाल: खाली स्थान भरें $2/3 = _ / 12$, $_ / 8 = 15/20$, $5/4 = 25/_$

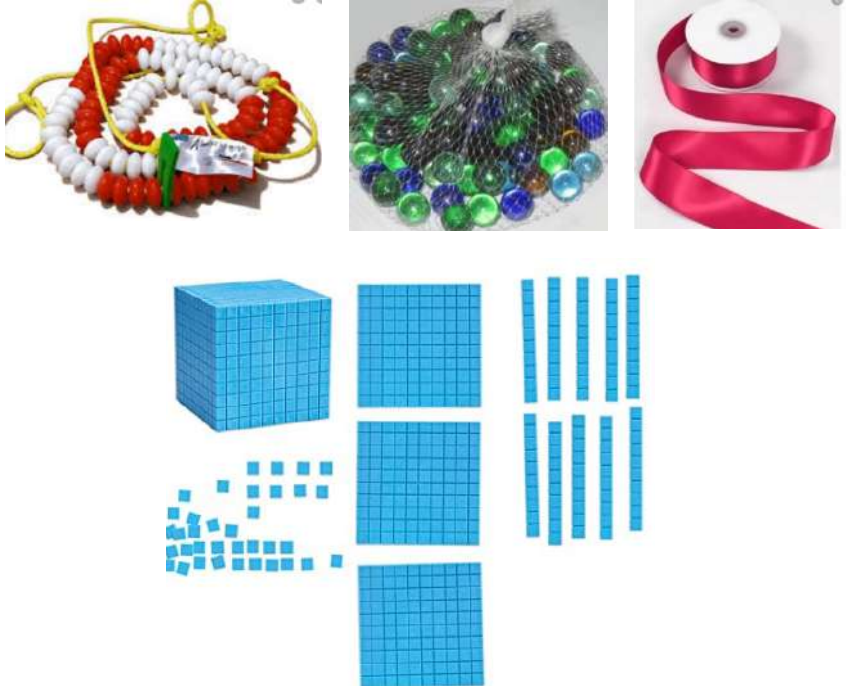
शिक्षण अधिगम सामग्री का निर्माण तथा उपयोग

यूसुफ़ सर ने स्कूलों का अवलोकन करते हुए देखा था कि कई शिक्षकों ने शिक्षा विभाग द्वारा दिए गए गणित किट से या फिर अपने हाथों से बनाई गई शिक्षण अधिगम सामग्री की सहायता से बच्चों के साथ काफी अच्छा काम किया था। कई लोग भिन्न चकती और भिन्न दीवार का उपयोग कर रहे थे। ऐसी ही एक शिक्षिका थी आनंदिता मैडम। इनका स्कूल ब्लॉक के भीतरी इलाके में स्थित एक छोटे-से गाँव में है। आनंदिता मैडम की कक्षाओं में पढ़ने वाले बच्चों का स्तर आस-पास के अन्य स्कूलों के बच्चों की तुलना में बेहतर था। ये बच्चे छायांकित चित्र देखकर भिन्न लिखने और भिन्न संख्या के लिए चित्र छायांकन करने में बहुत अच्छे थे। साथ ही कुछ छोटी भिन्न संख्याओं के तुलना वाले सवाल को भी ठीक ढंग से हल कर पा रहे थे।

आनंदिता मैडम संकोची स्वभाव की हैं। सदन में बहुत कम बोलती हैं, लेकिन स्कूल में बहुत अच्छा काम करती हैं। वे इस प्रशिक्षण में भी अपना टीएलएम का थैला साथ लेकर आई थीं। यूसुफ़ सर ने सभी लोगों को आनंदिता मैडम और उनके काम के बारे में बताया। साथ ही इन सभी सामग्रियों का उपयोग बताने के लिए आमंत्रित किया।



$\frac{1}{1}$							
$\frac{1}{2}$				$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$	
$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$	
$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{5}$	
$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$	
$\frac{1}{7}$		$\frac{1}{7}$		$\frac{1}{7}$		$\frac{1}{7}$	
$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$	



आनंदिता मैडम ने विस्तार से एक-एक सामग्री का उपयोग और उसे बनाने का तरीका बताया। साथ-साथ ही नागप्पा सर महत्त्वपूर्ण बिन्दुओं को बोर्ड पर लिखते जा रहे थे।

1. भिन्न चकती, पासा, पूर्ण संख्या कार्ड और भिन्न संख्या कार्ड

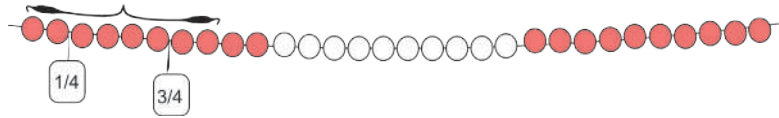
- भिन्न चकती का उपयोग भिन्न की अवधारणा से परिचित कराने के लिए किया।
 - 1 रोटी को 2 लोगों में बराबर बाँटा तो प्रत्येक को कितना मिला?
 - 1 रोटी को 3 लोगों में बराबर बाँटा तो प्रत्येक को कितना मिला?
 भिन्न चकती की सहायता से बच्चे बराबर बँटवारा करने का तरीका और हिस्सों की माला समझ पाते हैं।
- भिन्न चकती के साथ ही भिन्न संख्या कार्ड का उपयोग करते हैं। बच्चे बराबर बँटवारा के बाद मिलने वाले हिस्सों को भिन्न संख्या बोलकर बताते हैं। साथ ही उसे भिन्न संख्या कार्ड से दर्शाते भी हैं। जैसे- आधा, चौथाई, एक बटा तीन के साथ ही भिन्न संख्या कार्ड द्वारा $1/2$, $1/4$ और $1/3$ से परिचित होते हैं।
- माला को देखकर भिन्न संख्या बोलते तथा लिखते हैं और साथ ही तुलना भी करते हैं। जैसे $2/3$ और $3/2$ की तुलना करने के लिए भिन्न चकती का उपयोग।
- कोई हिस्सा दिखाकर उससे छोटे हिस्सों का चित्र बनाने और उनकी भिन्न संख्या लिखने का अभ्यास कराया जाता है।
- बच्चों को भिन्न संख्या पर आधारित इबारती सवाल बनाने का अवसर दिया जाता है। साथ ही वे एक-दूसरे से सवाल पूछने और जवाब बताने का खेल भी खेलते हैं।
- दो टीम बनाकर बारी-बारी से पासा उछालते हैं। पासे की सतहों पर भिन्न संख्याएँ $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/6$, $1/8$ और $1/16$ लिखी रहती हैं। जो भी भिन्न संख्या पासा फेंकने पर आती है, उतना ही हिस्सा उठाकर चार्ट पर चिपकाना होता है। जिस टीम ने सबसे पहले पूर्ण (1 रोटी) बना लिया, वही विजेता होंगे। बच्चों को इस खेल में बहुत आनंद आता है। साथ ही वे भिन्न संख्या और उनकी माला से भी परिचित होते हैं।

2. भिन्न दीवार और भिन्न संख्या कार्ड

- भिन्न दीवार से हिस्सों की माला और भिन्न संख्याओं को बेहतर ढंग से समझने में मदद मिलती है।
- भिन्न दीवार की सहायता से भिन्न संख्याओं की तुलना करना आसान है।
- समतुल्य भिन्न को बहुत आसानी से समझाया जा सकता है। उदाहरण: $2/3 = 6/9$ या $2/3 = 4/6$ है।
- अंश समान हो तो जिसका हर बड़ा होगा, वह भिन्न छोटी होती है। इस नियम को समझने में मदद मिलती है।
- इकाई भिन्नों का जोड़ भी समझाया जा सकता है।
 $1/4 = 1/8 + 1/8$, या फिर $1/2 = 1/6 + 1/6 + 1/6$

3. मोतीमाला, कंचे, पूर्ण संख्या कार्ड और भिन्न संख्या कार्ड

- मोतीमाला के मोतियों को गिनकर पूर्ण संख्या का कार्ड टांगते हैं। तीन से चार पूर्ण संख्याओं के कार्डों को लेकर उन्हें क्रम में टांगने की गतिविधि करते हैं। भिन्न संख्या कार्ड भी टांगने को दिया जाता है। बच्चे समझ पाते हैं कि $1/2$, $1/3$, $1/4$ या $1/6$, ये सभी भिन्न संख्याएँ 1 से कम हैं, अतः 0 और 1 के बीच कहीं दर्शाई जाएंगी।
- भिन्न संख्या $3/2$ और $5/4$ के लिए भिन्न चकती की सहायता से या चिल बनाकर माला समझते हैं। फिर भिन्न संख्या कार्ड को मोतीमाला पर टांगते हैं। दोनों भिन्नों की माला 1 से अधिक और 2 से कम है। मोतीमाला पर उचित स्थान खोजकर कार्ड टांगते हैं।
- मोतीमाला पर कुछ मोतियों को 'वस्तुओं के एक समूह' के रूप में मानकर उनके हिस्सों पर काम किया जाता है। उदाहरण के लिए 8 मोतियों का एक समूह है। इस समूह का एक-चौथाई कितना होगा? समूह का तीन-चौथाई कितना होगा? बच्चे सही माला का पता लगाते हैं, फिर भिन्न संख्या कार्ड द्वारा उसे दर्शाते हैं।



- कंचों की सहायता से 8 कंचे, 10 कंचे या 20 कंचे का समूह बनाया जाता है। इन समूहों के हिस्से करने और भिन्न संख्या कार्ड से दर्शाने की गतिविधि करते हैं।
- 18 कंचों के समूह का $1/6$ हिस्सा और 12 कंचों के समूह का $1/6$ हिस्सा निकालो। बताओ कौन-सा हिस्सा ज़्यादा है?

4. डीन्स ब्लॉक, पूर्ण संख्या कार्ड और भिन्न संख्या कार्ड

- डीन्स ब्लॉक की सहायता से इकाई, दहाई और सैकड़ा का परिचय एवं संख्या बनाने का काम करते हैं। साथ ही संख्याओं का विस्तारित रूप समझते हैं।
- दहाई में कुल कितनी इकाइयाँ हैं। दहाई में से 2 इकाइयाँ निकाल ली गई हैं। यह पूर्ण का कितना हिस्सा है? (यहाँ 1 दहाई पूर्ण है और 2 इकाइयाँ 1 दहाई का $2/10$ वाँ भाग है।)



- सैकड़े के अन्दर 10 दहाइयाँ छिपी हैं। अतः 1 दहाई को सैकड़े का $1/10$ भाग कहेंगे।
- 1 सैकड़े में 100 इकाइयाँ हैं। इनमें से 3 इकाइयाँ ले ली गई हैं। यह $3/100$ वाँ भाग है।

5. फीता, पूर्ण संख्या कार्ड, भिन्न संख्या कार्ड और कपड़े टांगने की चिमटी

- सबसे पहले फीते पर पूर्ण संख्या के संख्या कार्डों को क्रम से टांगने का काम करवाते हैं। उदाहरण के लिए संख्या 7, 5, 8, 3 को बढ़ते क्रम में टांगो। इनमें कौन सबसे छोटी संख्या है और कौन सबसे बड़ी संख्या है?
- पूर्ण संख्या और भिन्न संख्या कार्डों को क्रम में टांगने का अभ्यास कराते हैं। उदाहरण के लिए संख्या 1, $1/2$, 3, $2/3$, 5, $1/4$ आदि को बढ़ते क्रम में टांगने का अवसर देना। इस तरह खाली संख्या रेखा पर संख्याएँ रखने का अभ्यास इस गतिविधि द्वारा किया जाता है।











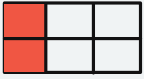


- भिन्न संख्याओं को बढ़ते और घटते क्रम में जमाने का अभ्यास करते हैं। उदाहरण के लिए संख्या $5/4$, $2/3$, $3/4$, $1/2$, $1/3$ को क्रम में टांगने का अभ्यास।
- समतुल्य भिन्नों को फीते पर टांगने की गतिविधि कराई जाती है। जैसे $1/2$, $2/4$, $1/3$, $2/6$ को फीते पर टांगना। बच्चे देख पाते हैं कि $1/2$, $2/4$ का स्थान फीते पर एक ही जगह है। इसी तरह $1/3$, $2/6$ का स्थान भी फीते पर एक ही जगह है। इस तरह समतुल्य भिन्न की माला की समझ बनती है।

सभी लोगों ने ये सारी गतिविधियाँ अपनी कॉपी में नोट कर ली थीं। नागप्पा सर और जयलक्ष्मी मैडम ने आनंदिता मैडम की सराहना की तथा उनके द्वारा उपयोग की जा रही सामग्री और गतिविधियों के महत्त्व पर भी बात की। सदन में बैठे शिक्षक कार्तिक जी ने कहा कि ये सब गतिविधियाँ उनको बहुत अच्छी लगी हैं। यदि उनके शिक्षकों ने भी इनका उपयोग किया होता तो आज उन्हें गणित से डर नहीं लगता, बल्कि गणित में और भी आनंद आता। कार्तिक जी ने वादा किया कि वे भी अपने स्कूल के बच्चों के लिए ऐसी ही सामग्री बनाएंगे। सदन ने आनंदिता मैडम के लिए जोरदार तालियाँ बजाईं। इस तरह आज के दिन के प्रशिक्षण का समापन हुआ।

2.7.6 बच्चों की सामान्य चुनौतियाँ (Common Challenges of Learners)

- अगर बच्चों को किसी चित्र में भिन्न को दर्शाने के लिए कहा जाए तो वे पूर्ण को भागों में बाँटते हैं। लेकिन सारे भाग बराबर हैं या नहीं, इस पर फोकस नहीं होता है।
- इसी प्रकार किसी चित्र में छायांकित भागों का भिन्न बताने के लिए कहा जाए और वे भाग बराबर न हों, तो भी बच्चे उस छायांकित भाग का भिन्न बताते हैं। वे यह सवाल नहीं करते कि इसमें भाग बराबर नहीं हैं। बहुत कम बच्चे जानते हैं कि भिन्न के संदर्भ में सभी भाग बराबर होने चाहिए। जैसे बच्चों द्वारा $1/2$ दर्शाने में दोनों भाग अक्सर बराबर नहीं होते, किसी एक पूर्ण (वस्तु/चित्र) के बस दो भाग किए जाते हैं।



- चित्र बराबर भागों में न बँटा हो, फिर भी भागों का आपस में सम्बन्ध होता है। किसी एक भाग का भिन्न पूरे के संदर्भ में पूछा जाए, तब बच्चे चित्र में कुल कितने घर (वर्ग/आयत) हैं, उसको गिनते हैं और कितने घर छायांकित हैं, यह देखते हैं। इस तर्क से चित्र में छायांकित भाग का भिन्न $1/11$ है। जो बच्चे यह नहीं समझते कि हिस्से बराबर भागों में बँटे होने चाहिए, वे इस प्रकार की गलतियाँ ज़्यादा करते हैं। 
- जब बच्चों से $2/3$ को चित्र में प्रदर्शित करने को कहा जाता है तो बच्चे अक्सर इस प्रकार (जो चित्र दिया हुआ है) के चित्र बनाते हैं। यह भी देखने को मिलता है कि जब इस प्रकार के चित्र में छायांकित भाग का भिन्न पूछा जाता है तो बच्चे उसका उत्तर छायांकित भाग और बिना छायांकित भाग को ऊपर-नीचे लिखकर (इस चित्र के संदर्भ में $2/3$ या $3/2$) बता देते हैं। 
- भिन्नों की तुलना करते समय बच्चे उस भिन्न को बड़ी बताते हैं जिसका हर बड़ा होता है। जैसे $1/3$ और $1/5$ में से $1/5$ को बड़ा बताते हैं। 
- भिन्न $1/3$ को चित्र रूप में दर्शाने में गलती करते हैं। 
- किसी एक वस्तु/चित्र को कितने तरीकों से बराबर बाँटकर $1/2$, $1/3$ या $1/4$ दर्शा पाएंगे? बच्चे एक-दो तरीकों से ही बराबर बाँट पाते हैं। एक भिन्न का अलग-अलग तरीके से निरूपण करने में बहुत दिक्कत होती है। कुछ बच्चे सही निरूपण को भी मानने से मना कर देते हैं। 

- बच्चों से हमेशा छायांकित भाग को भिन्न में प्रदर्शित करने के लिए कहा जाता है। यदि बिना छायांकित भाग को भिन्न में दर्शाने को कहा जाए तो वे गलतियाँ करते हैं। जैसे- इस चित्र में बच्चों को बिना रंगे भाग को भिन्न में बताना था। ज़्यादातर बच्चों ने रंगे हुए भाग का ही भिन्न बताया था। 
- इबारती सवाल जैसे- अपनी कक्षा में लड़कों और लड़कियों की संख्या को भिन्न संख्या में लिखो, नहीं हल कर पाते हैं।
- बच्चे पूर्ण के हिस्से को भिन्न संख्या में बदल तो देते हैं, लेकिन जब कोई हिस्सा दिखाकर उसका पूर्ण पूछा जाता है तो बच्चे नहीं बता पाते हैं। जैसे- नानू ने 3 बिस्किट खाए हैं। ये पूरे पैकेट का चौथाई हिस्सा है। तब 1 पैकेट में कितने बिस्किट होंगे?
- बहुत-से बच्चे $5/4$ या $3/2$ को चित्र के रूप में नहीं दर्शा पाते हैं।
- यह चित्र देखकर दोनों छायांकित हिस्से को $1/3$ नहीं मानते हैं। 

- बच्चों को समतुल्य भिन्न को समझने में दिक्कत होती है।
- बच्चों से जब पूछा जाता है कि A, B का दोगुना है तो B, A का कितना गुना होगा, ऐसे सवालों का जवाब देने में बच्चों को कठिनाई महसूस होती है। 




2.7.7 उदाहरणात्मक कार्ययोजना (Illustrative Session Plan)

सल	विषय	समय	सामग्री	
1	भिन्न शिक्षण के अनुभव	• बच्चों की चुनौतियाँ और उनके कारण • शिक्षकों की चुनौतियाँ और उनके कारण	2 घंटे	पाठ्यपुस्तक और कार्यपत्रक
2	भिन्न की अवधारणा	• भिन्न की अवधारणा से परिचय • भिन्न की पाँच उप-अवधारणाएँ	2 घंटे	आलेख तथा पीपीटी
3	मात्रा की समझ	बराबर बँटवारा और पूर्ण के हिस्से द्वारा मात्रा की समझ और गणितीय निरूपण	2 घंटे	भिन्न चकती
4	समतुल्य भिन्न	समतुल्य भिन्न की अवधारणा	2 घंटे	भिन्न चकती, भिन्न दीवार एवं मोतीमाला।
5	सामग्री का उपयोग और आकलन	सामग्री का निर्माण तथा उपयोग	2 घंटे	भिन्न चकती, भिन्न दीवार, मोतीमाला एवं फीता।

2.7.8 अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)



कक्षा-कक्ष में भिन्न की अवधारणा पर आधारित काम निम्न प्रक्रियाओं के अनुसार किया जाना अपेक्षित है। शिक्षकों के साथ भिन्न की अवधारणा पर किए जाने वाले काम का आधार भी यही प्रक्रियाएँ होंगी। ध्यान रहे कि ये प्रक्रियाएँ उन्हीं सात अवलोकन क्षेत्रों पर आधारित हैं जिनके बारे में हमने अध्याय 1 में बात की थी।

अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)- भिन्न

1. बराबर-बराबर बाँटने की दैनिक जीवन की ऐसी परिस्थितियाँ बच्चों के सामने रखते हैं जिसमें पूर्ण को हिस्से में बराबर-बराबर बाँटना पड़े। मिलने वाले हिस्से को भिन्न संख्या में बताना पड़े। जैसे 2 रोटी को 3 बच्चों में बराबर-बराबर बाँटना।
2. आम ज़िंदगी की ऐसी परिस्थितियाँ बच्चों के सामने रखते हैं जिसमें चीज़ों के समूह को बराबर-बराबर बाँटना पड़े और समूह के हिस्से के लिए भिन्न संख्या बतानी पड़े। जैसे- एक कक्षा में 24 बच्चे हैं, इसके आधे या एक तिहाई में कितने बच्चे होंगे? 24 बच्चों में अगर 4 लड़कियाँ हैं तो लड़कों की संख्या को भिन्न संख्या में कैसे व्यक्त करेंगे?
3. ऐसी परिस्थितियाँ बच्चों के सामने रखते हैं जिसमें आयताकार, वर्गाकार, वृत्ताकार, त्रिभुजाकार जैसी आकृतियों के कागज़ को दो, तीन... आदि भागों में बराबर बाँटना हो और हिस्से की भिन्न संख्या बतानी हो।
4. ऐसी परिस्थितियाँ कक्षा-कक्ष में रखते हैं जिसमें दी गई भिन्न संख्या को संख्या रेखा पर प्रदर्शित करना हो। जैसे $4/3$ को संख्या रेखा पर प्रदर्शित करो। संख्या रेखा पर प्रदर्शित करने में एक

अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)- भिन्न

- इकाई को निर्धारित करना, उसके बराबर-बराबर 3 हिस्से करना और प्रत्येक हिस्सा पूरी इकाई का एक तिहाई है, इस समझ से $\frac{4}{3}$ संख्या रेखा पर दिखाना।
5. भिन्न संख्या पर काम से पूर्व भाग की संक्रिया में बराबर बँटवारे पर काम करवाते हैं।
 6. बराबर बँटवारे की समझ का उपयोग किसी इकाई/पूर्ण के बराबर हिस्से करने में करते हैं।
 7. पाठ्यपुस्तक में पूर्ण संख्याओं के बाद भिन्न संख्याओं पर काम की शुरुआत की जाती है। जबकि पूर्ण संख्याओं के बाद पूर्णांक (integers) पर काम होना चाहिए। इस क्रमिक बदलाव के तर्क को शिक्षक समझता है।
 8. भिन्न संख्याओं की समझ बच्चों की परिमेय संख्याओं की समझ के लिए आधार तैयार करती है। इस बात को शिक्षक समझता है।
 9. भिन्न संख्या के लिए आम ज़िन्दगी के सन्दर्भों का उपयोग करते हैं। जैसे- रोटियों का बँटवारा, पेपर फोल्डिंग, किसी समूह की चीज़ों का आधा, तिहाई आदि।
 10. अंश और हर को संदर्भ के साथ समझाते हैं। जैसे $\frac{3}{4}$ भिन्न संख्या में हर 4 यह बताता है कि इकाई/पूर्ण के चार समान हिस्से किए गए हैं। प्रत्येक हिस्सा $\frac{1}{4}$ है। अंश 3 यह बताता है कि एक चौथाई हिस्से तीन हैं। इस बात को पेपर फोल्डिंग, कागज़ की चकतियों आदि से बताते हैं।
 11. दो भिन्न संख्याओं की तुलना को ठोस सामग्री जैसे कागज़ की चकतियों, रोटियों आदि से बताते हैं। जैसे $\frac{2}{3}$ और $\frac{4}{5}$ में कौन-सी भिन्न बड़ी है, इसको बच्चों में रोटियों के बँटवारे, पेपर फोल्डिंग आदि से समझाते हैं।
 12. भिन्न संख्या को समझने के लिए विविध प्रकार के अनुभव बच्चों को देते हैं। जैसे- किसी भिन्न संख्या को चित्र में दिखाना, चित्र को भिन्न संख्या में लिखना, आम ज़िन्दगी का संदर्भ गढ़ना, टीएलएम का उपयोग आदि।
 13. बच्चे की भाषा को गणित की भाषा से जोड़ते हैं। जैसे- आधा, पाव, पौन, सवा, डेढ़, ढाई आदि।
 14. शिक्षक भिन्न संख्याओं के कक्षावार सीखने के प्रतिफलों को जानते हैं।
 15. सीखने के प्रतिफलों के अनुसार शिक्षण प्रक्रिया को अपनाते हैं। जैसे- बराबर बँटवारा के रूप में भिन्न, पूर्ण के हिस्से के रूप में भिन्न, मापक के रूप में भिन्न, शब्दावली, चित्रों में दिखाना, चित्र से भिन्न में लिखना, भिन्नों की तुलना करना, समतुल्य भिन्न आदि।
 16. भिन्न संख्याओं की मात्रात्मक समझ पर काम करते हैं। जैसे $\frac{5}{6}$ कितना होता है? इसे बच्चों को विभिन्न तरीकों से समझाते हैं कि यह $\frac{3}{4}$ से ज़्यादा है, 1 से कम है, 1 से $\frac{1}{6}$ कम है, $\frac{5}{6}$ को 1 बनाने के लिए इसमें $\frac{1}{6}$ मिलाना पड़ेगा आदि।
 17. भिन्न के सवालों को विभिन्न तरीकों से हल करने के मौके बच्चों को देते हैं। जैसे- किसी आयताकार कागज़ को आधा करने के क्या-क्या तरीके हो सकते हैं?
 18. दी गई भिन्न संख्या के लिए आम ज़िन्दगी के संदर्भ गढ़ने पर काम करवाते हैं।
 19. दी गई भिन्न संख्याओं की तुलना अनुमान लगाकर करने पर काम करते हैं। अनुमान की पुष्टि करवाते हैं।
 20. एक ही भिन्न संख्या को विभिन्न तरीकों से प्रदर्शित करवाने पर काम करवाते हैं।

अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)- भिन्न

21. पैटर्न देखकर सामान्यीकरण पर काम करवाते हैं। जैसे- किसी पूर्ण/इकाई के जितने ज़्यादा हिस्से करते जाएंगे, मिलने वाला हिस्सा छोटा होता जाएगा।
22. भिन्न पर काम की शुरुआत बच्चों के अनुभवों व ठोस चीज़ों के बँटवारे से करते हैं।
23. बच्चों के अनुभव व ठोस चीज़ों के बँटवारे के काम को चित्रों के रूप में प्रदर्शित करते हैं।
24. ठोस चीज़ों, चित्रों की समझ को आगे सांकेतिक (symbolic) भाषा तक ले जाते हैं।
25. कक्षा में बच्चों को सवाल पूछने के मौके देते हैं।
26. बच्चों के स्तरानुसार योजना बनाना, गतिविधियों का निर्माण करना और उसी अनुरूप काम करते हैं।
27. आकलन की प्रक्रिया में विविध तरह के सवालों, गतिविधियों, कार्यपत्रकों का इस्तेमाल करते हैं।
28. बच्चों के जवाबों का विश्लेषण करते हैं, जिससे बच्चों के साथ ज़रूरत अनुसार काम किया जा सके।



2.7.9 उदाहरणात्मक पाठ योजना (Illustrative Lesson Plan)

भिन्न में 'आधा' की अवधारणा पर पाठ योजना का नमूना:

टॉपिक	उद्देश्य	समय	प्रक्रिया	सामग्री
भिन्न में आधा की समझ	<ul style="list-style-type: none"> • बराबर-बराबर बाँटने की परिस्थिति/संदर्भ को समझ पाना। • किसी रोटी या अन्य चीज़ को दो बराबर भागों में बाँट पाना। • रोटी या अन्य कोई चीज़ आधी हुई या नहीं, अपने उत्तर के पक्ष में तर्क गढ़ पाना। • आधा-आधा बाँटने के विभिन्न तरह के अनुभव बच्चों को देना। 	4-5 कालांश	<p>गतिविधि 1: बच्चों को बिल्ली और बंदर की कहानी सुनाना। जिसमें एक रोटी के लिए दो बिल्लियाँ आपस में झगड़ रही हैं। झगड़े को सुलझाने के लिए एक बंदर आता है। दोनों बिल्लियों का झगड़ा खत्म हो जाता है। बताओ, बंदर ने रोटी का झगड़ा कैसे हल किया होगा? इस पर बच्चों से चर्चा करना और बंदर के बँटवारे के तरीके को जानना।</p> <p>गतिविधि 2: अगर बंदर की जगह तुम होते तो एक रोटी को दो बिल्लियों में कैसे बाँटते? इस गतिविधि को बच्चों को प्रायोगिक तौर पर करने के अवसर देना। बच्चों को वृत्ताकार कागज़ की चकतियाँ देकर इनके बराबर बँटवारे के मौके देना। बच्चे जिस भी तरीके से आधा करें उस पर बच्चों के साथ बात करें। और बच्चों से यह सवाल भी करें, आपको कैसे पता लगा कि यह रोटी दो बराबर भागों में बँट गई है?</p> <p>गतिविधि 3: बच्चों को आयताकार, वर्गाकार कागज़ देकर इनको दो बराबर हिस्सों में फ़ोल्ड करवाएँ और एक हिस्से में रंग भरवाएँ। जिस भाग में रंग किया हो वो पूरे कागज़ का आधा है और जिस भाग में रंग नहीं किया है वो भी रंग वाले भाग जितना ही है, इसे पेपर फ़ोल्ड करके समझने पर काम करें। इस प्रक्रिया में बच्चे यह समझ पाएँ</p>	<p>आयताकार, वर्गाकार व वृत्ताकार कागज़ की चकतियाँ।</p> <p>Crayons colour</p> <p>कार्यपत्रक</p>

टाँपिक	उद्देश्य	समय	प्रक्रिया	सामग्री
			<p>कि दोनों भाग बराबर हैं और प्रत्येक भाग पूरे कागज़ का आधा है।</p> <p>गतिविधि 4: आयताकार व वर्गाकार कागज़ को एक से ज़्यादा तरीकों से दो बराबर भागों में कैसे बाँट सकते हैं? इस पर बच्चों के साथ बात करना और कागज़ देकर अलग-अलग तरीकों से दो बराबर भागों में बाँटवाना। दोनों हिस्सों को एक-दूसरे के ऊपर रखकर (अध्यारोपित कर) दोनों भागों के बराबर होने के तर्क को समझने पर बातचीत करना।</p> <p>गतिविधि 5: उपरोक्त चारों गतिविधियों पर काम के पश्चात कार्यपत्रकों पर बच्चों से काम करवाना। काम के चरण निम्न हो सकते हैं:</p> <p>5.1 निम्न चित्रों को दो बराबर-बराबर हिस्सों में बाँटो और आधे हिस्से में रंग भरो (इस worksheet में गुब्बारा, पतंग, आइसक्रीम आदि चीज़ों के चित्र हो सकते हैं)।</p> <p>5.2 प्रत्येक चित्र को रेखा खींचकर सर्वसंभव तरीकों से बराबर-बराबर आधा-आधा बाँटो (इस worksheet में पतंग, कप, पत्ती, रोटी बेलने वाला बेलन, मछली, सूरज आदि के चित्र हो सकते हैं)।</p> <p>5.3 अंग्रेज़ी कैपिटल अल्फाबेट (A से Z तक) को बच्चों से नोटबुक में लिखवाकर उनको एक रेखा खींचकर आधा करवाना, जिसमें बच्चे यह जान पाएँ कि कौन-कौन-से अल्फाबेट एक रेखा खींचने से आधे हो जाते हैं और कौन-से नहीं।</p> <p>इस तरह की गतिविधियाँ कक्षा-कक्ष में बच्चों के साथ करें, जिससे उन्हें आधे की समझ विभिन्न तरह के अनुभवों से हो सके।</p>	

2.7.10 सार संक्षेप (Summary)

- वस्तु या वस्तुओं के समूह का बराबर बाँटवारा (equal sharing) और बराबर समूह बनाने (equal grouping) के अभ्यास कराएँ।
- इबारती सवाल (word problems) पर मौखिक बातचीत करें, बच्चों को सवाल बनाने का अवसर दें।
- बराबर बाँटवारा या बराबर समूह बनाने के लिए चित्र (pictures) बनाने के लिए प्रोत्साहित करें।
- कागज़ को मोड़कर (paper folding) हिस्से करना सिखाएँ और उनके बारे में बात करें।

- पूर्ण (whole) को इकाई के रूप में और समूह के रूप में समझाएँ। इनके हिस्सों के लिए भिन्न लिखवाएँ।
- छायांकित भाग (shaded region) की भिन्न संख्या लिखने और भिन्न संख्या के लिए चित्र बनाने का अभ्यास कराएँ।
- भिन्न की अवधारणा पाँच उप-अवधारणाओं (sub-constructs) से मिलकर बनती है। ये हैं:
 - बराबर बँटवारा (Equal Sharing)
 - पूर्ण के हिस्से (Part-Whole)
 - अनुपात (Ratio)
 - मापक (Measure)
 - प्रचालक (Operator)
- समतुल्य भिन्न (Equivalent Fraction) बनाने के अभ्यास कराएँ व मात्रा समझने का अवसर दें।
- दो भिन्न संख्याओं को देखकर छोटा/बड़ा बताना और तीन से चार भिन्न संख्याओं को बढ़ते या घटते क्रम में जमाने का अभ्यास कराएँ।
- भिन्न संख्याओं की तुलना करने के लिए समतुल्य भिन्न के उपयोग को समझाएँ।
- जहाँ तक संभव हो, परिचित सन्दर्भों और ठोस सामग्रियों (Contexts and Materials) का उपयोग करें।
- भिन्न चकती, भिन्न दीवार, मोतीमाला, कंचे, फीता, संख्या कार्ड, पासा, भिन्न संख्या कार्ड आदि का उपयोग करते हुए कक्षा-कक्ष में शिक्षण प्रक्रिया करें।



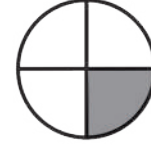
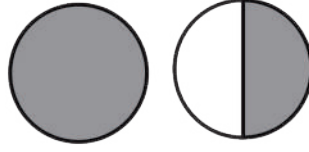
2.7.11 कार्यपत्रक एवं गतिविधियाँ (Worksheets and Activities)

प्रश्न 1: छायांकित कीजिए।

2 छायांकित कीजिए—

(i)	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 60px;"> <tr><td style="width: 30px; height: 30px;"></td><td style="width: 30px; height: 30px;"></td></tr> <tr><td style="width: 30px; height: 30px;"></td><td style="width: 30px; height: 30px;"></td></tr> </table>					चौथाई				
(ii)	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 60px;"> <tr><td style="width: 30px; height: 30px;"></td><td style="width: 30px; height: 30px;"></td></tr> <tr><td style="width: 30px; height: 30px;"></td><td style="width: 30px; height: 30px;"></td></tr> </table>					आधा				
(iii)	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 60px;"> <tr><td style="width: 30px; height: 30px;"></td><td style="width: 30px; height: 30px;"></td></tr> <tr><td style="width: 30px; height: 30px;"></td><td style="width: 30px; height: 30px;"></td></tr> </table>					तीन चौथाई				
(iv)	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 120px; height: 60px;"> <tr><td style="width: 60px; height: 30px;"></td><td style="width: 60px; height: 30px;"></td></tr> <tr><td style="width: 60px; height: 30px;"></td><td style="width: 60px; height: 30px;"></td></tr> </table> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 60px; margin-left: 20px;"> <tr><td style="width: 30px; height: 30px;"></td><td style="width: 30px; height: 30px;"></td></tr> <tr><td style="width: 30px; height: 30px;"></td><td style="width: 30px; height: 30px;"></td></tr> </table>									डेढ़

प्रश्न 2: छायांकित भाग के लिए भिन्न संख्या लिखो।



प्रश्न 3: इन भिन्न संख्याओं को छायांकित चित्र बनाकर दिखाओ।

$\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{4}$

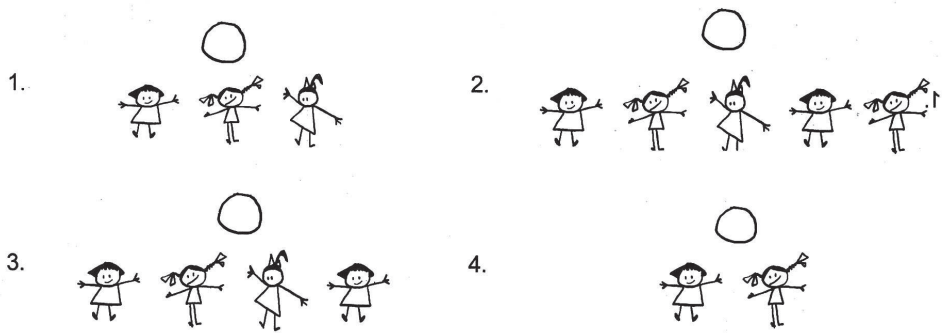
प्रश्न 4: अगर 6 बच्चे हैं तो कितनी रोटियाँ चाहिए ताकि हर बच्चे को $\frac{1}{3}$ रोटि मिले?

प्रश्न 5: $<$, $=$, $>$ के निशान लगाकर बताओ, कौन-सी संख्या बड़ी है?

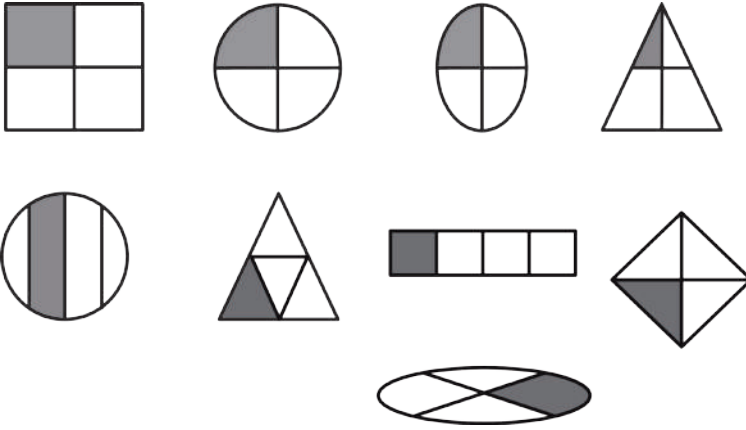
$$\frac{1}{2} \quad \square \quad \frac{1}{3} \qquad \frac{1}{3} \quad \square \quad \frac{1}{4} \qquad \frac{2}{3} \quad \square \quad \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2} \quad \square \quad \frac{2}{4} \qquad \frac{5}{2} \quad \square \quad \frac{5}{4}$$

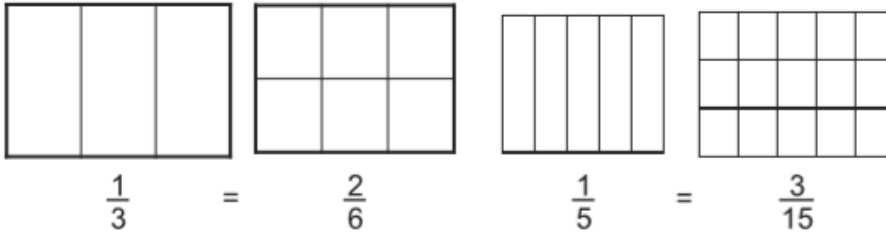
प्रश्न 6: चित्र देखकर बताओ, किस समूह के बच्चों को सबसे बड़ा हिस्सा मिलेगा और क्यों? प्रत्येक के लिए भिन्न संख्या लिखो। अब इन्हें घटते क्रम में लिखो।



प्रश्न 7: दी गई आकृतियों में से किनका 1/4 हिस्सा सही रंगा हुआ है?



प्रश्न 8: दिए गए तुल्य भिन्नों को चित्रों में रंग भरकर दर्शाएँ।



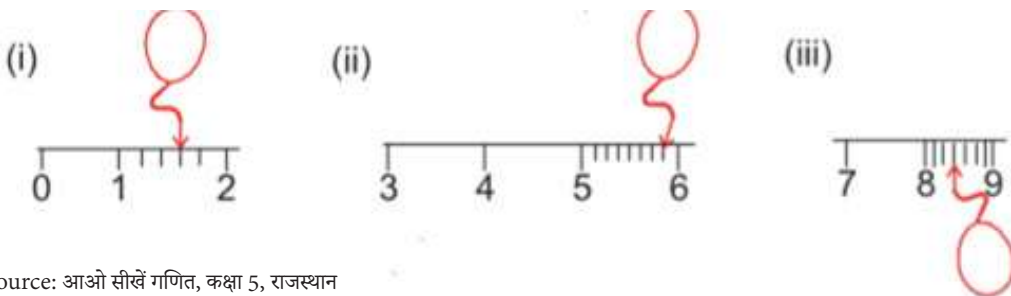
प्रश्न 9: इन भिन्न संख्याओं को छोटे से बड़े क्रम में लिखिए।

- (i) $\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{7}{3}$ (ii) $\frac{6}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{4}{2}$
- (iii) $\frac{3}{7}, \frac{1}{7}, \frac{5}{7}, \frac{2}{7}$ (iv) $\frac{7}{6}, \frac{4}{6}, \frac{6}{6}, \frac{5}{6}$

प्रश्न 10: संख्या रेखा पर इन भिन्न संख्याओं को दर्शाइए।

$$\frac{3}{4}, 2\frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{2}{3}$$

प्रश्न 11: संख्या रेखा देखकर गुब्बारे में संख्याएँ लिखिए।



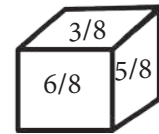
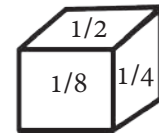
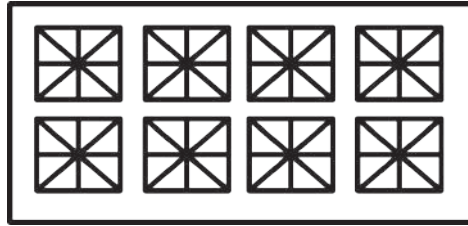
Source: आओ सीखें गणित, कक्षा 5, राजस्थान

गतिविधियाँ (Activities):

गतिविधि 1: पासा फेंको, रंग भरो

आवश्यक सामग्री:-

एक शीट-पेपर जिस पर वर्ग बने हो और उसे 8 बराबर त्रिभुज में बांटा गया हो, 2 पासे जिस पर निम्न चिप्पी (भिन्न संख्याएँ) हो - $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{4}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{2}{8}$ और $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{4}{8}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{6}{8}$; $\frac{7}{8}$



खेल के नियम:-

- सर्वप्रथम दोनों पासों को उछालें और दोनों पासों में आए भिन्नों की तुलना करें और जात करें कि कौन सी भिन्न बड़ी है।
- अगर खिलाड़ी सही जवाब दे, तो उस भिन्न के तुल्य, किसी वर्ग के उतने ही भाग में रंग भरे।
- बड़े भिन्न के तुल्य रंग एक ही वर्ग में या एक से अधिक वर्ग में भर सकते हैं। (नीचे दिये गए उदाहरण में स्पष्ट है।)
- जो खिलाड़ी पहले सभी वर्ग में रंग भर देगा वो जीत जाएगा।

उदाहरण:-

- माना यदि किसी खिलाड़ी ने उछाला और पाँसों में $\frac{1}{2}$ और $\frac{3}{8}$ आता है, और खिलाड़ी यह बताता है कि $\frac{1}{2}$ बड़ा है $\frac{3}{8}$ से और दिये गए वर्ग के $\frac{1}{2}$ भाग में रंग भरता है या 2 वर्ग में $\frac{1}{2}$ के तुल्य रंग भरता है जैसे एक वर्ग में $\frac{1}{4}$ और दूसरे में $\frac{1}{4}$ या एक में $\frac{1}{8}$ और दूसरे में $\frac{3}{8}$ तो उसे सही माना जाएगा।

अतिरिक्त अध्ययन सामग्री (Additional Reading Resources):

1. लार्ज स्केल कैम्प, राजस्थान 2019 मॉड्यूल- अज़ीम प्रेमजी फाउंडेशन
2. वीडियो: बाँटो, मापो, भिन्न बनाओ- एकलव्य संस्थान
3. आलेख: भिन्न से अनुपात की ओर- सन्दर्भ, एकलव्य
4. पुल आउट: भिन्न संख्याएँ- लर्निंग कर्व, अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी

2.8 दशमलव (Decimals)

सीखने के प्रतिफल (Learning Outcomes)

कक्षा 5

- दशमलव भिन्न ($1/10$) की अवधारणा को समझें।
- भिन्न को दशमलव संख्या तथा दशमलव संख्या को भिन्न में लिख सकें।

नोट: दशमलव की अवधारणा व्यापक है। एनसीईआरटी पाठ्यक्रम के अनुसार कक्षा 5 में इस अवधारणा का परिचय मात्र कराया गया है। अधिकतर राज्यों की पाठ्यपुस्तकों में दशमलव की अवधारणा को प्राथमिक कक्षाओं में शामिल नहीं किया गया है। इस पाठ में हम दशमलव की अवधारणा का उतना हिस्सा ही शामिल कर रहे हैं जो एनसीईआरटी कक्षा 5 की गणित पाठ्यपुस्तक में है।

2.8.1 समूहीकरण और स्थानीय मान (Grouping and Place Value)

हम पिछले पाठों में स्थानीय मान और भिन्न की अवधारणा पर बात कर चुके हैं। इस पाठ में हम दशमलव की अवधारणा को समझने का प्रयास करेंगे।

2 5 3 7

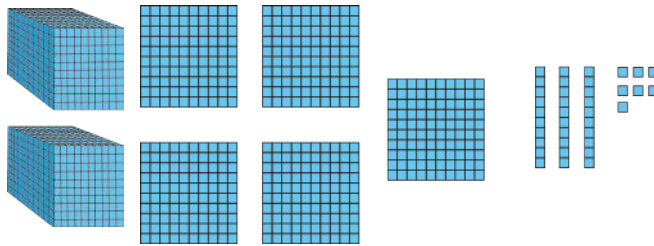
$$2 \times 1000 + 5 \times 100 + 3 \times 10 + 7$$

अज़ीम प्रेमजी फाउंडेशन, राजसमन्द

दशमलव की अवधारणा एक तरह से स्थानीय मान

की अवधारणा का विस्तार है। स्थानीय मान पर काम करते हुए हमने समूहीकरण की अवधारणा को समझा था। दस इकाइयों के समूहीकरण से 1 दहाई, दस दहाइयों के समूहीकरण से 1 सैकड़ा और दस सैकड़ों के समूहीकरण से 1 हज़ार बनता है।

इस तरह संख्या 2537 को हम 2 हज़ार, 5 सैकड़ा, 3 दहाई और 7 इकाई के रूप में समझ पाते हैं। इस संख्या को हम शब्दों में भी लिख सकते हैं— दो हज़ार पाँच सौ सैंतीस।



2.8.2 संख्याओं का विस्तारित रूप (Expanded Form of Numbers)

संख्याओं का विस्तारित रूप लिखने के लिए कक्षा 3 तथा 4 की पाठ्यपुस्तकों में कई अभ्यास दिए जाते हैं। ऐरो कार्ड (arrow card) की मदद से भी यह किया जा सकता है। हम अपने हाथ से ऐरो कार्ड बना सकते हैं।

सवाल: संख्या 853 का विस्तारित रूप लिखो।

विस्तारित रूप:

100	10	1
200	20	2
300	30	3
400	40	4
500	50	5
600	60	6
700	70	7
800	80	8
900	90	9

संख्या 853 को ऐरो कार्ड की मदद से इस प्रकार प्रदर्शित करते हैं।



इकाइयों का बराबर हिस्से में टूटना (Equal Sharing)

इसी तरह भिन्न की अवधारणा पर काम करते हुए हमने देखा है कि कोई इकाई (या किसी पूर्ण) या इकाइयों के समूह को उसके छोटे हिस्सों के रूप में तोड़ा जा सकता है। इसे एक उदाहरण से समझते हैं:



मान लेते हैं, 5 सेबों को 2 बच्चों में बराबर बाँटा गया है। इस तरह प्रत्येक के हिस्से में ढाई सेब आ रहे हैं। अपनी पूर्ण संख्याओं (whole numbers) और भिन्न (fraction) की समझ के आधार पर हम 'ढाई' को गणितीय रूप में लिख सकते हैं। इसे एक संख्या के रूप में दर्शा सकते हैं:

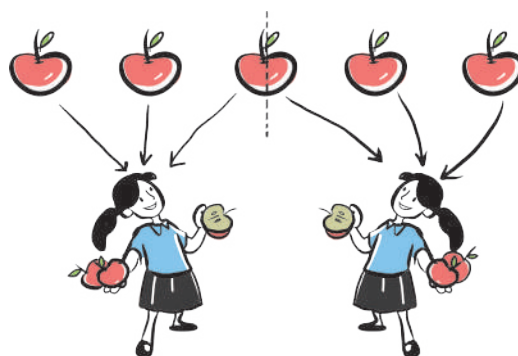
$2\frac{1}{2}$ (2 पूरे सेब और $\frac{1}{2}$ सेब)

इसी तरह भिन्न संख्या के रूप में हम $2\frac{1}{3}$, $5\frac{1}{4}$, $7\frac{3}{4}$ जैसी संख्याओं को भी लिखते हैं और इनकी माताओं को भी समझते हैं।

भिन्न के अंतर्गत हम किसी भी पूर्ण (whole) को कितने ही बराबर हिस्सों में बाँट सकते हैं। हम 2 बराबर हिस्से करके $\frac{1}{2}$, 3 बराबर हिस्से करके $\frac{1}{3}$, 4 बराबर हिस्से करके $\frac{1}{4}$ या इसी तरह 16 बराबर हिस्से करके $\frac{1}{16}$ भी प्राप्त करते हैं।

2.8.3 द्वाशमिक संख्या पद्धति में इकाइयों का टूटना

अब एक बार फिर वापिस स्थानीय मान की तरफ आते हैं। हम द्वाशमिक संख्या पद्धति (decimal number system) का उपयोग करते हैं। यानी हमारी संख्या पद्धति में समूहीकरण दस पर किया जाता है। इसलिए 10 इकाइयों को मिलकर 1 दहाई, 10 दहाइयों को मिलकर 1 सैकड़ा और 10 सैकड़ा मिलाकर 1 हजार बनता है। इसी नियम की पालना हमें इकाइयों को तोड़ते हुए भी करनी होती है।



ऊपर दिया गया उदाहरण एक बार फिर देखते हैं। 5 सेबों को 2 बराबर हिस्सों में बाँटा जा रहा है। जब तक

हम सेब की बात कर रहे हैं, हम दोनों लोगों के हिस्सों को $2\frac{1}{2}$ (2 पूरे सेब और $\frac{1}{2}$ सेब) लिख सकते हैं। लेकिन जैसे ही हम इस बँटवारे को whole number के रूप में समझते हुए स्थानीय मान के अनुसार लिखेंगे, तब हम इस पाँचवें सेब को 2 बराबर भाग में नहीं बाँट सकेंगे। क्योंकि स्थानीय मान के अनुसार 10 इकाइयों

से मिलकर बड़े समूह बने हैं। इसी तरह इकाइयों का टूटना भी दस हिस्सों में ही होगा।

2.8.4 भिन्न से दशमलव की ओर (Fraction to Decimal)

कोई इकाई पहली बार टूटी है तो उसके दस छोटे हिस्सों (दशांश) को हम भिन्न के रूप में $1/10$ लिख सकते हैं। यदि इस दशांश को भी और छोटे हिस्सों में तोड़ने की आवश्यकता पड़ रही है तो हमें इसके और भी छोटे दस हिस्से करने होंगे। इस तरह यह मूल इकाई के दसवें भाग का भी दसवाँ भाग है। हम कह सकते हैं कि यह इकाई का शतांश या $1/100$ है।

सरल शब्दों में कहें तो 5 इकाइयों को 2 बराबर हिस्सों में बाँटने के लिए 4 इकाइयों को पूरा-पूरा बाँटा जा सकेगा। इस तरह 1 इकाई शेष (remainder) बच जाती है। लेकिन यदि इस अंतिम बची इकाई को भी बाँटना है तब हमें उसके 10 बराबर हिस्से करने होंगे। ये हिस्से इकाई से भी छोटे हैं। अतः इन्हें हम दशांश या दसवाँ हिस्सा कहेंगे।

1 इकाई के टूटने से 10 दशांश प्राप्त हुए हैं। इन्हें दो बराबर हिस्सों में बाँटा जा सकता है। प्रत्येक हिस्से में 5 दशांश आएंगे। हम कह सकते हैं कि 5 इकाइयों को 2 बराबर हिस्सों में बाँटने पर प्रत्येक हिस्से में 2 पूर्ण इकाई और 5 दशांश आएंगे। इस तरह $5 \div 2 = 2.5$ हुआ।

$$5 \div 2$$

$$2 \overline{) 5} \begin{array}{r} 2 \\ - 4 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$2 \overline{) 5} \begin{array}{r} 2.5 \\ - 4 \\ \hline 10 \\ - 10 \\ \hline X \end{array}$$

2.8.5 पूर्ण संख्याएँ और एक पूर्ण का भाग

स्थानीय मान के अनुसार जिस तरह इकाइयों और उनके बड़े समूहों (दहाई, सैकड़ा और हज़ार आदि) को लिखने का स्थान निर्धारित है। उसी तरह इकाइयों से छोटे हिस्से यानी दसवाँ भाग, सौवाँ भाग आदि को लिखने के लिए भी स्थान निर्धारित है।

चित्र में हमने संख्याएँ 2537, 5 और 2.5 का उपयोग किया है। दशमलव संख्या पद्धति में स्थानीय मान के नियम के अनुसार हम इन्हें इस प्रकार लिख सकते हैं। संख्या 2.5 में हम 2 और 5 के बीच में एक छोटे-से बिंदु का निशान देख सकते हैं। यह दशमलव का चिह्न है।

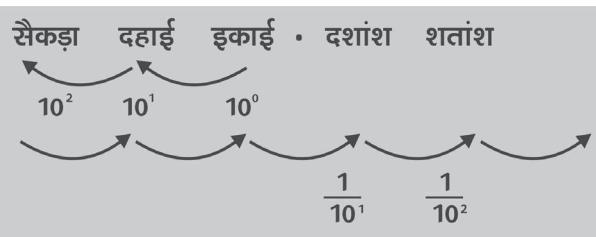
$$10^3 \ 10^2 \ 10^1 \ 10^0 \cdot \frac{1}{10} \ \frac{1}{10^2} \ \frac{1}{10^3} \ \frac{1}{10^4}$$

$$2 \ 5 \ 3 \ 7$$

$$5$$

$$2 \cdot 5$$

दशमलव का चिह्न यह दर्शाता है कि इस चिह्न की बाईं तरफ बढ़ने पर क्रमशः इकाइयाँ, दहाइयाँ, सैकड़े, हज़ार और इससे भी बड़े समूहों के लिए स्थान निर्धारित है। जबकि इसी चिह्न की दाईं तरफ बढ़ने पर क्रमशः दशांश, शतांश और इससे भी छोटे हिस्से प्राप्त होंगे।



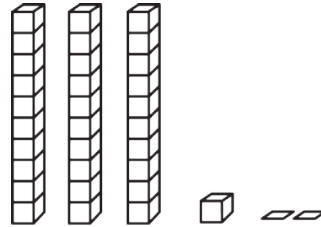
तो इस तरह, यहाँ 2.5 का अर्थ स्थानीय मान के अनुसार 2 पूर्ण इकाइयाँ और 5 दशांश है।

हज़ार	सैकड़ा	दहाई	इकाई	●	इकाई का दसवाँ भाग	इकाई का सौवाँ भाग	इकाई का हज़ारवाँ भाग
2	5	3	7				
			5				
			2	●	5		

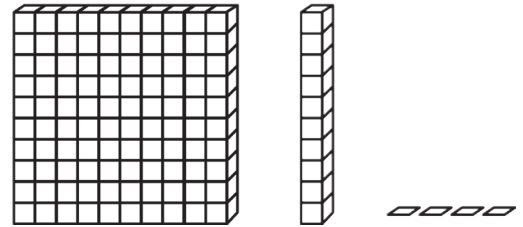
2.8.6 शिक्षण सहायक सामग्री का उपयोग (Use of TLM)

इकाइयों से मिलकर बड़े समूह बनाने और इकाई के टूटने से और भी छोटे हिस्से प्राप्त करने की इस व्यवस्था को हम कुछ ठोस सामग्री (solid materials) की सहायता से समझने का प्रयास करते हैं। इन उदाहरणों में डीन्स ब्लॉक का उपयोग किया गया है।

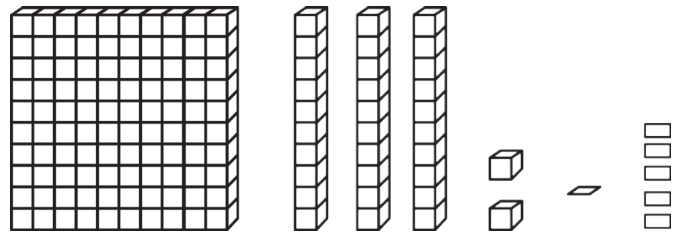
इस चित्र में 3 दहाइयाँ, 1 इकाई और इकाई के दस छोटे हिस्से करने के बाद प्राप्त हुए 2 दशांश प्रदर्शित किए गए हैं। स्थानीय मान के अनुसार यह संख्या 31.2 है।



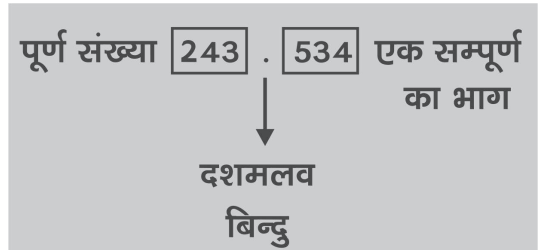
इस चित्र में 1 सैकड़ा, 1 दहाई और 4 दशांश दर्शाए गए हैं। स्थानीय मान के अनुसार यह संख्या 110.4 है।



इस चित्र में 1 सैकड़ा, 3 दहाइयाँ, 2 इकाइयाँ, 1 दशांश और 5 शतांश प्रदर्शित किए गए हैं। दशमिक संख्या पद्धति के अनुसार यह संख्या 132.15 है।



दशमिक संख्या पद्धति की यह व्यवस्था और नियम समझते हुए हम कह सकते हैं कि दशमलव बिंदु की बाईं तरफ पूर्ण संख्या को लिखा जाता है, जबकि दाहिनी तरफ एक पूर्ण के भागों को लिखा जाता है।



इस तरह हम भिन्न संख्याओं से प्राप्त सभी मालाओं (संख्याओं) को दशमिक संख्या के नियमों और दशमलव की अवधारणा का उपयोग करके दशमलव संख्याओं के रूप में लिख सकते हैं। आगे की कक्षाओं में सांत और

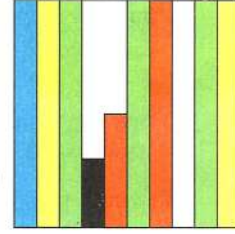
असांत दशमलव की अवधारणाएँ भी आती हैं। लेकिन यहाँ पर हम दशमलव के अंतर्गत प्राथमिक कक्षाओं में अपेक्षित स्तर की अवधारणाओं तक सीमित रहकर बात कर रहे हैं।

2.8.7 दशमलव की समझ बनाने के लिए कुछ अभ्यास (Exercises)

अभ्यास 1: इस अभ्यास में एक वर्गाकार कागज़ की पट्टियों को अलग-अलग रंगों से रंग दिया गया है। भिन्न पर आधारित अभ्यासों में हमने छायांकित हिस्सों को भिन्न संख्या के रूप में लिखने के अभ्यास किए हैं।

रंग बिरंगे डिजाइन

इस कागज़ का कितना भाग नीला है? $\frac{1}{10}$
 इस कागज़ का कितना भाग हरा है? _____
 कौन सा रंग इस कागज़ का 0.2 भाग ढकता है?



अरे, नीले रंग की पट्टी कागज़ की 0.1 हिस्सा है।



गणित का जादू, कक्षा 5, एनसीईआरटी

यहाँ भी हमें रंगे हुए हिस्सों को देखकर भिन्न संख्या लिखनी है।

हम देख सकते हैं कि नीली पट्टी पूरे कागज़ का $\frac{1}{10}$ है। दशमलव संख्या के रूप में यह 0.1 है।

सवाल: हरी पट्टी कुल कागज़ का कितना हिस्सा है?

भिन्न संख्या के रूप में तथा दशमलव संख्या के रूप में

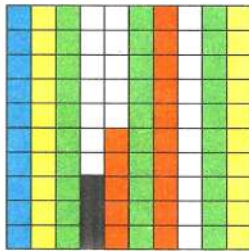
सवाल: पीली पट्टी कुल कागज़ का कितना हिस्सा है?

भिन्न संख्या के रूप में तथा दशमलव संख्या के रूप में

सवाल: लाल पट्टी कुल कागज़ का कितना हिस्सा है?

भिन्न संख्या के रूप में तथा दशमलव संख्या के रूप में

इन सवालों को हल करने में यदि कोई चुनौती आ रही है तो इसका भी समाधान है। हम इस वर्गाकार कागज़ को आड़े में भी दस बराबर



क्या हर खाना कागज़ का $\frac{1}{100}$ भाग है?

कितने नीले खाने हैं? _____

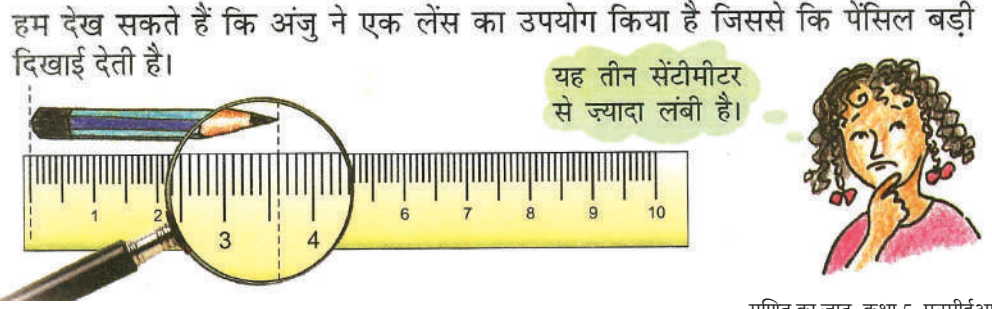
तो क्या नीला हिस्सा $\frac{10}{100}$ है? हमने देखा कि नीला हिस्सा कागज़ के $\frac{1}{10}$ हिस्से के बराबर है। हमने उसे कागज़ का 0.1 भाग लिखा।

गणित का जादू, कक्षा 5, एनसीईआरटी

हिस्सों में बाँट लेते हैं। इस तरह प्रत्येक छोटा खाना शतांश ($\frac{1}{100}$) बन जाएगा। अब हम आसानी से भिन्न संख्या और दशमलव संख्या लिख सकते हैं।

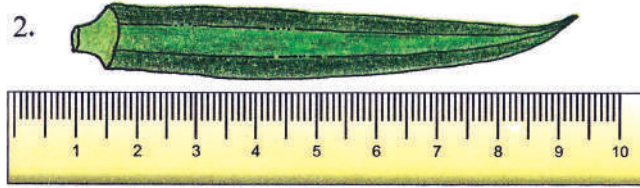
अभ्यास 2: यहाँ अंजू नाम की बालिका एक स्केल का उपयोग करते हुए अपनी पेंसिल की लम्बाई माप रही है। पेंसिल की लम्बाई तीन सेंटीमीटर से कुछ ज़्यादा है। लेकिन कितनी ज़्यादा है?

पेंसिल की लम्बाई को और भी सटीक तरीके से मापने के लिए सेंटीमीटर के और भी छोटे हिस्से करने होंगे। हमारे स्केल में प्रत्येक सेंटीमीटर को उसके और भी छोटे हिस्सों यानी मिलीमीटर के रूप में दर्शाया जाता है। इस तरह हम कह सकते हैं कि अंजू की पेंसिल की लम्बाई 3 सेंटीमीटर और 6 मिलीमीटर है। दशमलव संख्या पद्धति की सहायता से हम इसे 3.6 सेंटीमीटर लिख सकते हैं।



गणित का जादू, कक्षा 5, एनसीईआरटी

सवाल: इस भिंडी की लम्बाई मापो और नीचे दिए स्थान में लिखो। इसे दशमलव के रूप में भी लिखो।



इस भिंडी की लंबाई _____ cm और _____ mm है। हम इसे _____ cm भी लिख सकते हैं।

गणित का जादू, कक्षा 5, एनसीईआरटी

अभ्यास 3: इस चार्ट में कुछ शहरों का तापमान लिखा है। क्या तुम बता सकते हो, इस चार्ट के अनुसार सबसे ज़्यादा गर्म शहर कौन-सा है? और किस शहर में सबसे कम गर्मी है?

नगर	सुबह के 3 बजे का तापमान
चेन्नई	21.1
मुंबई	19.0
तिरुवनंतपुरम	21.6
कोलकाता	13.1
भोपाल	9.8
श्रीनगर	1.3
गुवाहाटी	12.8
जयपुर	10.2

गणित का जादू, कक्षा 5, एनसीईआरटी

2.8.8 बच्चों की सामान्य चुनौतियाँ (Common Challenges of Learners)

- बच्चे भिन्न को दशमलव संख्या में बदलने जैसे कि $\frac{1}{2}$ को 0.5 या $\frac{3}{4}$ को 0.75 लिखने में मुश्किल या बाधा महसूस करते हैं। ऐसा इसलिए भी होता है क्योंकि दशमलव संख्याओं की मात्रात्मक समझ पर बच्चों के साथ काम नहीं होता है।
- बच्चे मानते हैं कि किसी संख्या में दशमलव के बाद जिसमें ज़्यादा अंक आते हैं वो संख्या बड़ी होती है, उस संख्या से जिसमें दशमलव के बाद कम अंक हैं। जैसे कि 0.75 और 0.8 में उनके हिसाब से 0.75 बड़ी संख्या है, क्योंकि उसमें दशमलव के बाद 2 अंक हैं।
- बच्चे यह समझने में कठिनाई महसूस करते हैं कि किसी भी दशमलव संख्या में दशमलव के बाद हम एक-एक अंक करके क्यों पढ़ते हैं। जैसे कि 0.75 को हम पढ़ते हैं— शून्य दशमलव (पॉइंट) सात पाँच। जबकि अधिकांश बच्चे इसे 'शून्य दशमलव पचहत्तर' ही पढ़ते हैं। कुछ बच्चे जो पहले वाले तरीके से पढ़ते भी हैं तो वे यह नहीं बता पाते कि ऐसे क्यों पढ़ रहे हैं।
- दशमलव संख्या को भिन्न संख्या में बदलने में भी बच्चे गलतियाँ करते हैं। जैसे कि 0.7 को $\frac{7}{10}$ में बदलना कैसे होता है, यह वे नहीं समझते हैं। यह ज़्यादा मुश्किल होता है, जब दशमलव के बाद ज़्यादा अंक होते हैं।
- किसी संख्या के दशमलव चिह्न को नज़रअंदाज़ कर उसे पूर्ण संख्या के रूप में समझते हैं।
- कुछ बच्चे दशमलव के आगे और पीछे लिखी संख्याओं को दो अलग पूर्ण संख्या के रूप में समझ लेते हैं।
- दैनिक जीवन के सन्दर्भ में दशमलव की उपयोगिता को नहीं समझ पाते हैं।
- मापक इकाइयों, जिनमें दशमलव का उपयोग होता है उनसे परिचय नहीं होता है।
- स्थानीय मान की अवधारणा और निर्धारित स्थानों को पूर्ण संख्याओं पर तो लागू कर पाते हैं, लेकिन दशमलव संख्याओं में इसे लागू नहीं कर पाते हैं।



2.8.9 उदाहरणात्मक कार्ययोजना (Illustrative Session Plan)

सत्र	विषय	समय	सामग्री
1	परिचय तथा कक्षा-कक्ष की चुनौतियाँ	2 घंटे	पाठ्यपुस्तक, बोर्ड, प्रोजेक्टर, स्केल, इंच टेप, फीता, तीली, स्ट्रॉ।
2	दैनिक जीवन में दशमलव की आवश्यकता और स्थानीय मान की व्यवस्था	3 घंटे	फीता, स्केल, तराजू, बाट, लीटर व मिलीलीटर के मापक उपकरण, खिलौना नोट और सिक्के, तीली, स्ट्रॉ। मापन के पाठों में से चयनित गतिविधियाँ।
3	भाग की अवधारणा से भिन्न और दशमलव का सम्बन्ध	3 घंटे	डीन्स ब्लॉक, तीली-बण्डल, भिन्न चकती, चार खाने वाली कॉपी, तीली, स्ट्रॉ, स्केल, इंच टेप, लीटर व मिलीलीटर के मापक उपकरण।
4	दैनिक जीवन में दशमलव के उपयोग से सम्बंधित सवाल	2 घंटे	पाठ्यपुस्तक, डीन्स ब्लॉक, भिन्न चकती, चार खाने वाली कॉपी, स्केल, इंच टेप, लीटर व मिलीलीटर के मापक उपकरण।



2.8.10 अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)

कक्षा-कक्ष में दशमलव की अवधारणा पर आधारित काम निम्न प्रक्रियाओं के अनुसार किया जाना अपेक्षित है। ये प्रक्रियाएँ उन्हीं सात अवलोकन क्षेत्रों पर आधारित हैं जिनके बारे में हमने अध्याय एक में बात की है। शिक्षकों के साथ दशमलव की अवधारणा पर किए जाने वाले काम का आधार भी यही प्रक्रियाएँ होंगी।






अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)- दशमलव

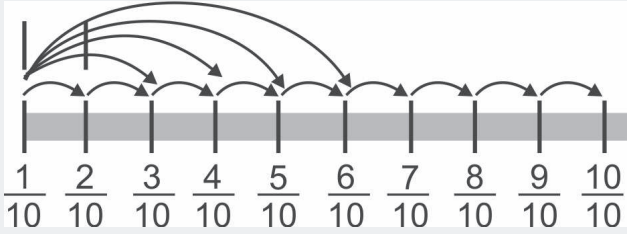
1. दैनिक जीवन से जुड़े सन्दर्भों के माध्यम से दशमलव से परिचय करवाते हैं। उदाहरण के लिए- दवाइयों के पैकेट पर लिखे हुए दाम या नोटबुक के पीछे लिखा साइज़ या मूल्य बताते।
2. स्थानीय मान की समझ को आगे बढ़ाते हुए दशमलव के बाद के स्थान का मतलब और मान समझाते हैं।
3. शिक्षण प्रक्रिया के दौरान पूर्व-अवधारणाओं से जोड़कर दशमलव की समझ विकसित करते हैं। जैसे- नापने की समझ, भिन्न की समझ का दशमलव के महत्त्व को समझने में इस्तेमाल करना।
4. शिक्षण प्रक्रिया के दौरान गतिविधियों के क्रम को ध्यान में रखते हैं। जैसे-
 - स्थानीय मान की गतिविधि से शुरू करना
 - दशमलव संख्या की ज़रूरत वाली गतिविधि
 - दशमलव संख्या लिखने के लिए मॉडल पर गतिविधि
 - दशमलव संख्या में मापन एवं मुद्रा के संदर्भ में गतिविधि
5. भिन्न संख्या को दशमलव संख्या व दशमलव संख्या को भिन्न संख्या में कैसे बदलते हैं, इस पर अलग-अलग उदाहरण लेकर बच्चों के साथ काम करते हैं।
6. दशमलव संख्याओं में तुलना करने के अलग-अलग तरीकों पर बातचीत करते हैं।
7. दशमलव से जुड़े कक्षा स्तरीय सीखने के प्रतिफल व ELPS के अनुसार पाठ योजना बनाते हैं।
8. दैनिक शिक्षण योजना में आकलन को शामिल करते हैं।
9. आकलन के लिए गतिविधियों, मौखिक कार्य एवं लिखित कार्य का उपयोग करते हैं।
10. पाठ्यपुस्तक में दिए गए सवालों के साथ-साथ नए सवाल भी बनाते हैं।
11. शिक्षार्थियों को अपने द्वारा दिए गए उत्तर के पीछे का तर्क देने के लिए प्रोत्साहित करते हैं।
12. आकलन के आधार पर शिक्षार्थी की आवश्यकता की पहचान करते हैं।
13. आकलन के परिणामस्वरूप अपनी योजना व तरीकों में आवश्यकतानुसार बदलाव करते हैं।



2.8.11 उदाहरणात्मक पाठ योजना (Illustrative Lesson Plan)

दशमलव- कक्षा 5 पर आधारित

टॉपिक	उद्देश्य	समय	प्रक्रिया
दशमलव की शुरुआती समझ	<p>इस पाठ योजना पर काम करने के बाद बच्चे निम्न बिंदुओं पर अपनी समझ बना पाएंगे:</p> <ul style="list-style-type: none"> दशमलव संख्या की संरचना को समझ पाएंगे और दशमलव के प्रदर्शन के लिए उपयुक्त चित्र/निरूपण/मॉडल बना पाएंगे। 	3 कालांश	<p>स्थानीय मान (पूर्व-ज्ञान) पर कार्य आवश्यक सामग्री- कार्यपत्रक (स्थानीय मान पर आधारित)। प्रक्रिया-</p> <ol style="list-style-type: none"> प्रत्येक बच्चे को एक कार्यपत्रक दिया जाएगा, जिसमें कुछ इस तरीके के सवाल हों। 3 सैकड़े, 2 दहाई और 4 इकाई से बनने वाली संख्या लिखो। 3 सैकड़े और 2 इकाई से बनने वाली संख्या लिखो। 3 दहाई और 1 इकाई से बनने वाली संख्या लिखो। चित्र में कितने चॉकलेट हैं?  <ol style="list-style-type: none"> प्रत्येक बच्चे के कार्यपत्रक का अवलोकन किया जाएगा कि बच्चे सही तरीके से हल कर पा रहे हैं कि नहीं। ज़रूरत पड़ने पर बच्चों के साथ स्थानीय मान की समझ के ऊपर बात की जाएगी। <p>दशमलव संख्या की ज़रूरत पर कार्य आवश्यक सामग्री- 10 खंड वाले चॉकलेट मॉडल या 10 बिस्कुट के पैकेट के चित्र। प्रक्रिया-</p> <ol style="list-style-type: none"> निम्न तरीके के चित्र बोर्ड पर बनाकर सवाल किए जाएंगे, जैसे- नीचे बने चॉकलेट की संख्या को कैसे लिखेंगे?    

टॉपिक	उद्देश्य	समय	प्रक्रिया									
			<p>2. बच्चों को अपने-अपने तरीके से जवाब देने का मौका दिया जाएगा। उसके बाद बच्चों से कुछ ऐसे सवाल पूछे जाएंगे- पूरे चॉकलेट कितने हैं? बाकी हरेक छोटा टुकड़ा एक चॉकलेट के कितने हिस्से के बराबर है? सभी चॉकलेट की मात्रा को संख्या में कैसे लिखेंगे?</p> <p>3. इस सवाल-जवाब के बाद बच्चों को इस चिह्न ‘.’ से अवगत करवाया जाएगा। इसका इस्तेमाल करते हुए पूर्ण और हिस्से को अलग किया जा सकता है। इस चिह्न की सहायता से चित्र में दिए गए चॉकलेट की मात्रा को 2.6 लिख सकते हैं, ये बताया जाएगा।</p> <p>दशमलव संख्या लिखने पर कार्य आवश्यक सामग्री- दो अलग-अलग साइज़ के स्ट्रॉ, जिसमें बड़ी स्ट्रॉ छोटी वाली से 10 गुनी हो, 10×10 का ग्रिड पेपर। प्रक्रिया- गतिविधि एक:</p> <ul style="list-style-type: none"> हर बच्चे के लिए एक जोड़ी स्ट्रॉ (बड़ी वाली स्ट्रॉ छोटी स्ट्रॉ से 10 गुनी होगी) बनाकर बाँट दें। बड़ी वाली स्ट्रॉ छोटी वाली स्ट्रॉ से कितनी गुनी है? एक बड़ी वाली स्ट्रॉ से कितनी छोटी वाली स्ट्रॉ बनाई जा सकती हैं? छोटी वाली स्ट्रॉ बड़ी स्ट्रॉ का कौन-सा हिस्सा है? बच्चे अपनी डेस्क की लंबाई को बड़ी स्ट्रॉ से नापते हैं। (अगर डेस्क नहीं है तो धागे दिए जा सकते हैं।) बचे हुए हिस्से को छोटी स्ट्रॉ से नापते हैं। 									
			<ul style="list-style-type: none"> धागों की माप को निम्न टेबल में नोट भी करते जाने के लिए कहें: <table border="1" data-bbox="774 1854 1364 2027"> <thead> <tr> <th>बड़ी स्ट्रॉ</th> <th>छोटी स्ट्रॉ</th> <th>संख्या</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>3</td> <td>4</td> <td>3.4</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	बड़ी स्ट्रॉ	छोटी स्ट्रॉ	संख्या	3	4	3.4			
बड़ी स्ट्रॉ	छोटी स्ट्रॉ	संख्या										
3	4	3.4										

टॉपिक	उद्देश्य	समय	प्रक्रिया
			<p>गतिविधि दो:</p> <ul style="list-style-type: none"> प्रत्येक बच्चे को 10×10 का ग्रिड पेपर दिया जाएगा। उसके $1/10$ भाग को छायांकित करने के लिए कहा जाए। इसके बाद दशमलव का इस्तेमाल करते हुए उसे संख्या में कैसे लिखा जा सकता है, इस पर बच्चों से बात करेंगे। ऐसे ही 10×10 के ग्रिड पेपर के 1 खाने को दिखाकर पूछा जाए, यह पूरे पेपर का कौन-सा हिस्सा है? और दशमलव का इस्तेमाल करते हुए इसे कैसे लिखेंगे? ग्रिड पेपर के अलग-अलग हिस्से को छायांकित करके उसको दशमलव का इस्तेमाल करते हुए संख्या में लिखने के लिए प्रोत्साहित किया जाएगा। और इसी तरह दशमलव संख्या को ग्रिड पेपर में निरूपित करने के लिए कहा जाएगा।



2.8.12 कार्यपत्रक (Worksheets)

प्रश्न 1. इन भिन्न संख्याओं को दशमलव संख्या में बदलो।

(क) $1/2$ (ख) $11/2$ (ग) $5\frac{1}{4}$ (घ) $276\frac{1}{4}$

प्रश्न 2. इन दशमलव संख्याओं को भिन्न संख्या में बदलो।

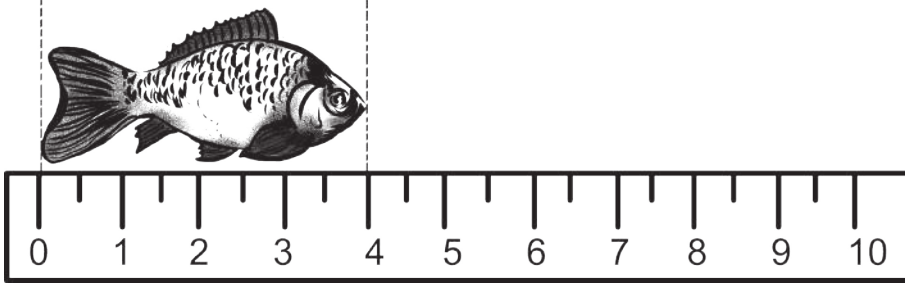
0.35, 0.08, 6.70, 2.5

प्रश्न 3. हम जानते हैं कि 1 रुपये में 100 पैसे होते हैं। इस जानकारी का उपयोग करते हुए मिलान करो।

$\frac{1}{2}$ रुपया	5 पैसे	0.75 रुपया
$\frac{1}{10}$ रुपया	25 पैसे	0.50 रुपया
$\frac{5}{100}$ रुपया	99 पैसे	0.05 रुपया
$\frac{3}{4}$ रुपया	50 पैसे	0.10 रुपया
$\frac{99}{100}$ रुपया	75 पैसे	0.25 रुपया
$\frac{1}{4}$ रुपया	10 पैसे	0.99 रुपया

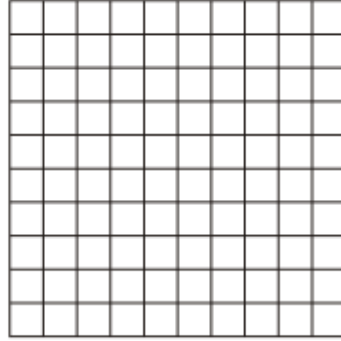
गणित का जादू, कक्षा 5, एनसीईआरटी

प्रश्न 4. इस मछली की लम्बाई को भिन्न संख्या तथा दशमलव संख्या के रूप में लिखो।



खुशी-खुशी, कक्षा 5, एकलव्य

प्रश्न 5. इस वर्ग का 0.78 भाग लाल रंग से रंगो।



खुशी-खुशी, कक्षा 5, एकलव्य

प्रश्न 6. रामू के पास 5 रुपये और 50 पैसे थे। बाज़ार जाकर रामू ने 2 रुपये और 75 पैसे की जलेबी खरीदी। अब उसके पास कितने रुपये और पैसे बचे?

प्रश्न 7. हलीम के पास 3 रुपये और 25 पैसे थे। अनवर ने उससे कहा कि मेरे पास तुमसे 2 रुपये 60 पैसे अधिक हैं। बताओ, अनवर के पास कितने रुपये और पैसे थे?

प्रश्न 8. खाली बॉक्स में दशमलव संख्या का उपयोग कर मीटर में लिखो।

3 मीटर 45 सेंटीमीटर	<input type="text"/>	मीटर
99 सेंटीमीटर	<input type="text"/>	मीटर
1 मीटर और 5 सेंटीमीटर	<input type="text"/>	मीटर

अतिरिक्त अध्ययन सामग्री (Additional Reading Resources)

1. आलेख: दशमलव भिन्न पढ़ाना— टीचर्स ऑफ इंडिया, अज़ीम प्रेमजी फाउंडेशन
2. पुलआउट: भिन्न संख्या— लर्निंग कर्व, अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी

अध्याय 3- शिक्षकों के साथ काम की योजना

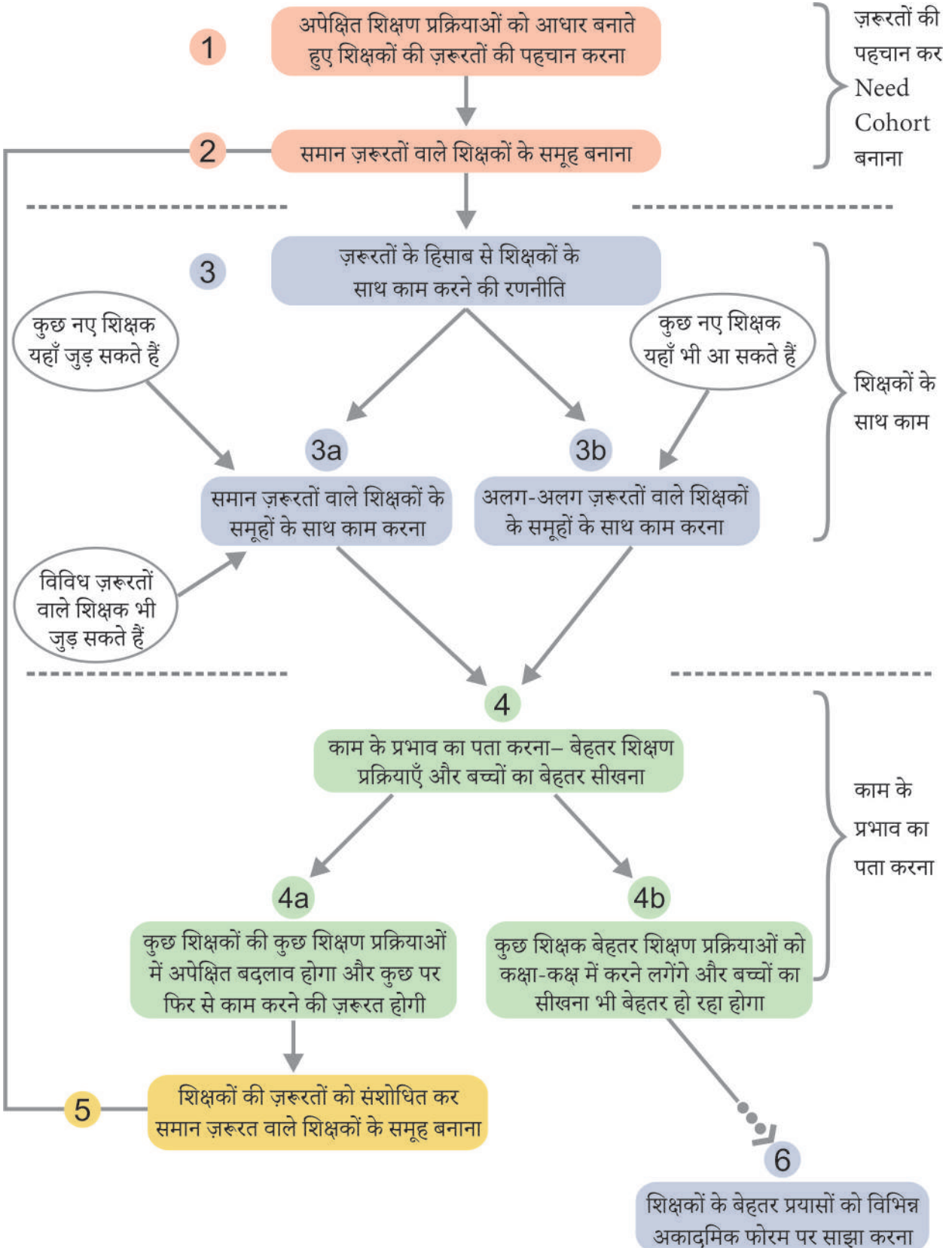
इस अध्याय से हम निम्न बातों को जान और समझ रहे होंगे-

- शिक्षकों के साथ हमारे काम के मार्गदर्शक सिद्धांत क्या हैं?
- शिक्षकों के साथ हमारे काम का प्रवाह क्या है? प्रवाह के प्रत्येक चरण को जान और समझ रहे होंगे:
 - शिक्षकों की ज़रूरतों की पहचान कर समान ज़रूरत वाले शिक्षकों के समूह बनाना
 - समान ज़रूरतों वाले शिक्षकों के साथ काम की रणनीति
 - विविध ज़रूरतों वाले शिक्षकों के साथ काम की रणनीति
 - शिक्षकों के साथ हमारे काम के प्रभाव को कैसे जानें और समझें
 - शिक्षकों के साथ हमारे काम के फलस्वरूप बच्चों के सीखने के स्तर को कैसे जानें और समझें

3.1 शिक्षकों के साथ काम के मार्गदर्शक सिद्धांत

- बच्चों के बेहतर सीखने के लिए जब हम शिक्षकों के साथ काम करते हैं तो यह बहुत महत्वपूर्ण हो जाता है कि हमें शिक्षकों को आने वाली चुनौतियों और कठिनाइयों के प्रति आदर और संवेदनशीलता का भाव रखना चाहिए। जिससे कि वे सहजता के साथ हमसे जुड़कर काम करें।
- शिक्षकों के साथ लगातार काम करते हुए यह समझ बनती है कि हमें उनकी विशिष्ट ज़रूरतों पर काम करने की ज़रूरत है, न कि सभी के साथ एक जैसा काम किया जाए, चाहे वो किसी की ज़रूरत हो या न हो। लेकिन यदि हमें शिक्षकों की बड़ी संख्या के साथ काम करना है तो हमें यह भी पता है कि एक-एक शिक्षक के साथ उनकी ज़रूरतों पर काम नहीं कर सकते हैं। इसलिए यह ज़रूरी हो जाता है कि हम शिक्षकों के ऐसे समूह बनाएँ जिनकी कुछ मिलती-जुलती-सी ज़रूरतें हों। और हम उनके साथ समूहों में उनकी ज़रूरतों पर काम कर पाएँ। शिक्षकों के ऐसे समूह जिनकी लगभग समान ज़रूरतें हों, को हम Need Cohort कहेंगे। ये need cohort भी गतिशील (dynamic) होंगे। मतलब कि जिन ज़रूरतों को ध्यान में रखकर उनका समूह बनाया गया था, उन पर उनके साथ काम किया जाएगा। उसके बाद जो भी शिक्षक उस समूह में थे, वो आगे अपनी ज़रूरत के हिसाब से किसी और need cohort का हिस्सा हो सकते हैं।
- एक और समझ है कि केवल एक बार किए गए काम से हमें कक्षा-कक्ष प्रक्रियाओं या बच्चों के सीखने के स्तर में बहुत कुछ फ़र्क नहीं दिखता है। इसके लिए हमें योजनाबद्ध तरीके से सतत और सघन रूप से काम करने की ज़रूरत है। यह योजना 3-4 माह की हो सकती है, जिसमें कि उद्देश्यों की स्पष्टता हो कि हमें क्या प्राप्त करना है, शिक्षकों की क्या ज़रूरतें हैं, और उन पर काम कैसे होगा।

3.2 काम का चरणबद्ध प्रवाह



- लगातार काम करने के साथ-साथ हमें अपने काम के प्रभाव का आकलन करने की भी ज़रूरत है। जिससे कि यह पता चलता रहे कि हमें अपनी योजना में कहाँ सुधार करने की आवश्यकता है।

3.2.1 ज़रूरतों की पहचान कर Need Cohort बनाना

चरण 1: अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाओं को आधार बनाते हुए शिक्षकों की ज़रूरतों की पहचान करना—

गणित विषय की प्रकृति को ध्यान में रखते हुए हमने प्रत्येक विषयवस्तु के लिए गणित शिक्षण की अपेक्षित प्रक्रियाएँ कैसी हों और क्या होनी चाहिए, इसे चिह्नित कर लिया है। ये बहुत ही स्पष्ट और परिचायक (indicative) हैं, जिनको गणित शिक्षण में किसी भी शिक्षक द्वारा प्रदर्शित किया जाना चाहिए। इन चिह्नित प्रक्रियाओं को किसी के भी द्वारा कक्षा-कक्ष का अवलोकन करते हुए हाँ या नहीं में बताया जा सकता है कि कोई प्रक्रिया कक्षा में की जा रही थी या नहीं की जा रही थी। किसी शिक्षक के लिए जिन प्रक्रियाओं के सामने 'नहीं' होगा, वही प्रक्रियाएँ उस शिक्षक की ज़रूरतों को परिलक्षित (reflect) करेगी। उदाहरण के लिए अगर हम संख्या-पूर्व अवधारणाओं और गिनने को देखें:

हमारे सात अवलोकन क्षेत्र वही होंगे जिनके बारे में हमने पहले अध्याय में भी चर्चा की है:

1. अवधारणा का अर्थ और उसका संदर्भ (Meaning of concept and its context)— शिक्षण प्रक्रिया में ठोस वस्तुओं व बच्चों के सन्दर्भों को शामिल करना। संदर्भों और दैनिक जीवन की स्थितियों से अवधारणा के मायने/मायनों पर समझ बनाने का काम करना।
2. अवधारणा की क्रमबद्धता (Hierarchy of concepts)— एक अवधारणा की समझ दूसरी अवधारणा/ओं की समझ के माध्यम से बनाने की प्रक्रिया को अपने शिक्षण में शामिल करना।
3. शिक्षण अधिगम सामग्री/मॉडल/निरूपण (Teaching learning material/Models/Representation) — शिक्षण अधिगम सामग्री (TLM) के महत्त्व को समझना, उसका उपयोग किसी अवधारणा को बेहतर समझने या अभ्यास में कैसे मदद करता है, यह समझना। किस अवधारणा के लिए स्तर अनुसार क्या उचित सामग्री होगी इसका चयन ठीक से हो। यह भी समझना कि सामग्री केवल साधन मात्र है और उसे बच्चों को इसके माध्यम से अवधारणा का ज्ञान या अभ्यास कराते हुए अमूर्त तक ले जाना होगा।
4. स्तर अनुसार सीखने के प्रतिफल (Grade appropriate learning outcomes)— गणित के उच्च लक्ष्यों को प्राप्त करने हेतु सीखने के प्रतिफलों पर केन्द्रित शिक्षण प्रक्रियाएँ करना।
5. गणित पढ़ाने के उच्चतर लक्ष्य और उद्देश्य (Higher aims and objectives of teaching Mathematics)— बच्चों में कौशलों का विकास करना है जैसे कि अनुमान लगाना, पैटर्न को समझकर सामान्यीकरण करना, तर्क गढ़ना, मानस चित्रण (visualization) आदि। इस समझ को शिक्षण प्रक्रिया में शामिल करना।
6. गणित विषय की प्रकृति को समझते हुए अपनी शिक्षण प्रक्रियाओं का चयन करते हैं (Understands the nature of Mathematics and designs the pedagogy accordingly)— शिक्षणशास्त्रीय सिद्धांतों की समझ एवं उनका गतिविधियों के बनाने और चयन में उपयोग करना। ये समझना कि प्राथमिक स्तर पर ठोस (concrete) से शुरू करते हुए फिर अर्द्ध-मूर्त (semi-concrete) और फिर अमूर्त (abstract) तक बच्चों को ले जाना होता है।

7. आकलन (Assessment)– आकलन के विभिन्न तरीकों, जैसे गृहकार्य, वर्कशीट, प्रोजेक्ट आदि का प्रयोग शिक्षण प्रक्रिया के हिस्से के तौर पर करना। साथ ही किए गए आकलन की समीक्षा कर अपनी सीखने-सिखाने की प्रक्रियाओं में यथोचित बदलाव करना।

अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)- संख्या-पूर्व अवधारणाएँ और गिनना	हाँ/नहीं
बड़ा-छोटा, मोटा-पतला, एक-एक मिलान आदि के लिए दैनिक जीवन की घटनाएँ, पालों अथवा वस्तुओं का उपयोग करते हैं।	
संख्या की ऐसी परिस्थिति बनाते हैं, जहाँ पर संख्यात्मक रूप से तुलना करने की ज़रूरत पड़े। उदाहरण के लिए मेले से दो अलग-अलग कीमत के खिलौने को महंगा और सस्ता खिलौना बताना।	
समूह में गिनने के लिए दी गई चीजों के चित्र को किसी संदर्भ के साथ जोड़ते हैं। उदाहरण के लिए 12 चिड़ियों के चित्र को दो-दो के समूह बनाकर गिनने के लिए किसी कहानी के माध्यम से बताते हैं।	
दैनिक जीवन के संदर्भों जैसे कि कंकड़/पत्थर गिनवाना, कुर्सी/टेबल, घंटी आदि को लेकर गिनने की प्रक्रिया पर काम करते हैं।	
संख्या-पूर्व अवधारणाएँ, जैसे कि एक-एक की संगति, क्रम, छॉटना और तुलना का उपयोग करते हुए गिनने की प्रक्रिया पर समझ बनाने का काम करते हैं।	
गिनवाते हुए एक-एक की संगति और संख्या नाम की क्रमबद्धता की समझ को प्रक्रिया में शामिल करते हैं।	
मात्रा की समझ को विकसित करने के लिए चीजों को देकर पूछते हैं कि यह कितनी हैं या संख्या बोलकर उस संख्या के बराबर चीजों को उठाने के लिए कहते हैं।	
गिनती पढ़ाते हुए इस तरह के संदर्भों का भी इस्तेमाल करते हैं जिनको गिनने के लिए छूने की ज़रूरत न पड़े। उदाहरण के लिए घंटी की आवाज गिनने के लिए कहना, धड़कन गिनने के लिए कहते हैं।	
दो या दो से ज्यादा संख्याओं को बड़ा, छोटा, बढ़ते हुए या घटते हुए क्रम में लिखने के लिए कहते हैं।	
उपयुक्त मात्रा में चीजों के चित्र लेकर उनको समूहों में जैसे दो-दो के, तीन-तीन आदि के समूहों में गिनने के लिए कहते हैं।	
संख्या-पूर्व अवधारणाओं, जैसे अनुक्रम बनाना, तुलना करना, एक-एक की संगति के लिए दैनिक जीवन की चीजों से शुरू कर गणितीय वस्तुओं जैसे गोला, घन, घनाभ को शामिल करते हैं।	
गणितीय निरूपण, जैसे आयत, वर्ग, वृत्त को बनाकर उस पर संख्या-पूर्व अवधारणाओं जैसे अनुक्रम बनाना, तुलना करना, एक-एक की संगति के काम करवाते हैं।	
गिनमाला पर मोती गिनना, तुलना करना, समूह में गिनने और संख्या कार्ड को क्रम में लगाने का काम करवाते हैं।	
संख्या की मात्रात्मक समझ के लिए दस बिंदी वाले बिंदी के पत्ते के चित्र बनाकर काम करवाते हैं। उदाहरण के लिए संख्या के संबंध, जैसे कोई भी संख्या पिछली संख्या से 1 ज्यादा है या 10 कितने तरह से बन सकता है।	
संख्या रेखा पर संख्या को दर्शाना, तुलना करवाना, समूह में गिनने और क्रम में लगाने पर काम करते हैं।	

अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)- संख्या-पूर्व अवधारणाएँ और गिनना	हाँ/नहीं
गिनती के स्तरवार सीखने के प्रतिफलों को जानते हैं और उसी के आधार पर स्तरानुरूप गतिविधियाँ बनाते हैं।	
संख्या के संबंधों पर काम करते हैं। पैटर्न, ज्यामिति आदि पढ़ाते हुए भी गिनने का काम करवाते हैं।	
गिनती पर काम करते हुए संख्याओं का अनुमान लगाने के अवसर देते हैं।	
संख्या के पैटर्न बनाकर उसको आगे बढ़ाने के लिए कहते हैं।	
संख्या के पैटर्न बनाकर पैटर्न के नियम को बोलने के लिए कहते हैं।	
संख्या के संबंधों पर सोचने के लिए कहते हैं। उदाहरण के लिए, जैसे- 10, संख्या 8 से 2 ज़्यादा है। ऐसे ही 14 किस संख्या से 2 ज़्यादा है?	
ELPS की समझ के अनुसार शिक्षण करते हैं। जैसे कि: <ul style="list-style-type: none"> ○ ठोस वस्तुओं (कंकड़/बीज... आसानी से मिलने वाली चीज़ों) के साथ अनुभव ○ बोलकर अनुभवों के बारे में बताना यानी भाषा का उपयोग (जैसे मात्रा के साथ संख्या नाम को जोड़ना) ○ इसी प्रकार के कार्यों को फिर चित्रों के साथ करना या चित्रात्मक प्रस्तुति करना ○ प्रतीकों का प्रयोग (संख्यांक एवं संख्या नाम की पहचान और लिखना) 	
ठोस वस्तुओं का इस्तेमाल करते हुए चित्रों पर और फिर चिह्नों की तरफ बढ़ते हैं। जैसे कि कंकड़/पत्थर गिनवाना, फिर चित्र गिनवाना और फिर अमूर्त प्रतीक चिह्नों (संख्या चिह्न) को देखकर मात्रात्मक समझ पर जाते हैं।	
उपयुक्त सहायक सामग्री, जैसे कि पहले खुली ठोस वस्तुएँ, फिर कुछ बंधी सामग्री (गिनमाला), फिर कुछ चित्रों से गिनवाना और फिर अमूर्त में समझ बनाने पर काम करते हैं।	
गिनने की समझ पर काम करते हुए ही ये जाँचना कि बच्चों को कहाँ गिनने में परेशानी आ रही है, जैसे कि बच्चे गिनने के मुख्य तीन पहलुओं को ठीक से समझ पाए हैं या नहीं। क्या वे एक संख्या नाम के साथ या तो वस्तु को छोड़कर या ज़्यादा वस्तुओं को तो नहीं गिन रहे हैं। संख्या नाम बोलने में क्रम है कि नहीं, इन बातों को प्रक्रिया के दौरान ही जाँचते हैं।	
आकलन के विभिन्न तरीकों, जैसे गृहकार्य, वर्कशीट, प्रोजेक्ट आदि का प्रयोग शिक्षण की प्रक्रिया के हिस्से के तौर पर करना।	
पाठ्यपुस्तक के हिस्से पर ज़रूरत के अनुसार वर्कशीट बनाते हैं।	
बच्चों को गणित करने के अपने तर्क को लिखने के लिए देते हैं, उन तरीकों को पढ़ते हैं, उनका विश्लेषण करते हैं और उस पर आधारित पढ़ाने की योजना बनाते हैं।	
गिनने के पाँचों सिद्धांतों की समझ रखते हैं और उन बच्चों की पहचान कर पाते हैं जिन बच्चों को किसी चरण पर दिक्कत आ रही है, उनकी मदद के लिए विशेष योजना बनाते हैं।	
स्कूल के बच्चों के बारे में बता पाते हैं कि किन बच्चों को गिनना ठीक से आता है, कितने बच्चे तुलना कर पाते हैं, कितने बच्चे संख्याओं को क्रम में जमा पाते हैं आदि।	

किसी भी विषयवस्तु के लिए अपेक्षित प्रक्रियाएँ बहुत ही विशिष्ट और सूक्ष्म हैं। इसके लिए हमें कक्षा-कक्ष अवलोकन करना होगा। जिससे कि किसी भी शिक्षक के लिए हम पूरे विश्वास के साथ कह पाएँ कि वह किसमें बेहतर कर रहा है और किसमें नहीं। कई बार ऐसा होता है कि जब हम किसी शिक्षक की कक्षा में जाते हैं, उस समय वह अपनी नियमित कक्षा नहीं पढ़ा रहे होते हैं। ऐसे ही कुछ शिक्षक हमें ज़ोर देते हैं कि हम एक डेमो करके दिखाएँ। या फिर वो हमारे साथ बैठते हैं और चाहते हैं कि हम उन्हें कुछ बताएँ। हम शिक्षकों को पढ़ाने के लिए प्रोत्साहित तो कर सकते हैं, लेकिन इस पर हमारा बहुत नियंत्रण नहीं होता है। कक्षा-कक्ष प्रक्रियाओं का अवलोकन करने के लिए कुछ सुझाव:

- शिक्षक की कक्षा में जाना—
 - शिक्षक के पढ़ाने के दौरान प्रक्रियाओं को देखना
 - बच्चों से बातचीत करते हुए पता लगाने की कोशिश करना
- शिक्षकों के साथ अनौपचारिक बातचीत में वे बहुत सहज होकर अपने अनुभव साझा करते हैं। जिसके ज़रिए हम उनके द्वारा अपनाई जा रही प्रक्रियाओं के बारे में जान सकते हैं। यदि इन अनौपचारिक बातचीत को हम थोड़ा व्यवस्थित और उद्देश्य के साथ करें तो इसके ज़रिए भी शिक्षक द्वारा की जा रही प्रक्रियाओं को बेहतर समझा जा सकता है।
- शिक्षकों की कक्षा-कक्ष प्रक्रियाओं पर चर्चा के लिए संगोष्ठी भी एक अच्छा मंच होती है। क्योंकि ऐसे मंच पर शिक्षक खुद से चुनाव करता है कि वह अपने उन नवाचारों / नए विचारों को जो कि उसने कक्षाओं में खुद करके देखे हैं और परिणाम भी मिला है, उन्हें अन्य शिक्षक साथियों, शिक्षा अधिकारियों आदि के साथ प्रस्तुत/साझा करे। शिक्षक द्वारा प्रस्तुति के बाद संवाद और प्रश्नों पर चर्चा करते हुए उनके पीछे के सिद्धांतों को समझना, जिसके परिणामस्वरूप बच्चों के सीखने के स्तर में सकारात्मक वृद्धि हुई हो।

चरण 2: समान ज़रूरतों वाले शिक्षकों के समूह बनाना।

किसी विषयवस्तु के लिए दी गई अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाओं की सूची के अनुसार अवलोकन के आधार पर हम हाँ या नहीं में उनके बारे में तय कर लें। समान ज़रूरतों वाले शिक्षकों का समूह बना लें। फिर हम ऐसे समूह या समूहों के साथ कुछ सत्र या सत्रों की एक शृंखला में काम कर सकते हैं।

उदाहरण के लिए, स्थानीय मान पढ़ाने में ऐसी 20 अपेक्षित प्रक्रियाएँ हैं जो बच्चों के सीखने के लिए करने बेहद ज़रूरी हैं। लेकिन हमें लगता है कि ऐसे 20 शिक्षक हैं जो इनमें से 12 प्रक्रियाएँ अपनी कक्षा में नहीं करते हैं और उन पर उनके साथ काम करने की आवश्यकता है। ऐसे समूह को हम need cohort कहेंगे।

नोट:

1. Need cohort गतिशील (dynamic) प्रकृति के होंगे। इसका मतलब है कि हम विशिष्ट/समान ज़रूरतों के आधार पर समूह बनाकर उनके साथ करेंगे, उन्हें ट्रैक करेंगे और नई/संशोधित ज़रूरतों के आधार पर उन्हें किसी अन्य समूह का हिस्सा बना रहे होंगे।
2. एक शिक्षक एक समय में एक से अधिक need cohort का हिस्सा हो सकता है। हम उसके साथ दो अलग-अलग need cohort में काम कर सकते हैं। या हम प्राथमिकता के आधार पर तय कर सकते हैं कि पहले कौन-सा काम करना चाहते हैं।

3.2.2 शिक्षकों के साथ काम की रणनीति

चरण 3: ज़रूरतों के हिसाब से शिक्षकों के साथ काम करने की रणनीति।

चरण 3a: समान ज़रूरतों वाले शिक्षकों के समूहों के साथ काम करना।

आवश्यकता इस बात की है कि शिक्षकों के साथ उनकी विशिष्ट ज़रूरतों पर काम किया जाए, बजाय इसके कि सब के साथ कुछ एक जैसा ही काम हो। इसलिए समान ज़रूरतों वाले शिक्षकों के समूह बनाए जाएँ, जिन्हें हम need cohort कहेंगे। उन ज़रूरतों को ध्यान में रखकर योजनाबद्ध तरीके से सत्र/सत्रों की शृंखला में सतत रूप से काम किया जाए। समान ज़रूरतों वाले शिक्षकों के समूह के साथ कैसे काम किया जाएगा, इसके लिए उदाहरण आगे दिए गए हैं।

नोट: समान ज़रूरतों वाले शिक्षकों का समूह बने, इसके लिए हमें प्रयास करने होंगे। लेकिन फिर भी अगर कुछ शिक्षक ऐसे जुड़ जाते हैं जिनकी ज़रूरतें कुछ भिन्न हैं, उसके लिए भी हमारी तैयारी होनी चाहिए। जिससे कि हम उन्हें चर्चा में शामिल कर सकें और उसे समृद्ध बना सकें।

चरण 3b: अलग-अलग ज़रूरतों वाले शिक्षकों के समूहों के साथ काम करना।

शिक्षकों के साथ काम करने की हमारी रणनीति चरण 3a के अनुसार ही रहेगी। परंतु हमेशा ऐसा हो, यह संभव नहीं हो पाता है। कई बार हमारे पास ऐसा समूह होता है (खास तौर से सरकारी मंचों पर) जिनकी अलग-अलग ज़रूरतें होती हैं। इसलिए हम इसे मिश्रित/विविध ज़रूरतों वाला समूह कहेंगे। इनके साथ हमें शुरू में थोड़ा समय लगाकर कुछ गतिविधियों के माध्यम से पूरे समूह के कुछ छोटे-छोटे उप-समूह बनाने होंगे। इन उप-समूहों में होने वाले शिक्षकों का स्तर लगभग एक जैसा होगा और उनकी ज़रूरतें भी एक जैसी होंगी। इनके साथ कैसे काम किया जाएगा, उसके लिए उदाहरण आगे दिए गए हैं।

3.2.3 समान ज़रूरतों वाले गतिशील Need Cohorts के साथ काम— उदाहरण के लिए

उदाहरण 1

गुणा पर शिक्षकों के साथ कार्य के लिए सुझाव

शिक्षकों को किसी भी कोहर्ट में शामिल करने के लिए आवश्यक है कि:

- उनसे पर्याप्त चर्चा की जाए।
- उनकी कक्षा की सीखने-सिखाने की प्रक्रिया का भी पर्याप्त अवलोकन कर लिया जाए।

इन दोनों के लिए हमारी स्वयं की तैयारी होनी चाहिए। इसके लिए हैडबुक के संबंधित अंशों को पढ़कर आवश्यक समझ बनाना एवं पाठ्यपुस्तक का अध्ययन भी ज़रूरी है। मान लेते हैं कि किसी साथी ने हैडबुक और पाठ्यपुस्तक पर पर्याप्त समझ बना ली है और दी गई अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाओं के आधार पर वे कुछ शिक्षकों के कक्षा कार्य को दर्ज करते हैं।

स्थिति 1-

कुछ शिक्षक ऐसे हैं जिनके लिए अधिकांश शिक्षण प्रक्रियाओं में 'नहीं' दर्ज है। ऐसी स्थिति में उदाहरणात्मक कार्ययोजना- 1 के अनुसार कार्य के लिए विचार किया जा सकता है।

उदाहरणात्मक कार्ययोजना 1:

क्र. सं.	सत्र	विषय	समय	सामग्री
1	कक्षा-कक्ष में गुणा के दौरान बच्चों की चुनौतियाँ	गुणा के सवालों में बच्चों की चुनौतियों को जानना, शिक्षकों के तरीके समझना। पाठ्यपुस्तक के पाठ देखना, सीखने के प्रतिफल से अपेक्षाएँ।	2 घंटे	पाठ्यपुस्तक, सीखने के प्रतिफल, टीएलएम, बच्चों द्वारा हल किए गए सवाल।
2	गुणा के मायने तथा सन्दर्भ	गुणा के मायने तथा सन्दर्भ समझना एवं इन पर आधारित अभ्यास- बार-बार जोड़ना, आयताकार जमावट, मापक, दर, कार्तीय गुणन।	1 घंटा	पाठ्यपुस्तक के पाठ, आलेख- जीरो बनाम कट्टम, टीएलएम, पीपीटी। बच्चों द्वारा हल किए गए सवाल।
3	इबारती सवालों को हल करना और बनाना	बच्चों के परिवेशीय अनुभव व ठोस सामग्री द्वारा गुणा की अवधारणा से परिचय, बार-बार जोड़, संख्या छोड़कर विधि द्वारा गणितीय निरूपण तक पहुँचना, विविध प्रकार के गुणा आधारित अभ्यास। इबारती सवालों पर चर्चा, सवालों को हल करना और विभिन्न संदर्भों के लिए सवाल बनाना।	2 घंटे	पाठ्यपुस्तक के पाठ, कार्यपत्रक।
4	गुणा में क्रम विनिमय, गुणा में साहचर्य नियम तथा गुणा में वितरण नियम	गुणा में क्रम विनिमय, साहचर्य नियम तथा वितरण नियम को समझना व सवाल हल करना, शून्य से अन्य संख्या का गुणा, शून्य से शून्य का गुणा।	2 घंटे	पाठ्यपुस्तक के पाठ, पीपीटी, मोतीमाला, डीन्स ब्लॉक, तीली-बण्डल।
5	गुणा की वैकल्पिक विधियाँ तथा गुणा की मानक विधि	गुणा की वैकल्पिक विधियों से मानक विधि तक पहुँचना।	3 घंटे	पाठ्यपुस्तक के पाठ, पीपीटी, डीन्स ब्लॉक, तीली-बण्डल।
6	नेपियर पट्टी, चाइनीज़ बोन्स और निखिलम विधि को समझना	नेपियर पट्टी, चाइनीज़ बोन्स और निखिलम विधि को समझना तथा इसमें स्थानीय मान की भूमिका समझना।	2 घंटे	पीपीटी, डीन्स ब्लॉक, तीली-बण्डल।
7	सामग्री निर्माण।	द्विआयामी डीन्स ब्लॉक बनाना तथा उपयोग, तीली-बण्डल का उपयोग, सामग्री की सीमाओं को समझना।	3 घंटे	टीएलएम बनाने की सामग्री।

स्थिति 2-

इस हैंडबुक में दी गई अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाओं के आधार पर हमारे साथी कुछ शिक्षकों के कक्षा कार्य को दर्ज करते हैं। कुछ शिक्षक ऐसे हैं जिनके लिए शिक्षण प्रक्रियाओं में निम्नांकित जानकारी दर्ज है:

अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)- गुणा	हाँ/नहीं
ठोस वस्तुओं के द्वारा बराबर मात्रा के समूह बनवाते हैं, जैसे कंकड़, बीज, मोती आदि से 2-2, 3-3 ... के समूह बनवाकर गिनवाते हैं।	हाँ
दैनिक जीवन की स्थितियों से आरंभ कर किसी संख्या को बार-बार जोड़ के रूप में लिखकर जोड़ने के अनुभव देते हैं और इन अनुभवों से 'गुना' या 'बार' जैसी बोलचाल की भाषा से आरंभ कर गुणा के चिह्न से परिचय कराते हैं।	हाँ
ऐसे उदाहरण / सवाल / परिस्थिति बच्चों के सामने रखते हैं जिनमें उन्हें बिना गिने बराबर मात्रा के समूहों में वस्तुओं की संख्या पता लगाने के अवसर हों।	नहीं
'आयताकार जमावट' से सम्बंधित उदाहरणों एवं वस्तुओं से कार्य करवाकर गुणा की अवधारणा समझाते हैं।	नहीं
'आयताकार जमावट' से सम्बंधित उदाहरणों एवं वस्तुओं से कार्य करवाकर गुणा की अवधारणा समझाते हैं।	नहीं
'दर (Rate)' से सम्बंधित उदाहरणों एवं वस्तुओं से कार्य करवाकर गुणा की अवधारणा समझाते हैं।	नहीं
आवश्यकतानुसार 'कार्तीय गुणन' से सम्बंधित उदाहरणों एवं वस्तुओं से कार्य करवाकर गुणा की अवधारणा समझाते हैं।	नहीं
बार-बार जोड़ पर कार्य करवाते हुए गुणा की अवधारणा पर आते हैं।	हाँ
2, 3, 4, 5 तथा 10 के गुणन तथ्य बनवाने तथा दैनिक परिस्थितियों में उनके उपयोग से सम्बंधित कार्य करवाते हैं।	नहीं
गुणा की अवधारणा का उपयोग करते हुए बच्चों से पहाड़े बनवाते हैं।	नहीं
बार-बार जोड़ से गुणा पर जाने के लिए बीज/बटन/कंकड़/पत्तियों आदि सामग्री एवं सम्बंधित चित्रों का उपयोग करते हैं।	हाँ
बीजों/कंकड़ों/डंडियों आदि के उपयोग से पहाड़े बनवाते हैं।	हाँ
सामग्री के उपयोग के साथ कार्यों से ऐसे अवसर बनाते हैं जिससे बच्चे पहाड़ों का अर्थ समझकर स्वयं पहाड़े बना सकें।	नहीं
गुणा के विभिन्न संदर्भों से सम्बंधित दैनिक जीवन की परिस्थितियाँ/समस्याएँ बच्चों के समक्ष रखते हैं।	हाँ
इन परिस्थितियों/समस्याओं पर बच्चों को आपस में चर्चा करने और इनके हल के लिए अपने तर्क रखने के अवसर निर्मित करते हैं।	हाँ
बच्चों द्वारा बताए गए विभिन्न तरीकों को स्वीकार करते हैं।	नहीं
विभिन्न संदर्भों पर आधारित दैनिक जीवन की परिस्थितियों के इबारती सवाल बनवाते हैं।	नहीं

अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)- गुणा	हाँ/नहीं
संख्याओं के पैटर्न को आगे बढ़ाने के लिए तर्क आधारित नियम बनाने एवं प्रस्तुत करने के मौके देते हैं।	हाँ
शिक्षण में ELPS का ध्यान रखते हैं। जैसे: <ul style="list-style-type: none"> ○ ठोस वस्तुओं (कंकड़/बीज... आदि) के साथ गुणा के विभिन्न संदर्भों के अनुभव देते हैं। ○ वस्तुओं के साथ काम करते हुए बोलचाल की भाषा जैसे 'इतनी बार' या 'इतने गुना' आदि का प्रयोग कर गणितीय शब्दावली 'गुणा' से परिचित करवाते हैं। ○ इसी प्रकार के कार्यों को फिर चिह्नों के साथ करना या चित्रात्मक प्रस्तुति करना। ○ प्रतीकों का प्रयोग करते हैं (जैसे गुणा के चिह्न का प्रयोग ऊपर दिए गए कार्य करने के बाद करते हैं)। ○ इसी तरह मानक विधि से सवाल हल कराने के पूर्व ठोस वस्तुओं, चिह्नों पर कार्य कराते हुए वैकल्पिक तरीकों से भी परिचय कराते हैं। 	हाँ हाँ हाँ हाँ नहीं
बच्चों के स्तर को ध्यान में रखते हुए समूह बनाते हैं एवं एक-दूसरे से सीखने के मौके देते हैं।	नहीं
दैनिक शिक्षण योजना में आकलन को शामिल करते हैं।	हाँ
आकलन के लिए गतिविधियों, मौखिक कार्य एवं लिखित कार्य का उपयोग करते हैं।	नहीं
पाठ्यपुस्तक में दिए गए सवाल के साथ-साथ नए सवाल भी बनाते हैं।	नहीं
आकलन के आधार पर बच्चों की आवश्यकता की पहचान करते हैं।	हाँ
आकलन के परिणामस्वरूप अपनी योजना व तरीकों में आवश्यकतानुसार बदलाव करते हैं	नहीं

शिक्षकों के ऐसे समूह के कक्षा अभ्यासों को समझने की कोशिश करें तो मोटे तौर पर प्रतीत होता है कि ये गुणा की कुछ अवधारणात्मक समझ रखते हैं, पर गुणा से संबंधित निम्नांकित समझ नहीं है या कक्षा में उनसे संबंधित अभ्यास बच्चों के साथ नहीं करते हैं।

- गुणा के सभी संदर्भ
- गुणन तथ्य और उन पर कार्य
- विभिन्न तरीकों से गुणा करना एवं बच्चों द्वारा किए गए कार्यों को स्वीकारना
- गणित पढ़ाने के उच्चतर लक्ष्य/उद्देश्य
- आकलन के विविध तरीके

ऐसी स्थिति में उदाहरणात्मक कार्ययोजना 2 के अनुसार कार्य के लिए विचार किया जा सकता है।

उदाहरणात्मक कार्ययोजना 2:

क्र. सं.	सत्र	विषय	समय	सामग्री
1	गुणा के मायने तथा सन्दर्भ	गुणा के मायने तथा सन्दर्भ समझना एवं इन पर आधारित अभ्यास- बार-बार जोड़ना, आयताकार जमावट, मापक, दर, कार्तीय गुणन।	1 घंटा	पाठ्यपुस्तक के पाठ, टीएलएम, पीपीटी।
2	गुणा में क्रम विनिमय, गुणा में साहचर्य नियम तथा गुणा में वितरण नियम	गुणा में क्रम विनिमय, साहचर्य तथा वितरण नियम को समझना व सवाल हल करना।	1 घंटा	पाठ्यपुस्तक के पाठ, पीपीटी, मोतीमाला, डीन्स ब्लॉक, तीली-बण्डल।
3	गुणा की वैकल्पिक विधियाँ तथा गुणा की मानक विधि, नेपियर पट्टी, चाइनीज़ बोन्स और निखिलम विधि को समझना	गुणा की वैकल्पिक विधियों से मानक विधि तक पहुँचना। नेपियर पट्टी, चाइनीज़ बोन्स और निखिलम विधि को समझना तथा इसमें स्थानीय मान की भूमिका समझना। यह भी समझना कि ये तरीके क्यों काम करते हैं।	3 घंटे	पाठ्यपुस्तक के पाठ, पीपीटी, डीन्स ब्लॉक, तीली-बण्डल।
4	सामग्री निर्माण	द्विआयामी डीन्स ब्लॉक बनाना तथा उपयोग, तीली-बण्डल का उपयोग, सामग्री की सीमाओं को समझना।	2 घंटे	टीएलएम बनाने की सामग्री

स्थिति 3-

दी गई शिक्षण प्रक्रियाओं के आधार पर हमारे साथी कुछ शिक्षकों के कक्षा कार्य को दर्ज करते हैं। कुछ शिक्षक ऐसे हैं जो पाठ्यपुस्तक में दिए गए सवालों को करा देते हैं एवं सामग्री का उपयोग भी कभी-कभार कर लेते हैं। ऐसे शिक्षकों द्वारा की जा रही शिक्षण प्रक्रियाओं में निम्नांकित या इससे मिलती-जुलती जानकारी दर्ज हो सकती है:

अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)- गुणा	हाँ/नहीं
ठोस वस्तुओं के द्वारा बराबर मात्रा के समूह बनवाते हैं, जैसे कंकड़, बीज, मोती आदि से 2-2, 3-3 ... के समूह बनवाकर गिनवाते हैं।	हाँ
दैनिक जीवन की स्थितियों से आरंभ कर किसी संख्या को बार-बार जोड़ के रूप में लिखकर जोड़ने के अनुभव देते हैं और इन अनुभवों से 'गुना' या 'बार' जैसी बोलचाल की भाषा से आरंभ कर गुणा के चिह्न से परिचय कराते हैं।	नहीं
ऐसे उदाहरण / सवाल / परिस्थिति बच्चों के सामने रखते हैं जिनमें उन्हें बिना गिने बराबर मात्रा के समूहों में वस्तुओं की संख्या पता लगाने के अवसर हों।	नहीं
'आयताकार जमावट' से सम्बंधित उदाहरणों एवं वस्तुओं से कार्य करवाकर गुणा की अवधारणा समझाते हैं।	नहीं

अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)- गुणा	हाँ/नहीं
‘आयताकार जमावट’ से सम्बंधित उदाहरणों एवं वस्तुओं से कार्य करवाकर गुणा की अवधारणा समझाते हैं।	नहीं
‘दर (Rate)’ से सम्बंधित उदाहरणों एवं वस्तुओं से कार्य करवाकर गुणा की अवधारणा समझाते हैं।	नहीं
आवश्यकतानुसार ‘कार्तीय गुणन’ से सम्बंधित उदाहरणों एवं वस्तुओं से कार्य करवाकर गुणा की अवधारणा समझाते हैं।	नहीं
बार-बार जोड़ पर कार्य करवाते हुए गुणा की अवधारणा पर आते हैं।	नहीं
2, 3, 4, 5 तथा 10 के गुणन तथ्य बनवाने तथा दैनिक परिस्थितियों में उनके उपयोग से सम्बंधित कार्य करवाते हैं।	नहीं
गुणा की अवधारणा का उपयोग करते हुए बच्चों से पहाड़े बनवाते हैं।	नहीं
बार-बार जोड़ से गुणा पर जाने के लिए बीज/बटन/कंकड़/पत्तियों आदि सामग्री एवं सम्बंधित चित्रों का उपयोग करते हैं।	नहीं
बीजों/कंकड़ों/डंडियों आदि के उपयोग से पहाड़े बनवाते हैं।	हाँ
सामग्री के उपयोग के साथ कार्यों से ऐसे अवसर बनाते हैं जिससे बच्चे पहाड़ों का अर्थ समझकर स्वयं पहाड़े बना सकें।	नहीं
गुणा के विभिन्न संदर्भों से सम्बंधित दैनिक जीवन की परिस्थितियाँ/समस्याएँ बच्चों के समक्ष रखते हैं।	नहीं
इन परिस्थितियों/समस्याओं पर बच्चों को आपस में चर्चा करने और इनके हल के लिए अपने तर्क रखने के अवसर निर्मित करते हैं।	नहीं
बच्चों द्वारा बताए गए विभिन्न तरीकों को स्वीकार करते हैं।	नहीं
विभिन्न संदर्भों पर आधारित दैनिक जीवन की परिस्थितियों के इबारती सवाल बनवाते हैं।	नहीं
संख्याओं के पैटर्न को आगे बढ़ाने के लिए तर्क आधारित नियम बनाने एवं प्रस्तुत करने के मौके देते हैं।	नहीं
शिक्षण में ELPS का ध्यान रखते हैं। जैसे: <ul style="list-style-type: none"> ○ ठोस वस्तुओं (कंकड़/बीज... आदि) के साथ गुणा के विभिन्न संदर्भों के अनुभव देते हैं। ○ वस्तुओं के साथ काम करते हुए बोलचाल की भाषा जैसे ‘इतनी बार’ या ‘इतने गुना’ आदि का प्रयोग कर गणितीय शब्दावली ‘गुणा’ से परिचित करवाते हैं। ○ इसी प्रकार के कार्यों को फिर चित्रों के साथ करना या चित्रात्मक प्रस्तुति करना। ○ प्रतीकों का प्रयोग करते हैं (जैसे गुणा के चिह्न का प्रयोग ऊपर दिए गए कार्य करने के बाद करते हैं)। ○ इसी तरह मानक विधि से सवाल हल कराने के पूर्व ठोस वस्तुओं, चित्रों पर कार्य कराते हुए वैकल्पिक तरीकों से भी परिचय कराते हैं। 	हाँ नहीं हाँ हाँ
बच्चों के स्तर को ध्यान में रखते हुए समूह बनाते हैं एवं एक-दूसरे से सीखने के मौके देते हैं।	नहीं

दैनिक शिक्षण योजना में आकलन को शामिल करते हैं।	हाँ
आकलन के लिए गतिविधियों, मौखिक कार्य एवं लिखित कार्य का उपयोग करते हैं।	नहीं
पाठ्यपुस्तक में दिए गए सवाल के साथ-साथ नए सवाल भी बनाते हैं।	नहीं
आकलन के आधार पर बच्चों की आवश्यकता की पहचान करते हैं।	नहीं
आकलन के परिणामस्वरूप अपनी योजना व तरीकों में आवश्यकतानुसार बदलाव करते हैं	नहीं

शिक्षकों के ऐसे समूह के कक्षा अभ्यासों को समझने की कोशिश करें तो मोटे तौर पर प्रतीत होता है कि ऐसे शिक्षकों की मान्यता है कि यदि गुणा की मानक विधि से किताब में दिए गए सवालों को हल करा दिया जाए तो वे अच्छी तरह से गुणा की अवधारणा को समझ जाएंगे। कभी-कभी सामग्री का इस्तेमाल एवं किताब में शामिल विभिन्न संदर्भ के सवाल हल कराने से हमें भ्रम भी हो सकता है कि शिक्षक इनकी व्यापक समझ रखते हैं। ऐसी स्थिति में उदाहरणात्मक कार्ययोजना 3 के अनुसार कार्य के लिए विचार किया जा सकता है।

उदाहरणात्मक कार्ययोजना 3:

क्र. सं.	सत्र	विषय	समय	सामग्री
1	कक्षा-कक्ष में गुणा के दौरान बच्चों की चुनौतियाँ	गुणा के सवालों में बच्चों की चुनौतियों को जानना एवं सीखने के प्रतिफलों पर संक्षिप्त चर्चा।	15 मिनट	सीखने के प्रतिफल
2	गुणा के मायने तथा सन्दर्भ	गुणा के मायने तथा सन्दर्भ समझना एवं इन पर आधारित अभ्यास- बार-बार जोड़ना, आयताकार जमावट, मापक, दर, कार्तीय गुणन।	1 घंटा	पाठ्यपुस्तक के पाठ, टीएलएम, पीपीटी।
3	इबारती सवालों को हल करना और बनाना	बच्चों के परिवेशीय अनुभव व ठोस सामग्री द्वारा गुणा की अवधारणा से परिचय, बार-बार जोड़, संख्या छोड़कर विधि द्वारा गणितीय निरूपण तक पहुँचना, विविध प्रकार के गुणा आधारित अभ्यास। इबारती सवालों पर कक्षा में चर्चा, सवालों को हल करना और विभिन्न संदर्भों के लिए सवाल बनाना।	2 घंटे	पाठ्यपुस्तक के पाठ, कार्यपत्रक।
4	गुणा की वैकल्पिक विधियाँ तथा गुणा की मानक विधि, नेपियर पट्टी, चाइनीज़ बोन्स और निखिलम विधि को समझना	गुणा की वैकल्पिक विधियों से मानक विधि तक पहुँचना। मानक विधि किस तरह काम करती है, इसको समझना। नेपियर पट्टी, चाइनीज़ बोन्स और निखिलम विधि को समझना तथा इसमें स्थानीय मान की भूमिका समझना।	3 घंटे	पाठ्यपुस्तक के पाठ, पीपीटी, डीन्स ब्लॉक, तीली-बण्डल।
5	सामग्री निर्माण	द्विआयामी डीन्स ब्लॉक बनाना तथा उपयोग, तीली-बण्डल का उपयोग, सामग्री की सीमाओं को समझना।	2 घंटे	टीएलएम बनाने की सामग्री

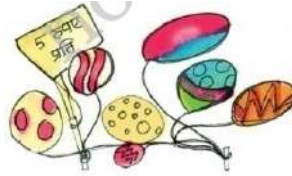
उपरोक्त किसी भी स्थिति के लिए कार्यशाला की प्रभावशीलता (effectiveness) को जाँचना:

नीचे दिए गए प्रश्नों के माध्यम से हम कार्यशाला में शिक्षकों के साथ किए गए काम से समझ के स्तर पर क्या सकारात्मक बदलाव हुए हैं, यह जाँच सकते हैं। इसी प्रकार हम हर कार्यशाला के बाद ऐसे आकलन करके देख सकते हैं।

1. इन चित्रों को देखिए और बताइए, ये गुणा के किस संदर्भ को बताने में सहायक हो सकते हैं?



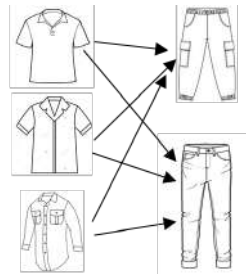
A



B



C



D

- संगीता एक गुणन तथ्य $3 \times 6 = 18$ के द्वारा गुणा के विभिन्न संदर्भों को समझाना चाहती है। आप प्रत्येक संदर्भ के लिए एक इबारती सवाल लिखकर संगीता की मदद कीजिए।
- ज़रीना की नई नियुक्ति हुई है, वो प्राथमिक स्तर के बच्चों को पहाड़े सिखाना चाहती है। उसे छोटी संख्या 3 एवं दो अंकों की संख्या 14 के पहाड़े सिखाने के लिए आप गतिविधियाँ सुझा सकते हैं, जिससे वह अपनी कक्षा में बेहतर काम कर सके।
- सोनू, मुस्कान और साधना ने दिए गए सवालों को इस तरह से हल किया। उनके द्वारा सवालों को इस तरह से हल करने के क्या कारण हो सकते हैं?

सोनू का तरीका	मुस्कान का तरीका	साधना का तरीका
$\begin{array}{r} 25 \\ \times 5 \\ \hline 1025 \end{array}$	$\begin{array}{r} 23 \\ \times 36 \\ \hline 138 \\ 69 \\ \hline 207 \end{array}$	$15 \times 0 = 0$

- नरिंदर अपनी कक्षा के बच्चों को 2 अंकीय संख्याओं का गुणा सिखाने की योजना बना रही है। वो मानक विधि के अलावा अन्य तरीकों या गतिविधियों को भी अपनी योजना में शामिल करना चाहती है। आप नरिंदर को योजना में शामिल करने के लिए कौन-से तरीके / गतिविधियाँ सुझाएंगे?

6. दौलत ने अपनी कक्षा के बच्चों के साथ दो अंकों की संख्या का गुणा सिखाने तक पर्याप्त काम कर लिया है। वह चाहता है कि बच्चों का आकलन कर अपने काम के प्रभाव को समझ सके। उन्हें आकलन के लिए किन गतिविधियों व सवालों को शामिल करना चाहिए?

3.2.4 विविध ज़रूरतों वाले शिक्षकों के समूह के साथ काम- उदाहरण के लिए

अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)- संख्या-पूर्व अवधारणाएँ और गिनना

1. बड़ा-छोटा, मोटा-पतला, एक-एक मिलान आदि के लिए दैनिक जीवन की घटनाएँ, पालों अथवा वस्तुओं का उपयोग करते हैं।
2. संख्या की ऐसी परिस्थिति बनाते हैं, जहाँ पर संख्यात्मक रूप से तुलना करने की ज़रूरत पड़े। उदाहरण के लिए मेले से दो अलग-अलग कीमत के खिलौने को महंगा और सस्ता खिलौना बताना।
3. समूह में गिनने के लिए दी गई चीज़ों के चित्र को किसी संदर्भ के साथ जोड़ते हैं। उदाहरण के लिए 12 चिड़ियों के चित्र को दो-दो के समूह बनाकर गिनने के लिए किसी कहानी के माध्यम से बताते हैं।
4. दैनिक जीवन के संदर्भों जैसे कि कंकड़/पत्थर गिनवाना, कुर्सी/टेबल, घंटी आदि को लेकर गिनने की प्रक्रिया पर काम करते हैं।
5. संख्या-पूर्व अवधारणाएँ, जैसे कि एक-एक की संगति, क्रम, छाँटना और तुलना का उपयोग करते हुए गिनने की प्रक्रिया पर समझ बनाने का काम करते हैं।
6. गिनवाते हुए एक-एक की संगति और संख्या नाम की क्रमबद्धता की समझ को प्रक्रिया में शामिल करते हैं।
7. मात्रा की समझ को विकसित करने के लिए चीज़ों को देकर पूछते हैं कि यह कितनी हैं या संख्या बोलकर उस संख्या के बराबर चीज़ों को उठाने के लिए कहते हैं।
8. गिनती पढ़ाते हुए इस तरह के संदर्भों का भी इस्तेमाल करते हैं जिनको गिनने के लिए छूने की ज़रूरत न पड़े। उदाहरण के लिए घंटी की आवाज गिनने के लिए कहना, धड़कन गिनने के लिए कहते हैं।
9. दो या दो से ज्यादा संख्याओं को बड़ा, छोटा, बढ़ते हुए या घटते हुए क्रम में लिखने के लिए कहते हैं।
10. उपयुक्त मात्रा में चीज़ों के चित्र लेकर उनको समूहों में जैसे दो-दो के, तीन-तीन आदि के समूहों में गिनने के लिए कहते हैं।
11. संख्या-पूर्व अवधारणाओं, जैसे अनुक्रम बनाना, तुलना करना, एक-एक की संगति के लिए दैनिक जीवन की चीज़ों से शुरू कर गणितीय वस्तुओं जैसे गोला, घन, घनाभ को शामिल करते हैं।
12. गणितीय निरूपण, जैसे आयत, वर्ग, वृत्त को बनाकर उस पर संख्या-पूर्व अवधारणाओं जैसे अनुक्रम बनाना, तुलना करना, एक-एक की संगति के काम करवाते हैं।
13. गिनमाला पर मोती गिनना, तुलना करना, समूह में गिनने और संख्या कार्ड को क्रम में लगाने का काम करवाते हैं।
14. संख्या की मात्रात्मक समझ के लिए दस बिंदी वाले बिंदी के पत्ते के चित्र बनाकर काम करवाते हैं। उदाहरण के लिए संख्या के संबंध, जैसे कोई भी संख्या पिछली संख्या से 1 ज्यादा है या 10 कितने तरह से बन सकता है।

अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)- संख्या-पूर्व अवधारणाएँ और गिनना

15. संख्या रेखा पर संख्या को दर्शाना, तुलना करवाना, समूह में गिनने और क्रम में लगाने पर काम करते हैं।
16. गिनती के स्तरवार सीखने के प्रतिफलों को जानते हैं और उसी के आधार पर स्तरानुरूप गतिविधियाँ बनाते हैं।
17. संख्या के संबंधों पर काम करते हैं। पैटर्न, ज्यामिति आदि पढ़ाते हुए भी गिनने का काम करवाते हैं।
18. गिनती पर काम करते हुए संख्याओं का अनुमान लगाने के अवसर देते हैं।
19. संख्या के पैटर्न बनाकर उसको आगे बढ़ाने के लिए कहते हैं।
20. संख्या के पैटर्न बनाकर पैटर्न के नियम को बोलने के लिए कहते हैं।
21. संख्या के संबंधों पर सोचने के लिए कहते हैं। उदाहरण के लिए, जैसे- 10, संख्या 8 से 2 ज़्यादा है। ऐसे ही 14 किस संख्या से 2 ज़्यादा है?
22. ELPS की समझ के अनुसार शिक्षण करते हैं। जैसे कि:
 - ठोस वस्तुओं (कंकड़/बीज... आसानी से मिलने वाली चीज़ों) के साथ अनुभव
 - बोलकर अनुभवों के बारे में बताना यानी भाषा का उपयोग (जैसे माला के साथ संख्या नाम को जोड़ना)
 - इसी प्रकार के कार्यों को फिर चित्रों के साथ करना या चित्रात्मक प्रस्तुति करना
 - प्रतीकों का प्रयोग (संख्यांक एवं संख्या नाम की पहचान और लिखना)
23. ठोस वस्तुओं का इस्तेमाल करते हुए चित्रों पर और फिर चिह्नों की तरफ बढ़ते हैं। जैसे कि कंकड़/पत्थर गिनवाना, फिर चित्र गिनवाना और फिर अमूर्त प्रतीक चिह्नों (संख्या चिह्न) को देखकर मालात्मक समझ पर जाते हैं।
24. उपयुक्त सहायक सामग्री, जैसे कि पहले खुली ठोस वस्तुएँ, फिर कुछ बंधी सामग्री (गिनमाला), फिर कुछ चित्रों से गिनवाना और फिर अमूर्त में समझ बनाने पर काम करते हैं।
25. गिनने की समझ पर काम करते हुए ही ये जाँचना कि बच्चों को कहाँ गिनने में परेशानी आ रही है, जैसे कि बच्चे गिनने के मुख्य तीन पहलुओं को ठीक से समझ पाए हैं या नहीं। क्या वे एक संख्या नाम के साथ या तो वस्तु को छोड़कर या ज़्यादा वस्तुओं को तो नहीं गिन रहे हैं। संख्या नाम बोलने में क्रम है कि नहीं, इन बातों को प्रक्रिया के दौरान ही जाँचते हैं।
26. आकलन के विभिन्न तरीकों, जैसे गृहकार्य, वर्कशीट, प्रोजेक्ट आदि का प्रयोग शिक्षण की प्रक्रिया के हिस्से के तौर पर करना।
27. पाठ्यपुस्तक के हिस्से पर ज़रूरत के अनुसार वर्कशीट बनाते हैं।
28. बच्चों को गणित करने के अपने तर्क को लिखने के लिए देते हैं, उन तरीकों को पढ़ते हैं, उनका विश्लेषण करते हैं और उस पर आधारित पढ़ाने की योजना बनाते हैं।
29. गिनने के पाँचों सिद्धांतों की समझ रखते हैं और उन बच्चों की पहचान कर पाते हैं जिन बच्चों को किसी चरण पर दिक्कत आ रही है, उनकी मदद के लिए विशेष योजना बनाते हैं।
30. स्कूल के बच्चों के बारे में बता पाते हैं कि किन बच्चों को गिनना ठीक से आता है, कितने बच्चे तुलना कर पाते हैं, कितने बच्चे संख्याओं को क्रम में जमा पाते हैं आदि।

उद्देश्य

1. गिनना पढ़ाने/सिखाने की वांछित प्रक्रियाओं के महत्त्व को समझना।
2. गिनने की वांछित प्रक्रियाओं का बच्चे के गिनना सीखने की प्रक्रिया से सम्बन्ध को जानना।
3. संख्या-पूर्व अवधारणाओं और गिनने के अवधारणात्मक आधार को जानना।
4. गिनना और संख्या-पूर्व अवधारणाओं को सिखाने/पढ़ाने के लिए गतिविधियाँ बना पाना।

सब एक-

समय- 2 घंटे

सब के उद्देश्य

1. संभागियों के गिनना सिखाने/पढ़ाने के तरीकों का विश्लेषण करना।
2. गिनना सिखाने/पढ़ाने के लिए ज़रूरी पहलुओं को जानना।

सामग्री

1. केस स्टडी के प्रिन्ट आउट

प्रक्रिया

1. बड़े समूह में शिक्षकों के साथ निम्न परिस्थिति पर चर्चा करें- मान कर चलें कि प्राथमिक विद्यालय में अभी एक नए शिक्षक नियुक्त हुए हैं। इन शिक्षक को समझ नहीं आ रहा है कि अपनी कक्षा 1 के बच्चों को गिनना कैसे सिखाया/पढ़ाया जाए। अभी तक उनके गिनना सिखाने/पढ़ाने के अवलोकन निम्न तरह के हैं:

केस स्टडी (प्रिन्ट कर शिक्षकों को दें)

शुरुआत में जब बच्चे स्कूल आते हैं तो स्कूल के साथ तालमेल बनाने की गतिविधियों के साथ शिक्षक बीच-बीच में ये देख लेते हैं कि कौन-से बच्चे गिनने की कितनी समझ के साथ आए हैं। इसके लिए उनसे गिनती बुलवाना, कोई संख्या बोलकर वस्तुएँ मंगवाना और अपने पास बुलाकर उनको कंकड़-कंचे दिखाकर पूछना कि कितने हैं, ऐसा कुछ किया जाता है। तीन-चार दिन के बाद बच्चों से दीवार पर लिखी संख्याओं को पहले 1 से 10 तक पढ़ाया जाता है। शुरुआत में कम-से-कम दस बार खुद उंगली या लकड़ी की मदद से पढ़ाया जाता है। जिसे कुछ बच्चे जल्दी पकड़ लेते हैं और कुछ नहीं। फिर कुछ बच्चों को बोला जाता है कि 1 से 10 तक ज़ोर-ज़ोर से पढ़ें और बाकी उनके पीछे बोलें। ऐसा दो दिन तक चलता है और इसके बाद उनको कॉपी में लिखने के लिए दिया जाता है। कुछ बच्चे एक बार में लिख देते हैं और शेष बच्चों को लिखने के लिए बिन्दु-बिन्दु बनाकर लिखने को दिया जाता है। एक दिन में एक ही संख्या को देते हैं। साथ ही किताब में दी हुई कहानी भी सुना देते हैं और गिनना संबंधी कविता भी करवाते हैं। लगभग एक महीने में बच्चे 1 से 10 तक संख्या पहचान और लिखना जान जाते हैं। इसके बाद काम थोड़ा आसान हो जाता है। बच्चों को एक-एक ग्यारह, एक-दो बारह करके शुरू में 50 तक और फिर 100 तक संख्याएँ पढ़ने और लिखने का अभ्यास कराया जाता है। इस काम में थोड़ा ज़्यादा समय लगता है, क्योंकि संख्याएँ ज़्यादा होती हैं। बच्चों को गिनती लिखने के तरीके भी बताते हैं, ताकि वे किसी भी संख्या को कई तरीकों से देख पाएँ। जैसे- पहले ऊपर की पड़ी लाइन में 0, 10, 20, 30, 40, 50, लिखना, दूसरी लाइन में 1, 11, 21, 31, 41..... लिखना, तीसरी लाइन में 2, 12, 22, 32, 42 लिखना।

या फिर पहले 0 से 9 तक खड़ी लाइन में लिखना, फिर दूसरी खड़ी लाइन में पहले 1, 1, 1, 1, 1..... लिखना और उनके आगे 0, 1, 2, 3, 4, 5 लिखना। और तीसरी लाइन में पहले 2, 2, 2, 2, 2 लिखना और फिर उनके आगे 0, 1, 2, 3, 4, 5 लिखना। ज़्यादातर बच्चे इन सभी प्रक्रियाओं से सीख जाते हैं। लेकिन कुछ बच्चे जो स्कूल कम आते हैं या जिनके घर में कोई पढ़ने वाला माहौल नहीं होता है तो वो बच्चे नहीं कर पाते हैं। उनको फिर अलग से अतिरिक्त समय देकर समझाया जाता है। इन प्रक्रियाओं में समूहों में गिनने के अनुभव देने की कमी दिखाई देती है। किसी संख्या का बाकी संख्याओं के साथ संबंध पर भी कोई बात नहीं होती है।

2. इस केस स्टडी से जुड़े निम्न सवालों पर चर्चा करें:
 - a. आप इन नए शिक्षक को गिनने पर काम करने को लेकर किस तरह के सुझाव देंगे?
 - b. केस स्टडी में दिए गए गिनना पढ़ाने/सिखाने के तरीके में शिक्षक ने संख्या की समझ पर काम करने से पहले किन अवधारणाओं पर काम किया है? गिनना पर काम करने से पहले किन संख्या-पूर्व अवधारणाओं की ज़रूरत पड़ती है?
 - c. केस स्टडी में दिए गए गिनना पढ़ाने/सिखाने के तरीके में शिक्षक गिनने के किन अवधारणात्मक पहलुओं पर चर्चा कर रहे हैं?
 - d. केस स्टडी में दिए गए गिनना पढ़ाने/सिखाने के तरीके में शिक्षक सीखने के प्रतिफल और पाठ्यपुस्तक को किस तरह से जोड़ पा रहे हैं?
 - e. केस स्टडी में दिए गए गिनना पढ़ाने/सिखाने के तरीके में शिक्षक बच्चों को अनुमान लगाने, गिनने पर बात करने, पैटर्न आदि के साथ जुड़ाव, बने पैटर्न के नियम को ढूँढने आदि के किस तरह के अवसर दे रहे हैं? क्या गिनना पढ़ाते/सिखाते हुए इस तरह के अनुभव देने की आवश्यकता होती है? क्यों?
 - f. केस स्टडी में दिए गए गिनना पढ़ाने/सिखाने के तरीके में शिक्षक आकलन किस तरह से कर रहे हैं?
3. शिक्षकों को समूह में इन पाँच सवालों पर समूहवार टिप्पणी लिखने के लिए कहें और फिर हर समूह से अपने टिप्पणियों को प्रस्तुत करने के लिए कहें।
4. जब शिक्षक अपनी राय व्यक्त कर रहे हों और बाकी शिक्षक उसमें कुछ जोड़ना चाहें तो उन्हें जोड़ने दें।
5. जब प्रस्तुतीकरण हो जाए तो शिक्षकों से पूछें कि क्या आपको दिए गए उपरोक्त पाँच सवाल गिनने को संपूर्णता में समझने हेतु मदद करते हैं? क्या कुछ और सवाल आप इसमें जोड़ना चाहेंगे?

समेकन

1. पूरी चर्चा का समेकन करें कि अभी तक हमारी सहमति बनी कि अगर गिनने पर ठीक से काम करना है तो हमें इसके कुछ ज़रूरी सवालों पर विचार कर लेना चाहिए। ये ज़रूरी सवाल कुछ ऐसे होंगे कि:
 - a. गिनना पढ़ाते/सिखाते हुए गणित के बड़े लक्ष्य को कैसे ध्यान में रखें?
 - b. सीखने के प्रतिफल का पाठ्यपुस्तक से कैसे जुड़ाव हो?
 - c. गिनना सीखने से पहले की अवधारणाएँ यानी संख्या-पूर्व अवधारणाएँ कौन-सी हैं?

- d. गिनने के मायने क्या हैं?
 - e. गिनना सिखाते हुए आकलन कैसे करें?
 - f. यदि गिनना पढ़ाते/सिखाते हुए हम मूर्त से अमूर्त की अप्रोच रखें तो हमारी गतिविधियों का क्रम क्या होगा?
2. उपरोक्त लिखे हर सवाल पर एक शिक्षक के लिए कक्षा में काम करने के लिए क्या सुझाव होंगे?

सब दो- संख्या-पूर्व अवधारणाएँ

समय- 8 घंटे

सब के उद्देश्य

1. जानना कि गणित शिक्षण की शुरुआत कहाँ से करें?
2. गणित की कक्षा एक की किताब के शुरुआती पाठों के उद्देश्य समझना।
3. संख्या-पूर्व अवधारणाओं को समझना।
4. संख्या-पूर्व अवधारणाओं की टीचिंग प्रैक्टिस को समझना और उनके लिए गतिविधियाँ बनाना।

सामग्री

1. प्रोजेक्टर एण्ड स्पीकर
2. संख्या-पूर्व अवधारणाओं के प्रिन्टआउट
3. एनसीईआरटी की कक्षा एक की किताब के शुरुआती पाठ
4. वर्कशीट के प्रिन्टआउट

प्रक्रिया

1. संभागियों को छोटे-छोटे समूह में बैठाएँ। हर समूह में एनसीईआरटी की कक्षा एक की किताब हो। संभागियों से निम्नलिखित सवालों पर चर्चा करें:
 - गणित शिक्षण की शुरुआत कहाँ से की जानी चाहिए?
 - हमारे स्कूली दिनों में पहली कक्षा के शुरुआती पाठों में क्या होता था?
 - क्या अब भी ऐसा ही है या आज की गणित की किताबें पहले से अलग हैं?
 - पाठ्यक्रम में यह बदलाव क्यों हुआ है?
 - संख्या सिखाने से पहले हमें क्या-क्या सिखाना चाहिए?
2. इन सवालों पर बात करते हुए संख्या-पूर्व अवधारणाओं को चर्चा में लाने के लिए संभागियों को पहला पाठ देखने के लिए दें और इस पाठ को पाठ्यक्रम में शामिल करने के कारणों पर बात करें।
3. संभागियों को रंगोमेट्री का सेट, श्री-डी वस्तुओं का सेट, जैसे- टेनिस की गेंद, पिंग-पौंग गेंद, लकड़ी के गुटके या टेप लगे हुए गत्ते के छोटे-छोटे बक्से, टिन कैन, प्रिज्म सरीखी आकृतियाँ, अलग-अलग व्यास वाली बेलनाकार नलियाँ आदि के सेट देकर उन्हें हर सेट को छाँटकर समूह बनाने के लिए कहें।

4. जब शिक्षक ऐसा कर लें तो उनसे पूछें, किस तरह से समूह बनाए हैं? इस तरह की गतिविधियाँ गिनना सीखने से पहले करनी क्यों ज़रूरी हैं? छाँटने की गतिविधि करते हुए किन बातों को ध्यान में रखना चाहिए?

5. कक्षा-कक्ष से लिया गया उदाहरण:

प्राची 1 से 20 तक की गिनती मुँह-ज़बानी (मौखिक) बोल लेती है। एक दिन जब शिक्षक ने उससे 12 कंकड़ लाने को बोला तो वह ढूँढकर 12 कंकड़ ले आई। जब शिक्षक ने उन कंकड़ों को गिना तो वो 7 निकले। अब शिक्षक ने प्राची को दोबारा से गिनने को कहा। इस बार प्राची ने बोला कि ये तो 15 हैं। आपके विचार से ऐसा क्यों हुआ?

प्राची ने गिनती रटी हुई है, पर उसके साथ संख्या-पूर्व अवधारणाओं पर काम नहीं हुआ है। गिनने के लिए किन क्षमताओं की ज़रूरत पड़ती है, शिक्षक द्वारा यह भी ध्यान में नहीं रखा गया होगा।

आइए, प्राची के लिए ज़रूरी सीखने-सिखाने की प्रक्रिया को समझें:

- सबसे पहले प्राची को कंकड़ एक पंक्ति में लगाने पड़ेंगे, ताकि गिनते वक्त कोई छूटे ना और कोई दोबारा नहीं गिना जाए। दूसरे शब्दों में हम इसे क्रम में रखना कह सकते हैं।
- उसके बाद प्राची को एक गिनती बोलने के संग एक कंकड़ को अलग करना होगा। यानी कि वह एक कंकड़ को एक संख्या के साथ जोड़ेगी अर्थात एक-से-एक की संगति करेगी।
- इसके बाद प्राची को कंकड़ों के दो समूहों का भी ध्यान रखना पड़ेगा, एक जो वह गिन चुकी है और दूसरा जो अभी गिनना बाकी है। इसमें वह वर्गीकरण की क्षमता का प्रयोग करेगी।
- हमने देखा कि प्राची को गिनना सीखने से पहले seriation, one-to-one correspondence and classification यानी क्रमिक विन्यास, एक-से-एक की संगति और वर्गीकरण आना चाहिए। इसलिए गिनना सिखाने से पूर्व बच्चों के संग ऐसी गतिविधियाँ आयोजित करनी चाहिए जिसमें बच्चे वर्गीकरण, क्रम में रखने, एक-से-एक की संगति बनाने इत्यादि की क्षमताएँ विकसित कर पाएँ। ये सब गतिविधियाँ बच्चों को गिनना सीखने में मदद करती हैं। आप देखेंगे कि ये सब क्षमताएँ संख्या-पूर्व अवधारणाओं का हिस्सा हैं। अतः एनसीईआरटी द्वारा गिनना या संख्या सिखाने से पूर्व इन अवधारणाओं पर विस्तार से चर्चा करने और समय देने की बात की जाती रही है।

6. संभागियों से सवाल पूछें कि संख्या-पूर्व अवधारणाएँ कौन-कौन सी हैं?

7. हो सकता है कि शिक्षक संख्या-पूर्व अवधारणाओं को लेकर कई तरह की बातें बताएँ। इसलिए संख्या-पूर्व अवधारणाओं पर सहमति बनाने के लिए निम्न वीडियो क्लिप दिखाएँ:

<https://youtu.be/iEbLGT4djRM>

8. यदि यह क्लिप उपलब्ध न हो पा रही हो तो हैंडबुक से संख्या-पूर्व अवधारणाओं की एक रीडिंग बना लें और संभागियों को पढ़ने के लिए दें।

9. अब हर शिक्षक को निम्न शीट भरने के लिए कहें। इसके लिए अगर शिक्षक पाठ्यपुस्तक की मदद लेना चाहें तो उन्हें लेने दें। इसके अलावा कुछ उदाहरण भी दिए हैं।

<p>एक-एक की संगति</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. बच्चों को कुछ कंकड़ और प्लेट्स दें, फिर उनसे कहें कि समूह में ऐसे बैठें कि सब के पास एक प्लेट और एक कंकड़ रहे। प्रत्येक बच्चा इस गतिविधि में एक प्लेट के साथ एक कंकड़ जमा के एक बच्चे को देगा। ऐसी जोड़ियाँ बनाना, गिनना सिखाने से पहले बच्चों को एक-से-एक की संगति करने वाली अवधारणा से अच्छी तरह से रूबरू कराएगा और यह गिनने की क्षमता की बुनियाद बनेगा। यदि बच्चे में यह अवधारणा अच्छे से विकसित हो जाए तो बच्चा कभी भी चीज़ों को गिनने में किसी भी वस्तु को छोड़ेगा नहीं या गिनती को एक ही सुर में गाते हुए आगे बढ़ता नहीं जाएगा। 2. कंकड़ों की एक कतार बनाकर बच्चों से कहें कि हर एक कंकड़ के सामने एक माचिस की तीली रखें। 3. बच्चों से कहें कि उनके समूह में जितने बच्चे हैं उतने ही कंकड़ ढूँढ के लाएँ। 4. बच्चों के साथ चित्रों के माध्यम से भी गतिविधियाँ कराई जा सकती हैं। जैसे कि 10 बकरियों के चित्र बनाकर बहुत-सी घास के गुच्छे फैलाएँ और बच्चों से कहें कि घास का एक गुच्छा एक बकरी को खिलाना है। 5. बच्चों को टॉफियाँ दें, प्रत्येक को एक-एक लेनी है। उनसे पूछें कि क्या टॉफियाँ कक्षा के सारे बच्चों के लिए पर्याप्त हैं? यदि नहीं, तो जितनी टॉफियाँ और चाहिए उतनी आप डिब्बे से निकाल लें। यदि हाँ, तो जितनी ज़्यादा हैं उतनी डिब्बे में डाल दें। ऐसी गतिविधियों से बच्चों को एक-एक की संगति की अवधारणा की समझ अच्छे से हो जाएगी।
<p>अनुक्रम बनाना</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. सबसे पहले बच्चों को सिर्फ़ तीन चीज़ें देखकर अनुक्रम बनाना सीखने के अवसर देने चाहिए। उसके उपरांत हम चीज़ों की संख्या बढ़ा सकते हैं। इस तरह की गतिविधि में बच्चों से लगातार बातें करनी चाहिए। चीज़ों को इधर-उधर रखकर बच्चों के संबंधित तर्क पता करने चाहिए। इससे बच्चों को अपनी अवधारणाओं को स्पष्ट करने में मदद मिलती है। 2. बच्चों को इसके बाद पैटर्न के सवाल दिए जा सकते हैं। उनसे कहा जा सकता है कि एक पत्ती बनाएँ और दूसरा गोला। फिर एक पत्ती बनाएँ और दूसरा गोला। इसी तरह पैटर्न को आगे बढ़ाते जाएँ। 3. बच्चों को तीन-चार ऐसी परिचित चीज़ें दें जिनके वजन में स्पष्ट अंतर हो। जैसे कि गेंद, रबड़, पेंसिल, मोटी किताब, पेंसिल बॉक्स, वाटर बॉटल, चॉक, डस्टर इत्यादि। उनसे कहें कि इनको ऐसे जमाएँ कि सबसे हल्की चीज़ सबसे पहले हो और फिर भार के अनुसार अंत में सबसे भारी चीज़ हो। 4. बच्चों को एक डिब्बे में तरह-तरह की चीज़ें रखकर दें। उनसे कहें कि इस तरह जमाओ कि सब चीज़ें डिब्बे में आ जाएँ। या ऐसे कहें कि इस तरह जमाओ कि डिब्बे में सबसे बड़ी चीज़ सबसे नीचे हो, और फिर सबसे छोटी चीज़ सबसे ऊपर आ जाए।

संख्या-पूर्व अवधारणा	गतिविधि (कुछ उदाहरण)	गतिविधि की ज़रूरी बातें
वर्गीकरण		
तुलना करना		
एक-एक की संगति		
अनुक्रम बनाना		
वर्कशीट		

10. अब शिक्षकों को संख्या-पूर्व अवधारणाओं संबंधी किसी आकलन प्रपत्र के प्रिन्टआउट दें। शिक्षकों से पूछें कि वे इस आकलन प्रपत्र में और किन सवालों को जोड़ना चाहेंगे?
11. प्राची को अलग-अलग लम्बाई की पाँच पेंसिल दी गई और बोला गया कि लम्बाई के आधार पर पेंसिलों की जमावट करनी है। प्राची ने सबसे पहले सबसे बड़ी पेंसिल उठाई और उसे रख दिया। उसके बाद उससे छोटी जो भी पेंसिल दिखाई दी वह रख दी। उसके बाद उसे फिर से जो सबसे छोटी पेंसिल दिखाई दी वह रख दी। लेकिन उसने लम्बाई के क्रम को ध्यान में नहीं रखा। और एक लम्बी पेंसिल जो कि सबसे लम्बी पेंसिल के बाद आती वह रह गई। फिर से प्राची ने अपनी पूरी जमावट को ना देखकर, उस पेंसिल को सबसे छोटी पेंसिल के बगल में जमा दिया। ऐसा क्यों हुआ होगा?

यह इसलिए हुआ होगा कि उसे छोटा-बड़ा तो पता है, परंतु सबसे छोटा से सबसे बड़ा का क्रम नहीं पता है। इस क्षमता का विकास अगर अच्छे से नहीं हुआ तो प्राची गिनती सीखने के समय संख्याओं को उनके बढ़ते और घटते क्रम में समझने में अधिक समय लगा सकती है।

12. 'अनुक्रम बनाना' संबंधी आकलन का उदाहरण

- अतः शिक्षक को देखना चाहिए कि अनुक्रम बनाने में बच्चा दोनों दिशाओं में क्रम से जमा सके और वह छोटा, सबसे छोटा या बड़ा, सबसे बड़ा की अवधारणा को समझ पा रहा हो। साथ ही क्रम जमाने में वह सिर्फ अगल-बगल की चीज़ों को ना देखते हुए पूरे समूह को देख पा रहा हो।
- शिक्षक को इन गतिविधियों के दौरान बातचीत में लगातार कुछ शब्दों का प्रयोग करना चाहिए, जैसे- पहली चीज़, आखिरी चीज़, इससे पहले, उसके बाद इत्यादि। इससे बच्चों को यह समझने में भी मदद मिलेगी कि गुण वास्तव में एक-दूसरे के सापेक्ष होते हैं। जैसे कि कोई कंकड़ एक समूह में तो सबसे बड़ा हो सकता है, परंतु दूसरे समूह में वही कंकड़ सबसे छोटा भी हो सकता है। एक कंकड़ इसी क्रम में हमेशा निश्चित जगह पर नहीं होगा, बल्कि समूह बदलने के साथ-साथ उसका स्थान भी बदल जाएगा।

सत्र तीन- गिनना

समय- 6 घंटे

सत्र के उद्देश्य

1. गिनना पढ़ाने/सिखाने की वांछित प्रक्रियाओं को समझना।
2. गिनने की वांछित प्रक्रियाओं का बच्चे के गिनना सीखने से सम्बन्ध को जानना।
3. गिनने के अवधारणात्मक आधार को जानना।
4. गिनना पढ़ाने/सिखाने के लिए गतिविधियाँ बना पाना।

सामग्री

1. प्रोजेक्टर एण्ड स्पीकर
2. संख्या-पूर्व अवधारणाओं के प्रिन्टआउट
3. वर्कशीट और केस स्टडी के प्रिन्टआउट
4. मॉड्यूल के शुरुआत में दी गई गिनने की अपेक्षित प्रक्रियाओं के प्रिन्टआउट
5. गिनमाला

प्रक्रिया

1. संभागियों से पूछें कि:
 - a. स्कूल आने से पहले बच्चे कितनी चीज़ों को गिन पाते हैं?
 - b. यह उन्होंने कैसे सीखा होगा?
 - c. वे अपनी कक्षा में गिनती/गिनना कैसे पढ़ाते/सिखाते हैं?
 - d. बच्चों को गिनती/गिनना सीखते हुए किस तरह की चुनौतियाँ आती हैं?
2. संभागियों को क्रमानुसार कक्षा की निम्न परिस्थितियाँ दें और उनका विश्लेषण करते रहें। इसके लिए केस स्टडी के प्रिन्टआउट पहले से निकालकर रख दें।

केस स्टडी

3. तीन परिस्थितियों का निम्नवत टेबल बनाकर विश्लेषण करें।

गलती	कारण	कैसे दूर करें
संख्या नाम को सही क्रम से नहीं बोल पा रहे थे। एक, दो, तीन, चार, सात, पाँच, तीन।	संख्या नाम के क्रम को भूल जाना।	गीत, कहानी, कविता आदि के माध्यम से संख्या नामों को क्रम से बोलने का अभ्यास करना पड़ेगा।

गलती	कारण	कैसे दूर करें
कुछ कंकड़ों/वस्तुओं को एक से अधिक बार गिनना या छोड़ देना।	यह चिह्नित नहीं कर पाना कि किन चीज़ों को गिना जा चुका है और किन चीज़ों को गिनना बाकी है।	वर्गीकरण और क्रम से जमाने के कौशल पर पुस्तक में दी गई विभिन्न गतिविधियों के साथ-साथ अन्य गतिविधियों के माध्यम से बच्चों के साथ कार्य करना पड़ेगा।
बिना कंकड़/वस्तु को छुए संख्या नाम बोलना या सारे कंकड़ों/वस्तुओं को छू लेने के बाद भी संख्या नाम बोलते रहना।	संख्या नाम बोलने की गति और वस्तुओं को छूने की गति के बीच समायोजन न कर पाना।	पुस्तक में 'एक-एक की संगति' के लिए दी गई विभिन्न प्रकार की गतिविधियाँ करनी चाहिए।

4. संभागियों से पूछें कि घंटी की आवाज़ गिनना एवं बिखरी हुई चीज़ों को गिनना क्या उपरोक्त तीन परिस्थितियों में ही शामिल हैं या ये गिनने के कुछ नए पहलुओं की ओर इशारा कर रहे हैं?

5. संभागियों की प्रतिक्रिया लेने के बाद अब पूरी चर्चा को हैंडबुक में दिए गिनने के सिद्धांत से समेकित करें। हर सिद्धांत को निम्न वीडियो के साथ में भी दिखाएँ।

<https://www.youtube.com/watch?v=dvyLUpE6o7A&t=5s>

<https://www.youtube.com/watch?v=1EzGw-JxSmA>

<https://www.youtube.com/watch?v=6WbYPr9lgc&t=2s>

<https://www.youtube.com/watch?v=xVv-qjhEUgc&t=1s>

<https://www.youtube.com/watch?v=ieRYzIFWWUg&t=3s>

6. आगे संभागियों से पूछें, इन पाँच सिद्धांतों को ध्यान में रखते हुए क्या वे कुछ गतिविधियाँ सोच सकते हैं? संभागियों को लिखने के लिए थोड़ा समय दें। चर्चा करें कि उन्हें किस सिद्धांत पर गतिविधि सोचने में कठिनाई हो रही है? क्या हमारी पाठ्यपुस्तक में गिनती/गिनने की गतिविधियाँ इन सिद्धांतों के आधार पर बनाई गई हैं?

7. अब संभागियों के साथ गिनने संबंधी कोई गतिविधि करवाएँ। फिर गिनने के सिद्धांतों पर आधारित गतिविधियों वाली वर्कशीट के प्रिन्टआउट संभागियों को समूह में दें।

8. इस वर्कशीट से संबंधित निम्नलिखित प्रश्नों पर समूह में चर्चा करने के लिए कहें:

a. वर्कशीट में लिखी गई कौन-सी गतिविधि/गतिविधियाँ गिनने के किस सिद्धांत को ध्यान में रखकर लिखी गई हैं?

b. इन गतिविधियों को कक्षा में करते हुए साथ-साथ आकलन किस प्रकार से हो सकता है?

- c. इन गतिविधियों को कक्षा में करते हुए आकलन की टिप्पणियाँ किस तरह की हो सकती हैं? कुछ उदाहरण लिखिए।
- d. ये गतिविधियाँ गणित पढ़ाने के नियम 'मूर्त से अमूर्त तक' का किस तरह से पालन कर रही हैं?
9. इन प्रश्नों पर प्रस्तुतीकरण के बाद दो संभागियों को आगे बुलाएँ और सदन में लटकी हुई गिनमाला के दोनों सिरों पर खड़ा होने के लिए कहें। अब अलग-अलग संख्याएँ, जैसे 29, 26, 43, 17 आदि बोलते रहें और दोनों संभागियों को उतने ही मोती गिनमाला से गिनकर अलग करने के लिए कहें। यह गतिविधि कुछ और शिक्षकों के साथ भी कराई जा सकती है।
10. इस गतिविधि से संबंधित निम्नलिखित प्रश्नों पर चर्चा करें:
- a. इस गतिविधि को करते हुए क्या गिनने के सिद्धांतों का उपयोग हो रहा है? कैसे?
- b. इस गतिविधि में गिनने के सिद्धांतों के इतर किन कौशलों का उपयोग हो रहा है?
11. दूसरे प्रश्न को समेकित करें कि:

गिनना सीखने के साथ हमें गणित शिक्षण के उच्चतर उद्देश्यों को ध्यान में रखने की ज़रूरत होती है। इन उद्देश्यों को पाने का एक ज़रिया अपने पढ़ाने में गणित के कौशलों का समावेश करना भी है। इस गतिविधि को करते हुए न केवल गिनने के सिद्धांतों का उपयोग हो रहा है, वरन अन्य कौशल जैसे- अनुमान लगाना, तर्क करना, समूह में गिनना आदि भी इसमें शामिल हैं।

12. गिनती को पैटर्न के साथ कैसे जोड़ सकते हैं? संभागियों को इस प्रश्न पर विचार साझा करने का अवसर दें।

पैटर्न के ज़रिए गणित के कौशल, जैसे कि नियम की खोजबीन करना, सामान्य नियम लिखना, गणित पर बातचीत करना आदि को अपने पढ़ाने में शामिल किया जा सकता है।

13. इसके बाद इस मॉड्यूल के शुरुआत में अंकित गिनने की वांछित प्रक्रियाओं का प्रिन्टआउट सभी शिक्षकों को दें। उन्हें उन प्रक्रियाओं के सामने हाँ लिखने के लिए कहें जिन्हें वे अपनी कक्षा में गिनती/गिनना सिखाते हुए शामिल करना चाहेंगे।

सत्र चार- कार्यशाला की प्रभावशीलता जाँचना

समय- 30 मिनट

सत्र के उद्देश्य

1. कार्यशाला की प्रभावशीलता जाँचना।

सामग्री

1. प्रोजेक्टर एण्ड स्पीकर
2. गिनने पर शिक्षकों की प्रतिक्रिया वाली वर्कशीट

3. प्रक्रिया

1. हर संभागी को वर्कशीट की फोटोकॉपी दें।
2. हर संभागी को यह वर्कशीट हल करने के लिए दें। लगभग सभी सवाल बहुवैकल्पिक होंगे तो इसका उत्तर देने में संभागियों को ज़्यादा समय नहीं लगेगा।
3. वैकल्पिक तौर पर इस सत्र को एक माइक्रोसॉफ्ट फॉर्म बनाकर करें तो यह ज़्यादा दिलचस्प हो जाएगा।
4. इसके लिए वर्कशीट में दिए गए सवालों को फॉर्म में टाइप कर हर शिक्षक को दिया जा सकता है।
5. जब शिक्षक वर्कशीट पर अपनी प्रतिक्रिया दर्ज कर दें तो उसके बाद कार्यशाला करने वाली टीम में बैठें और शिक्षकों के जवाबों का विश्लेषण करें।
6. तय करें, कितने शिक्षकों के साथ इस विषय पर दोबारा काम करने की ज़रूरत है और कितने शिक्षक अवधारणा को अच्छे से समझ गए हैं?
7. जिन शिक्षकों ने वर्कशीट के सवालों को सही हल किया है, उनके स्कूल जाकर उनकी गिनती/गिनना पढ़ाने के तरीके का अवलोकन करें।

3.3 काम के प्रभाव का पता करना

चरण 4: काम के प्रभाव का पता करना— बेहतर शिक्षण प्रक्रियाएँ और बच्चों का बेहतर सीखना।

शिक्षक के पढ़ाने के तरीकों/प्रक्रियाओं के स्तर में: विषयवस्तु के अनुसार जो अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ होनी बेहद ज़रूरी हैं, उनके आधार पर।

शिक्षकों के पढ़ाने के तरीकों या प्रक्रियाओं में बदलाव को आँकने या प्रभावों को ट्रैक करने के लिए उपरोक्त दी गई प्रक्रियाओं की सूची का ही इस्तेमाल किया जाएगा। जैसे शिक्षकों की ज़रूरतों का विश्लेषण करने के लिए किया गया था। शिक्षकों के साथ योजना के अनुसार जुड़ने के बाद, हमें उनकी शिक्षण प्रक्रियाओं में आए परिवर्तन का एक अंतराल पर पुनः विश्लेषण करना चाहिए। इसे करने में Teacher dev. tracking दस्तावेज़ का उपयोग किया जाएगा। अपेक्षित प्रक्रियाओं का कितना % achieve होने पर हम किसी शिक्षक को उच्च प्रभावी शिक्षक कह रहे होंगे?

प्रभावों के विश्लेषण के बाद तीन स्थितियाँ हो सकती हैं:

स्थिति 1— कुछ शिक्षकों की कुछ शिक्षण प्रक्रियाओं में अपेक्षित बदलाव होगा और कुछ के साथ फिर से काम करने की ज़रूरत होगी।

चरण 4a: हम पाएंगे कि कुछ शिक्षकों ने कक्षा में कुछ अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाओं को करना शुरू किया है, जबकि कुछ प्रक्रियाओं पर पुनः काम करने की आवश्यकता है। इन शिक्षकों की प्रक्रियाओं का पुनः विश्लेषण करना होगा और फिर से संशोधित ज़रूरतों के अनुसार need cohort बनाकर योजनाबद्ध तरीके से काम करना होगा।

नोट: इस समूह को चरण 2 से फिर से आगे बढ़ाना होगा।

स्थिति 2— कुछ शिक्षक बेहतर शिक्षण प्रक्रियाओं को कक्षा-कक्ष में करने लगेंगे और बच्चों का सीखना भी बेहतर हो रहा होगा।

चरण 4b: हम पाएंगे कि कुछ शिक्षक अधिकांश अपेक्षित प्रक्रियाओं को करने लगते हैं और उन्हें अब हमारी मदद की बहुत आवश्यकता नहीं है। हमें अनावश्यक रूप से उनके साथ नहीं जुड़ना चाहिए और न ही मदद के लिए उनके स्कूलों में जाना चाहिए। इसके बजाय यह कोशिश करनी चाहिए कि हम उन्हें अपने या दूसरे सरकारी मंचों पर अपने अनुभव साझा करने के लिए या अपनी प्रक्रियाओं को प्रदर्शित करने के लिए प्रेरित करें और मौके उपलब्ध करवाएँ।

स्थिति 3— हम अवलोकनकर्ता से शिक्षक की अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाओं में कोई बदलाव नहीं पाएंगे। ऐसे में अगर हमें लगता है कि उन्हें उसी need cohort में रखना मदद करेगा तो हम उन्हें उसी cohort में रखेंगे। यदि हम पाते हैं कि वे अपनी कक्षा में काम करने के लिए बहुत उत्सुक नहीं हैं, तब हमें उन पर बहुत अधिक ध्यान नहीं देना चाहिए। हालाँकि वे हमारे कार्यक्रमों में आना ज़ारी रख सकते हैं।

बच्चों के सीखने के स्तर में

सीखने-सिखाने की प्रक्रिया (Pedagogical Processes) में अंतिम उत्पाद यानी सीखने के परिणामों पर ज़ोर देने से उन्हें बिना समझे रटकर प्राप्त करने का प्रयास किया जाने लगता है। गणित भी इससे अछूता नहीं है। गणित सीखने में अंतिम उत्पाद पर ज़ोर देने से तथ्यों को याद करने और बिना समझ के एल्गोरिदम के प्रयोग को बढ़ावा मिलता है। इसके साथ ही यह बच्चों में गणितीय विचारों तथा अवधारणाओं का दैनिक जीवन में उपयोग करने में अड़चन पैदा करता है। इन बातों का ध्यान रखते हुए शिक्षक से यह अपेक्षा है कि गणित की विभिन्न अवधारणाओं को सिखाने के दौरान बच्चों को ऐसे अवसर प्रदान करें जिससे वे अपने आस-पास के वातावरण की छानबीन कर सकें तथा उनसे संबंध स्थापित कर सकें।

गणित विषय सीखना या इसके प्रति समझ विकसित करना न केवल समस्या समाधान करने की योग्यता बढ़ाता है, बल्कि तर्कपूर्ण ढंग से सोचने के कौशल का विकास भी करता है। यह बच्चों को सटीक, व्यवस्थित और तार्किक ढंग से सोचने व स्पष्ट रूप से अभिव्यक्त करने में सहायता करता है। ये कौशल या योग्यताएँ वास्तविक जीवन की परिस्थितियों में सहायक होते हैं और दिन-प्रतिदिन की समस्याओं को हल करने में मदद करते हैं। सीखने-सिखाने व आकलन के दौरान गणित शिक्षण के उद्देश्यों एवं गणितीय कौशलों को ध्यान में रखना आवश्यक है।

विद्यालयों में लिखित टेस्ट/परीक्षा पर अधिक ज़ोर होने के कारण शिक्षक लिखित कार्यों को सर्वाधिक महत्वपूर्ण मानते हैं और उसे ही ध्यान में रखकर कक्षागत गतिविधियाँ करते हैं। गणित की कक्षा में जिस तरह सीखने-सिखाने के दौरान मूर्त वस्तुओं, भाषा, चित्र और फिर संकेतों यानी अमूर्त की ओर जाना है, उसी तरह आकलन के दौरान भी इन्हें ध्यान में रखा जाना होगा। आकलन के लिए भी ठोस वस्तुओं के साथ गतिविधियों, मौखिक चर्चा एवं लिखित कार्य को संतुलित स्थान देना होगा। जिससे समग्र रूप से बच्चे की वास्तविक स्थिति समझने में मदद मिले। यह तरीका बच्चों के उत्तर देने के विशिष्ट तरीकों तथा उनके पीछे के तर्कों को अभिव्यक्त करने पर बल देता है। उदाहरण के लिए, बच्ची एक पैटर्न को किसी विशेष ढंग से ही क्यों बनाना चाहती है? या बच्चा/बच्ची बता सके, किसी अभ्यास को किसी खास तरीके से करने के क्या कारण थे? यहाँ पर उदाहरण के रूप में कुछ सामग्री दी गई है, जिसमें अवलोकनकर्ता कक्षा में बच्चों की प्रगति का अवलोकन तथा आकलन करने के लिए विभिन्न तरीकों का उपयोग कर रहे हैं। यह सामग्री आपको कक्षा की स्थिति की समझ उपलब्ध कराएगी कि कैसे आकलन बच्चे के सीखने और संपूर्ण विकास में उपयोगी है।

कक्षा 1

थीम- संख्या की समझ

सामग्री- खाली माचिस, कुछ बीज (जैसे चना), प्लास्टिक के मोती (लगभग 100 नग), माला बनाने के लिए धागा, माचिस में रखने के लिए पर्चियाँ, डार्ड्स जिस पर अंक व बिन्दु (1 से 6 तक) बने हों।

गतिविधि के उद्देश्य:

- क्या बच्चे ठोस वस्तुओं को गिनकर उनकी संख्या बता व लिख पाते हैं?
- क्या बच्चे लिखी हुई संख्या को समझकर उतनी ही ठोस वस्तुएँ गिन पाते हैं?
- बच्चे 1 से 20 तक की संख्याओं में से कितनी संख्याओं को समझ के साथ पढ़ और लिख पाते हैं?

गतिविधि- अवलोकनकर्ता ने सोचा और योजना बनाई कि 1 से 20 तक की संख्याओं की समझ के बारे में पता लगाने के लिए बच्चों से कुछ गतिविधियाँ करवाई जाएँ। यह गतिविधि 4-4 बच्चों की टोलियों में करेंगे। शिक्षक पहली टोली को लगभग 10-15 माचिस की डिब्बी, जिनमें अलग-अलग संख्या में बीज (बीज 4 से 20 के बीच की संख्या में) रखे हैं एवं कुछ पर्चियाँ दे देते हैं।

अवलोकनकर्ता- 'मैंने हर माचिस में बीज तो रख दिए, पर किसमें कितने बीज के दाने रखे हैं, इसकी पर्ची रखना भूल गया। क्या आप लोग इसमें मदद कर सकते हो? आप लोग इन माचिस में रखे बीज गिनकर पर्ची पर लिखो और पर्ची को माचिस की डिब्बी में डाल दो।'

अवलोकनकर्ता दूसरी टोली वाले बच्चों को 10-15 माचिस की डिब्बी, जिनमें अलग-अलग संख्या लिखी पर्ची है, साथ ही एक थैली है जिसमें कुछ बीज रखे हैं, देते हैं।

अवलोकनकर्ता- 'आप लोगों को माचिस की डिब्बी में रखी पर्ची के अनुसार बीज गिनकर माचिस में रखना है।'

तीसरी टोली वाले बच्चों को शिक्षक 10-15 माला, जिनमें अलग-अलग संख्या में मोती पिरोए हैं, देते हैं।

अवलोकनकर्ता- 'हरेक माला में एक पर्ची लगी है, मोती 4 से 20 के बीच की संख्या में हैं। आप लोगों को मोती गिनकर पर्ची पर लिखना है।'

अवलोकनकर्ता चौथी टोली को एक थैली देते हैं, जिसमें माला बनाने के लिए मोती, धागा और साथ ही संख्या लिखी पर्चियाँ हैं।

अवलोकनकर्ता- 'आप लोग एक-एक पर्ची उठाओ और उस पर लिखी संख्या के अनुसार माला में मोती पिरोओ। माला के साथ वह पर्ची भी लगानी है, जिससे पता लग सके कि आपने कितने मोती पिरोए हैं।'

अवलोकनकर्ता द्वारा अवलोकन	आकलन बिन्दु
<p>बच्चे अपना काम कर रहे हैं। शिक्षक उनके पास जाकर अवलोकन करते हैं तथा बच्चों का आकलन भी करते हैं कि:</p> <ul style="list-style-type: none"> • बच्चे कैसे काम कर रहे हैं? • बच्चे कैसे बीज गिन रहे हैं, एक-एक करके या दो-तीन के समूह में? • क्या वे अपने-अपने काम में व्यस्त हैं या एक-दूसरे की मदद कर रहे हैं? • किस-किस तरह की मदद कर रहे हैं? गिनने में, सामग्री उठाकर देने में आदि। • अगर कोई बच्चा अटका है तो टोली वाले उसकी मदद कर रहे हैं या नहीं? 	<ul style="list-style-type: none"> • बच्चा वस्तुएँ गिन पाता है या नहीं? • बच्चा संख्याएँ बोल पाता है या नहीं? • दी गई संख्याओं के अनुसार वस्तुओं का समूह बना पाता है या नहीं? • संख्याओं को संख्यांकों द्वारा पहचान पाता है या नहीं? • बोली हुई संख्याएँ लिखकर दिखा पाता है या नहीं? • संख्याओं व वस्तुओं के समूहों में संगतता समझ पाता है या नहीं?
<p>शिक्षक ने अलग-अलग टोलियों के बच्चों को दी गई समस्या व गिनने से संबंधित प्रश्न भी पूछे:</p> <p>टोली 1- इस माचिस में कितने दाने थे? कैसे गिने? गिनकर बताओ। पर्ची पर क्या लिखा है?</p> <p>टोली 2- माचिस की पर्ची पर क्या लिखा है? इस संख्या के अनुसार कितने दाने होंगे? क्या टोली के दूसरे सदस्यों ने इसकी जाँच की है?</p> <p>टोली 3- माला में कितने मोती थे? पर्ची पर कौन-सी संख्या लिखी है? क्या मोती व लिखी हुई संख्या बराबर है?</p> <p>इस प्रकार टोली 4 से भी प्रश्न पूछे गए, जिससे शिक्षक ने यह नोट किया कि बच्चों की 1 से 20 तक की संख्याओं की समझ कितनी है?</p>	<ul style="list-style-type: none"> • बच्चों द्वारा किए गए कार्य का प्रश्नों के ज़रिए फिर से विश्लेषण कर पाना। • किए गए कार्य से गणित की संकल्पनाओं को सीख पाना। • बच्चों के सीखने का आकलन करना। • सीखने-सिखाने की प्रक्रिया का आकलन करना।

- सीखने-सिखाने के समय अवलोकनकर्ता द्वारा आकलन: इन प्रश्नों के उत्तर से शिक्षक यह जान पाता है कि बच्चों में 1-20 तक की संख्याओं के बारे में समझ है या नहीं। अवलोकनकर्ता ने यह भी नोट किया कि बच्चे अपनी बात स्पष्ट रूप से कह पा रहे हैं या नहीं।
- जो बच्चे गतिविधि नहीं कर पाए, उनके साथ अलग टोली बनाकर अवलोकनकर्ता बिन्दी वाली डाइस और कंकड़ से खेल खेलते हैं। अवलोकनकर्ता बच्चों से कहते हैं कि डाइस पर जितनी संख्या आए उतने कंकड़ उठाकर अपने पास रखो। यही संख्या अपनी कॉपी में लिखो।

- खेल सुचारू रूप से चलाने के लिए उसके कुछ नियम बनाए जा सकते हैं। बच्चों को भी नियम बनाने के लिए प्रोत्साहित किया जा सकता है।
- इस खेल द्वारा अवलोकनकर्ता यह जान सकता है कि इन बच्चों की संख्याओं के बारे में समझ बनी है या नहीं।

क्रमांक	बच्चे का नाम	वस्तुएँ गिन पाता है	संख्याएँ बोल पाता है	संख्या के अनुसार वस्तु दे पाता है	संख्या के अनुसार संख्यांक पहचान पाता है	बोली हुई संख्या लिख पाता है	वस्तुओं के समूह को संख्या से बता पाता है

सभी बच्चों की स्थिति के आधार पर हम कक्षा की स्थिति का आकलन कर सकते हैं। इसी तरह विभिन्न अवधारणाओं की समझ का आकलन करते समय हमें अध्याय 2 में दी गई अवधारणात्मक समझ एवं गणितीय कौशलों को ध्यान में रखना होगा। साथ ही हम निम्नांकित प्रक्रियागत बातों को ध्यान में रख सकते हैं:

- क्या बच्चे बिना भय के आकलन की गतिविधि में सहभागिता कर रहे हैं?
- क्या बच्चे सवाल पूछ रहे हैं?
- सवाल में क्या दिया है, क्या पता करना है और कैसे पता करेंगे जैसे प्रश्नों के उत्तर क्या बच्चे दे पाते हैं?
- क्या वे अपने-अपने उत्तर के पक्ष में तर्क रख पा रहे हैं?
- यदि उन्हें किसी नई परिस्थिति से सम्बन्धित सवाल दिया जाता है तो वे क्या करते हैं?

इसके अलावा FoSL (Framework of Student Learning) की मदद से भी बच्चों के सीख स्तर का आकलन कर सकते हैं। बच्चों के स्तर को जाँचने और समझने के लिए हमें कक्षावार सभी अवधारणाओं के लिए सीखने के प्रतिफलों को ध्यान में रखना होगा। शिक्षक के प्रयासों और प्रक्रियाओं में आए सकारात्मक बदलाव के प्रभाव को हम उनकी कक्षा के बच्चों के स्तर को आधार बनाते हुए जान सकते हैं। कक्षावार कुछ अवधारणाओं के लिए सीखने के प्रतिफल नीचे तालिका में दिए गए हैं:

संकेतक (ग्रेड I-II)	आकलन प्रक्रिया (सुझाव)
20 तक की वस्तुओं को ठोस, चित्र और प्रतीक के रूप में गिनता है।	कुछ ठोस वस्तुओं को लेकर पूछना कि समूह में कितनी वस्तुएँ हैं। अवलोकन करना कि बच्चा संख्या नामों को सही क्रम में बोल रहा है कि नहीं। बड़े समूह में से बच्चे को बोली गई संख्या के बराबर वस्तुएँ देने को कहना। बच्चे से वस्तुओं के दो समूहों में तुलना करने को कहना। दो या दो से अधिक संख्याओं को दिखाते हुए इनकी तुलना करने एवं अनुमान लगाने को कहना।

संकेतक (ग्रेड I-II)	आकलन प्रक्रिया (सुझाव)
शून्य की अवधारणा विकसित कर लेता है।	गीता के पास चार चॉकलेट हैं। उसने चारों चॉकलेट अपनी बहन को दे दिए तो अब गीता के पास कितने चॉकलेट हैं?
1 से 20 तक की संख्याओं के जोड़ व घटाव का अपने दैनिक जीवन में उपयोग करता है।	20 तक की संख्याओं के जोड़-घटाव से संबंधित छोटे इबारती सवाल पूछना, जिनमें उनके दैनिक जीवन की परिस्थितियाँ शामिल हों।
दो अंकों की संख्याओं की पहचान करता है, लिखता है, तुलना कर लेता है, सबसे बड़ी संख्या एवं सबसे छोटी संख्या को बता पाता है, जोड़-घटाव से संबंधित छोटे इबारती सवाल हल कर लेता है।	<p>चार्ट या बोर्ड पर लिखी 1-100 तक की गिनती में से संख्याओं को पहचानने और कुछ संख्याओं को लिखने के लिए कहना।</p> <p>दो अंकों की संख्याओं को इकाई, दहाई में तोड़ पाना। 99 तक की संख्याओं के जोड़-घटाव से संबंधित छोटे इबारती सवाल पूछना, जिनमें उनके दैनिक जीवन की परिस्थितियाँ शामिल हों।</p>
संकेतक (ग्रेड I-III)	आकलन प्रक्रिया (सुझाव)
वस्तुओं को गिनकर संख्या या समूह की मात्रा को बताता है और समूहों में तुलना करता है। (3 अंकों की संख्याओं तक)	ठोस वस्तुओं की सहायता से बच्चों से पूछा जा सकता है कि- किसी समूह में कितनी वस्तुएँ हैं? वस्तुओं के दो समूहों में तुलना करें। पता करें, कौन-सा समूह अधिक संख्या वाला है? (3 अंकों की संख्याओं तक)
दैनिक जीवन से जुड़े प्रश्न (लिखित और मौखिक) / संख्या के रूप में लिखे प्रश्न को 1 से 3 अंकों की संख्याओं के जोड़ एवं घटाव का इस्तेमाल करते हुए हल करता है और प्रश्न बनाता है।	<p>बच्चों के अनुभव से जुड़े सरल इबारती सवाल पूछना। बच्चे खुद से कुछ इबारती सवाल तैयार करेंगे।</p> <p>बिना हासिल और उधार वाला जोड़-घटाव, और फिर आड़ी एवं खड़ी लाइन में हासिल और उधार वाला जोड़-घटाव।</p>
स्थानीय मान की अवधारणा को समझता है। इसका इस्तेमाल संख्याओं के साथ कार्य करने एवं सरल जोड़-घटाव करने में करता है।	<p>दो अंकों की संख्याओं को इकाई और दहाई या तीन अंकों की संख्याओं को सैकड़ा, दहाई और इकाई में तोड़ पाना। वर्कशीट का प्रयोग करते हुए स्थानीय मान पर अभ्यास करवाना। जैसे- बोर्ड पर तीन अंकों की संख्या लिखकर (345, 138, 321, 500 आदि) पूछें, कौन-सी संख्या लिखी गई है? संख्याओं को विस्तारित रूप में लिखें। संख्याओं को शाब्दिक रूप तथा संख्या रूप में लिखें। फिर संख्याओं में तुलना करने के लिए दें।</p> <p>हासिल और उधार वाले जोड़-घटाव के सवाल हल करने दें। बच्चों से बात कर उनके तरीके के पीछे का तर्क समझने का प्रयास करें।</p>

संकेतक (ग्रेड IV-V)	आकलन प्रक्रिया (सुझाव)
संख्याओं के पैटर्न का अवलोकन करता है, उनको आगे बढ़ाता है और उनका निर्माण करता है।	साधारण पैटर्न को आगे बढ़ाने और उसके नियम के बारे में बताने को कहें। स्वयं से कुछ संख्या पैटर्न का भी निर्माण कराएँ।
गणितीय संक्रियाओं का उपयोग करते हुए दैनिक जीवन की समस्याओं को हल करता है। जैसे- जोड़-घटाव पर साधारण गणना, रुपये-पैसे, लम्बाई, वजन, धारिता एवं समय से जुड़ी समस्याएँ।	रुपये-पैसे, लम्बाई, वजन, धारिता और समय को लेकर जोड़-घटाव से संबंधित इबारती सवाल देना। यहाँ सवाल संक्रिया की सभी श्रेणियों जैसे- जोड़ (एकत्रीकरण और वृद्धि), और घटाव (हिस्से करना, कमी, तुलना, पूरक जोड़) से होगा।
जोड़ और घटाव से संबंधित इबारती सवाल का स्वयं से निर्माण करता है।	बच्चों को कोई भी संख्याएँ देना और उन पर आधारित प्रश्नों के निर्माण के लिए प्रोत्साहित करना।

3.3.1 कक्षावार सीखने के प्रतिफल

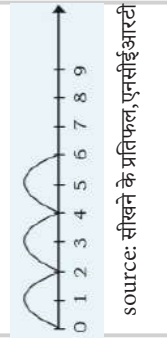
इस भाग में हम NCERT के संबंधित दस्तावेज़ पर आधारित सीखने के प्रतिफलों की सूची कक्षावार दे रहे हैं। ये हमारे काम के असर को जानने (effects tracking) का आधार होंगे।

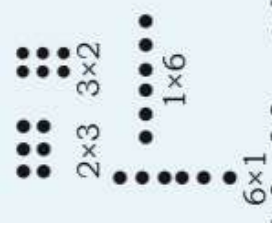


कक्षावार सीखने के प्रतिफल						
कक्षा	अवधारणा	एक	दो	तीन	चार	पाँच
	संख्या-पूर्व अवधारणाएँ	<ul style="list-style-type: none"> स्थानिक सम्बन्ध जैसे- ऊपर-नीचे, दूर-पास, अन्दर-बाहर, पहले-बाद, मोटा-पतला, छोटा-बड़ा आदि समझना। ठोस वस्तुओं, परिवेश की चीजों और चित्र का उपयोग कर इन संदर्भों पर आधारित मौखिक सवाल-जवाब करें। मूर्त वस्तुओं या मॉडलों का उपयोग कर उनका वर्गीकरण करें, छूकर तथा अवलोकन द्वारा वर्गीकरण करें। पैटर्न का अवलोकन, विस्तार तथा निर्माण करें। क्रम की समझ पर आधारित सवाल हल करें। पहचान करना, मिलान करना, छांटना या समूह बनाना जैसे कौशलों को पुख्ता करें। तुलना तथा मापन की समझ विकसित करें। 				

कक्षावार सीखने के प्रतिफल					
कक्षा	एक	दो	तीन	चार	पाँच
अवधारणा	<ul style="list-style-type: none"> • एक-एक की संगति समझना और उपयोग करना। 				
संख्या-पूर्व अवधारणाएँ	<ul style="list-style-type: none"> • दो समूह में वस्तुएँ रखकर एक-एक की संगति द्वारा कम-ज्यादा को समझें। कम, ज्यादा तथा बराबर है जैसे शब्दों का उपयोग करें। 				
गिनना	<ul style="list-style-type: none"> • वस्तुओं को गिनें, किसी समूह से 9 तक वस्तुएँ निकाल सकें। • शून्य की अवधारणा (एक संख्या के तौर पर) को समझें।। • किसी समूह से 20 तक वस्तुएँ गिनकर निकाल सकें। • 9 तक के अंकों का योग करने के विभिन्न तरीके खोजें व जोड़ तथ्यों को समझें। • संख्या नाम, मात्रा और संख्या चिह्न समझें। • संख्याओं को लिखना सीखें। • संख्या नाम और संख्या चिह्न में निहित पैटर्न समझ सकें। 				

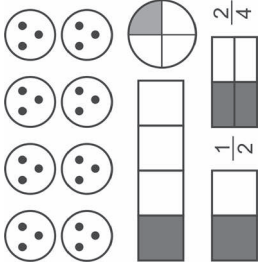
कक्षावार सीखने के प्रतिफल					
कक्षा	एक	दो	तीन	चार	पाँच
अवधारणा					
स्थानीय मान	<ul style="list-style-type: none"> पैटर्न का अवलोकन कर अपने शब्दों में कहें। पैटर्न का अवलोकन, विस्तार तथा निर्माण करें। 20 तक और 20 से बड़ी दो अंकों की संख्याओं की माला को दस के समूह तथा खुली इकाइयों के रूप में समझें, इसी अनुसार वस्तुओं को गिनें। 0 की अवधारणा को समझें। 	<ul style="list-style-type: none"> संख्याओं के नाम तथा संख्या लिखने का पैटर्न पहचानें। दो अंकों की संख्याओं की माला को दर्शाने, संख्या पहचानने, लिखने व तुलना की प्रक्रिया में किसी संख्या में अंकों के स्थानीय मान की समझ का उपयोग करें। संख्या के किसी स्थान पर 0 होने के मतलब को समझें। स्थानीय मान की समझ के आधार पर दो अंकों की संख्याओं का जोड़-घटाव करें तथा अपने तरीके खोजें। 	<ul style="list-style-type: none"> बड़ी संख्या में उपलब्ध वस्तुओं को 100 के समूह, 10 के समूह और इकाइयों के रूप में गिनें। तीन अंकों की सबसे बड़ी तथा सबसे छोटी संख्या लिखने के लिए स्थानीय मान का उपयोग करें। 999 तक की संख्याओं को स्थानीय मान की मदद से पढ़ें तथा लिखें। इन संख्याओं की तुलना स्थानीय मान के आधार पर करें। 		<ul style="list-style-type: none"> 1000 से बड़ी संख्याओं को स्थानीय मान के आधार पर समझकर चार मूल सक्रियाएँ करें। स्थानीय मान की समझ का उपयोग करते हुए मानक विधि से सवालों को हल करें।
जोड़-घटाव	<ul style="list-style-type: none"> 9 तक की संख्याओं के जोड़ तथ्य बनाना। 1 से 9 तक की संख्याओं का उपयोग कर घटाने की क्रिया। 	<ul style="list-style-type: none"> नोट तथा सिद्धों के उपयोग से 100 तक की मान वाली खेल मुद्रा को दर्शाना। जोड़-घटाव पर आधारित अपने सन्दर्भ, स्थितियाँ तथा प्रश्न विकसित करें। 	<ul style="list-style-type: none"> दैनिक जीवन की समस्याओं को हल करने में 3 अंकों की संख्याओं में जोड़-घटाव कर सकें। ग्राम, किलोग्राम की माला को जोड़ना-घटाना कर सकें। 	<ul style="list-style-type: none"> मुद्रा, लम्बाई, भार, धारिता आदि के सन्दर्भ में जोड़-घटाव के सवाल हल करना। जोड़-घटाव के सन्दर्भ पर आधारित इबारती सवाल बनाना। 	<ul style="list-style-type: none"> मानक विधि का उपयोग करते हुए जोड़-घटाव करना। अनुमान लगाना तथा मानक विधि से हल करके जाँच करना।

कक्षावार सीखने के प्रतिफल					
कक्षा	एक	दो	तीन	चार	पाँच
जोड़-घटाव	<ul style="list-style-type: none"> 9 तक की संख्या में प्रतिदिन होने वाला जोड़ना-घटाना। दैनिक जीवन में 1 से 20 तक की संख्याओं का उपयोग जोड़-घटाव में करना। 	<ul style="list-style-type: none"> दो समूहों को मिलाना और समूह में वृद्धि वाले सवाल हल करें। जोड़ने-घटाने के लिए नए तरीकों का उपयोग करें। 99 तक की 2 अंकों की संख्याओं में जोड़-घटाव कर सकें। 		<ul style="list-style-type: none"> तीन अंकों की संख्याओं में जोड़-घटाव करना। 	<ul style="list-style-type: none"> पैसा, लम्बाई, भार, आयतन आदि के सन्दर्भ में जोड़-घटाव करना। 1000 से बड़ी संख्याओं में जोड़-घटाव करना।
गुणा	<ul style="list-style-type: none"> आकृतियों तथा संख्याओं के पैटर्न का अवलोकन, विस्तार तथा निर्माण करना। बराबर समूह बनाना। 	<ul style="list-style-type: none"> ऐसी परिस्थितियाँ बनाएँ जहाँ पर एक संख्या का बार-बार जोड़ करना पड़ता है। आकृतियाँ, अंगूठे के निशान, पत्तियों के निशान तथा संख्याओं आदि की सहायता से बने पैटर्न का विस्तार करें। 	<ul style="list-style-type: none"> 2, 3, 4, 5 तथा 10 के गुणन तथ्य बनाना-छोड़कर गिनना, बार-बार जोड़कर गिनना तथा दैनिक परिस्थितियों में उनका उपयोग करना। 	<ul style="list-style-type: none"> छोड़कर गिनना, पैटर्न का विस्तार आदि के माध्यम से गुणन तथ्यों को खोजना। दो अंकों की संख्या का विस्तार कर गुणन करना। जैसे 23 को 6 से गुणा करना: $23 \times 6 = (20 + 3) \times 6$ $= 20 \times 6 + 3 \times 6$ $= 120 + 18$ $= 138$	<ul style="list-style-type: none"> गुणन तथ्यों, संख्या रेखा पर छोड़कर गिनना और संख्या ग्रिड के आधार पर किसी संख्या के गुणज (multiples) की अवधारणा को समझना। संख्याओं के पैटर्न खोजकर उन पर आधारित नियम बनाना। जैसे- वर्ग संख्याओं का पैटर्न।



कक्षा		कक्षावार सीखने के प्रतिफल					
		अवधारणा	एक	दो	तीन	चार	पाँच
गुणा				<ul style="list-style-type: none"> उपलब्ध वस्तुओं को 100 के समूह, 10 के समूह और इकाइयों के रूप में गिनना एवं इस समझ का उपयोग गुणा में करना। मूर्त वस्तुओं को व्यवस्थित करना और अलग-अलग गुणन तथ्यों की समझ विकसित करना। जैसे- 6 आर्मों को अलग-अलग तरीकों से दर्शाया जा सकता है। 	<ul style="list-style-type: none"> दैनिक जीवन की समस्याओं पर आधारित गुणा के प्रश्न बनाना तथा प्रश्नों को हल करना। जैसे- यदि 1 पेन की कीमत 35 रुपये है तो 7 पेन की कीमत कितनी होगी? गुणा के सवाल हल करने के लिए मानक कलन विधि का उपयोग करना। 		
							

कक्षावार सीखने के प्रतिफल					
कक्षा	एक	दो	तीन	चार	पाँच
अवधारणा					
भाग			<ul style="list-style-type: none"> बराबर बाँटना, समूह बनाना तथा उसे गणितीय रूप में दैनिक जीवन से सम्बंधित करना। भाग के तथ्यों को बराबर बाँटने और बार-बार घटाने या बराबर समूह बनाने की प्रक्रियाओं के रूप में समझते हैं। उदाहरण के लिए $12 \div 3$ में 12 को 3 जगह बराबर-बराबर बाँटने पर हरेक को 4 मिलेगा तथा 12 में से 3 को बार-बार घटाने की प्रक्रिया 4 बार में संपन्न होगी यानी 12 से $3-3$ के 4 बराबर समूह बनेंगे। 	<ul style="list-style-type: none"> भाग क्रिया के लिए समूह बनाएँ, जैसे $24 \div 3$ का अर्थ यह पता करना है कि 24 में 3-3 के कितने समूह हो सकते हैं, या 3-3 के कितने समूह मिलकर 24 बनाते हैं। एक संख्या का दूसरी संख्या में विभिन्न तरीकों से भाग देना। चित्तों द्वारा, बराबर बाँटकर, बार-बार घटाकर, भाग तथा गुणा के अंतर्सम्बंधों का उपयोग करना। भाग में पैटर्न की पहचान करना। 	<ul style="list-style-type: none"> भाग देने के विभिन्न तरीकों का प्रयोग। जैसे- बराबर बाँटना, गुणन की विपरीत क्रिया। संख्याओं के भाग तथा गुणजों के आधार पर गुणनखंड की अवधारणा को समझें। दैनिक जीवन के सन्दर्भ/स्थितियों के बारे में चर्चा कर एक समूह के हिस्से समझें, जैसे- आधा दर्जन में कितने केले होंगे? मानक एल्गोरिथम द्वारा एक संख्या में दूसरी संख्या का भाग देना।
भिन्न			<ul style="list-style-type: none"> बराबर बाँटना, समूह बनाना तथा उसे गणितीय रूप से अपने दैनिक जीवन से जोड़कर समझना। 	<ul style="list-style-type: none"> भाग क्रिया के लिए समूह बनाएँ, जैसे $24 \div 3$ का अर्थ यह पता करना है कि 24 में 3 के कितने समूह हो सकते हैं, या 3-3 के कितने समूह मिलकर 24 बनाते हैं। 	<ul style="list-style-type: none"> दैनिक जीवन के सन्दर्भ/स्थितियों के बारे में चर्चा कर एक समूह के बराबर हिस्से को समझें। जैसे- आधा दर्जन में कितने फल होंगे?

कक्षावार सीखने के प्रतिफल					
कक्षा अवधारणा	एक	दो	तीन	चार	पाँच
भिन्न					<ul style="list-style-type: none"> • विभिन्न तरीके जैसे- कागज़ मोड़कर, चित्रों में छायांकन के द्वारा भिन्नों की तुलना करें। • विभिन्न गतिविधियों द्वारा तुल्य भिन्न को समझें। जैसे- कागज़ मोड़ना और छायांकन। • दशमलव भिन्न (1/10वाँ भाग, 1/100वाँ भाग) की अवधारणा समझें। • समूह के हिस्से के लिए भिन्न संख्या बनाएँ। • दिए गए भिन्न के समतुल्य भिन्न की पहचान करना तथा समतुल्य भिन्न बनाना। • दिए गए भिन्न 1/2, 1/4, 1/5 को दशमलव भिन्न के रूप में लिखें। लम्बाई, मुद्रा आदि की इकाइयों को समझें। • भिन्न को दशमलव संख्या तथा दशमलव संख्या को भिन्न में लिखें।
				<ul style="list-style-type: none"> • भिन्न संख्याएँ जैसे- आधा, एक चौथाई, तीन चौथाई पर चर्चा करें। इसे दैनिक जीवन से जोड़कर समझें। • भिन्न संख्याओं को चित्रों / कागज़ को मोड़ने की गतिविधियों द्वारा प्रस्तुत करें। जैसे- चित्र के आधे भाग में रंग भरें। • दिए गए चित्र अथवा वस्तुओं के समूह में से आधा, एक चौथाई, तीन चौथाई भाग को पहचानें। • संख्याओं/संख्याकों की मदद से भिन्नों को आधा, एक-चौथाई तथा तीन चौथाई के रूप में प्रदर्शित करें। • किसी भिन्न की अन्य भिन्न से तुल्यता बनाएँ। 	

कक्षावार सीखने के प्रतिफल					
कक्षा	एक	दो	तीन	चार	पाँच
दशमलव					<ul style="list-style-type: none"> दशमलव भिन्न (1/10) की अवधारणा को समझें। भिन्न को दशमलव संख्या तथा दशमलव संख्या को भिन्न में लिख सकें।

3.3.2 अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाओं की सूची

प्रत्येक अवधारणा के लिए अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ अध्याय 2 में दी गई हैं। यहाँ हम सारी प्रक्रियाओं को एक साथ लिख रहे हैं। शिक्षक के काम के अवलोकन के दौरान कुछ ऐसी बातों को भी ध्यान में रखना ज़रूरी है जो न केवल गणित, बल्कि शिक्षा और स्कूलिंग माल के संदर्भ में बेहद महत्वपूर्ण हैं। जिनके बगैर बेहतर शिक्षण की कल्पना नहीं की जा सकती। ऐसी कुछ चुनिन्दा बातों को यहाँ रखा जा रहा है:

- शिक्षक भयमुक्त वातावरण बनाने के लिए प्रयास करते हैं और किसी प्रकार के दंड-भय-दबाव का इस्तेमाल नहीं करते हैं।
- शिक्षक बच्चों की सामाजिक-आर्थिक स्थिति, लैंगिक पहचान, रूप-रंग आदि को आधार बनाकर कोई नकारात्मक और अपमानजनक टिप्पणी नहीं करते हैं और कोई ऐसा करता है तो उसे भी रोकते/समझाते हैं।
- बच्चों की विविध ज़रूरतों को समझते हैं और उन्हें पूरा करने के लिए धैर्य और कुशलतापूर्वक निरंतर प्रयासरत रहते हैं। किन्हीं कारणों से यदि कुछ बच्चे पिछड़ रहे हों तो उन पर अतिरिक्त ध्यान देते हैं और विविध ज़रूरतों के हिसाब से अपनी शिक्षण प्रक्रिया में आवश्यक बदलाव कर पाते हैं।
- सभी बच्चों का सीखना सुनिश्चित करने के प्रति शिक्षक की प्रतिबद्धता नज़र आती है। इसके अंतर्गत सभी बच्चों के प्रति सम्मान और स्वीकृति का भाव रखते हैं। जाति, लिंग, धर्म, या किसी अन्य पूर्वाग्रह के आधार पर बच्चों के बीच भेदभाव नहीं करते। सभी के साथ समान और निष्पक्ष व्यवहार करते हैं।
- बच्चों की सामाजिक-सांस्कृतिक पृष्ठभूमि के प्रति संवेदनशीलता रखते हैं और इस सन्दर्भ में चुनौतीपूर्ण पृष्ठभूमि के बच्चों के प्रति समानुभूति का भाव रखते हैं।

प्राथमिक गणित की चुनी गई अवधारणाओं के लिए अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाओं की सूची इस प्रकार है। ये सारी प्रक्रियाएँ उन्हीं सात अवलोकन क्षेत्रों पर आधारित हैं जिनका हमने इस handbook में बार-बार ज़िक्र किया है।

अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)- संख्या-पूर्व अवधारणाएँ और गिनना

1. बड़ा-छोटा, मोटा-पतला, एक-एक मिलान आदि के लिए दैनिक जीवन की घटनाएँ, पात्रों अथवा वस्तुओं का उपयोग करते हैं।
2. संख्या की ऐसी परिस्थिति बनाते हैं, जहाँ पर संख्यात्मक रूप से तुलना करने की ज़रूरत पड़े। उदाहरण के लिए मेले से दो अलग-अलग कीमत के खिलौने को महंगा और सस्ता खिलौना बताना।
3. समूह में गिनने के लिए दी गई चीज़ों के चित्र को किसी संदर्भ के साथ जोड़ते हैं। उदाहरण के लिए 12 चिड़ियों के चित्र को दो-दो के समूह बनाकर गिनने के लिए किसी कहानी के माध्यम से बताते हैं।
4. दैनिक जीवन के संदर्भों जैसे कि कंकड़/पत्थर गिनवाना, कुर्सी/टेबल, घंटी आदि को लेकर गिनने की प्रक्रिया पर काम करते हैं।
5. संख्या-पूर्व अवधारणाएँ, जैसे कि एक-एक की संगति, क्रम, छाँटना और तुलना का उपयोग करते हुए गिनने की प्रक्रिया पर समझ बनाने का काम करते हैं।
6. गिनवाते हुए एक-एक की संगति और संख्या नाम की क्रमबद्धता की समझ को प्रक्रिया में शामिल करते हैं।
7. मात्रा की समझ को विकसित करने के लिए चीज़ों को देकर पूछते हैं कि यह कितनी हैं या संख्या बोलकर उस संख्या के बराबर चीज़ों को उठाने के लिए कहते हैं।
8. गिनती पढ़ाते हुए इस तरह के संदर्भों का भी इस्तेमाल करते हैं जिनको गिनने के लिए छूने की ज़रूरत न पड़े। उदाहरण के लिए घंटी की आवाज गिनने के लिए कहना, धड़कन गिनने के लिए कहते हैं।
9. दो या दो से ज्यादा संख्याओं को बड़ा, छोटा, बढ़ते हुए या घटते हुए क्रम में लिखने के लिए कहते हैं।
10. उपयुक्त मात्रा में चीज़ों के चित्र लेकर उनको समूहों में जैसे दो-दो के, तीन-तीन आदि के समूहों में गिनने के लिए कहते हैं।
11. संख्या-पूर्व अवधारणाओं, जैसे अनुक्रम बनाना, तुलना करना, एक-एक की संगति के लिए दैनिक जीवन की चीज़ों से शुरू कर गणितीय वस्तुओं जैसे गोला, घन, घनाभ को शामिल करते हैं।
12. गणितीय निरूपण, जैसे आयत, वर्ग, वृत्त को बनाकर उस पर संख्या-पूर्व अवधारणाओं जैसे अनुक्रम बनाना, तुलना करना, एक-एक की संगति के काम करवाते हैं।
13. गिनमाला पर मोती गिनना, तुलना करना, समूह में गिनने और संख्या कार्ड को क्रम में लगाने का काम करवाते हैं।
14. संख्या की मात्रात्मक समझ के लिए दस बिंदी वाले बिंदी के पत्ते के चित्र बनाकर काम करवाते हैं। उदाहरण के लिए संख्या के संबंध, जैसे कोई भी संख्या पिछली संख्या से 1 ज्यादा है या 10 कितने तरह से बन सकता है।
15. संख्या रेखा पर संख्या को दर्शाना, तुलना करवाना, समूह में गिनने और क्रम में लगाने पर काम करते हैं।

अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)- संख्या-पूर्व अवधारणाएँ और गिनना

16. गिनती के स्तरवार सीखने के प्रतिफलों को जानते हैं और उसी के आधार पर स्तरानुरूप गतिविधियाँ बनाते हैं।
17. संख्या के संबंधों पर काम करते हैं। पैटर्न, ज्यामिति आदि पढ़ाते हुए भी गिनने का काम करवाते हैं।
18. गिनती पर काम करते हुए संख्याओं का अनुमान लगाने के अवसर देते हैं।
19. संख्या के पैटर्न बनाकर उसको आगे बढ़ाने के लिए कहते हैं।
20. संख्या के पैटर्न बनाकर पैटर्न के नियम को बोलने के लिए कहते हैं।
21. संख्या के संबंधों पर सोचने के लिए कहते हैं। उदाहरण के लिए, जैसे- 10, संख्या 8 से 2 ज़्यादा है। ऐसे ही 14 किस संख्या से 2 ज़्यादा है?
22. ELPS की समझ के अनुसार शिक्षण करते हैं। जैसे कि:
 - ठोस वस्तुओं (कंकड़/बीज... आसानी से मिलने वाली चीज़ों) के साथ अनुभव
 - बोलकर अनुभवों के बारे में बताना यानी भाषा का उपयोग (जैसे मात्रा के साथ संख्या नाम को जोड़ना)
 - इसी प्रकार के कार्यों को फिर चित्रों के साथ करना या चित्रात्मक प्रस्तुति करना
 - प्रतीकों का प्रयोग (संख्यांक एवं संख्या नाम की पहचान और लिखना)
23. ठोस वस्तुओं का इस्तेमाल करते हुए चित्रों पर और फिर चिह्नों की तरफ बढ़ते हैं। जैसे कि कंकड़/पत्थर गिनवाना, फिर चित्र गिनवाना और फिर अमूर्त प्रतीक चिह्नों (संख्या चिह्न) को देखकर मात्रात्मक समझ पर जाते हैं।
24. उपयुक्त सहायक सामग्री, जैसे कि पहले खुली ठोस वस्तुएँ, फिर कुछ बंधी सामग्री (गिनमाला), फिर कुछ चित्रों से गिनवाना और फिर अमूर्त में समझ बनाने पर काम करते हैं।
25. गिनने की समझ पर काम करते हुए ही ये जाँचना कि बच्चों को कहाँ गिनने में परेशानी आ रही है, जैसे कि बच्चे गिनने के मुख्य तीन पहलुओं को ठीक से समझ पाए हैं या नहीं। क्या वे एक संख्या नाम के साथ या तो वस्तु को छोड़कर या ज़्यादा वस्तुओं को तो नहीं गिन रहे हैं। संख्या नाम बोलने में क्रम है कि नहीं, इन बातों को प्रक्रिया के दौरान ही जाँचते हैं।
26. आकलन के विभिन्न तरीकों, जैसे गृहकार्य, वर्कशीट, प्रोजेक्ट आदि का प्रयोग शिक्षण की प्रक्रिया के हिस्से के तौर पर करना।
27. पाठ्यपुस्तक के हिस्से पर ज़रूरत के अनुसार वर्कशीट बनाते हैं।
28. बच्चों को गणित करने के अपने तर्क को लिखने के लिए देते हैं, उन तरीकों को पढ़ते हैं, उनका विश्लेषण करते हैं और उस पर आधारित पढ़ाने की योजना बनाते हैं।
29. गिनने के पाँचों सिद्धांतों की समझ रखते हैं और उन बच्चों की पहचान कर पाते हैं जिन बच्चों को किसी चरण पर दिक्कत आ रही है, उनकी मदद के लिए विशेष योजना बनाते हैं।
30. स्कूल के बच्चों के बारे में बता पाते हैं कि किन बच्चों को गिनना ठीक से आता है, कितने बच्चे तुलना कर पाते हैं, कितने बच्चे संख्याओं को क्रम में जमा पाते हैं आदि।

अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)- स्थानीय मान

1. विषय की प्रकृति बताते हैं और सीखने-सिखाने की प्रक्रिया में ELPS उपागम को भी स्वीकारते हैं।
2. स्थानीय मान के स्तरवार सीखने के प्रतिफलों को जानते हैं और बताते भी हैं।
3. ELPS व सीखने के प्रतिफलों के आधार पर शिक्षण योजना बनाते हैं या साझा करते हैं।
4. 1 से 9 तक तथा 0 की संख्या समझ पर गतिविधियों से शुरुआत करते हैं।
5. किसी संख्या को विभिन्न प्रकार से जोड़-तोड़ कर बनाने की प्रक्रिया को करवाते हैं।
6. वस्तुओं को गिनने में दस-दस में गिनना शामिल करते हैं।
7. संख्या समझ को आगे बढ़ाते हुए 10-10 के समूह बनाना और बची हुई खुली वस्तुओं को गिनवाने पर काम करते हैं।
8. संख्या लिखने में 9 से आगे दस को कैसे लिखा जाए, इस प्रकार की समस्या पर बच्चों के साथ बातचीत करते हैं।
9. संख्या को लिखने के खास क्रम में तीन बातों पर बातचीत व परिस्थिति निर्माण करते हैं।
 - a. जगह और उस जगह का अन्य जगहों से सम्बन्ध।
 - b. किसी एक संख्यांक का एक जगह पर लिखा जाना।
 - c. संख्यांक का किसी खास जगह पर लिखने से उसकी बनने वाली कीमत।
10. 0 की संख्या समझ को आगे बढ़ाते हुए, इसे स्थानधारक के तौर पर समझने यानी संख्या लिखने में किसी भी स्थान पर इकाई / दहाई / सैकड़ा आदि की अनुपस्थिति को 0 से दर्शाने से संबंधित बातचीत व गतिविधि करते हैं।
11. स्थानीय मान की समझ विकसित करने के लिए तीली-बण्डल, गिनमाला, संख्या कार्ड, डीन्स ब्लॉक, संख्या पट्टी का प्रयोग करते हैं।
12. ठोस वस्तुओं से की जाने वाली गतिविधियों को बोर्ड पर लाने के लिए उनके निरूपण का प्रयोग करते हैं।
13. संख्या समझ के लिए संख्या अनुमान, संख्या निरूपण और संख्या पर आधारित विभिन्न पैटर्न्स व पहेलियों पर बच्चों को चुनौती देते हैं।
14. ठोस वस्तुओं जैसे डीन्स ब्लॉक, संख्या कार्ड, मोतीमाला आदि की मदद से शुरू करते हुए बोर्ड पर उन्हीं के चित्रों का निरूपण कर संख्या व स्थानीय मान की समझ बनाते हैं।
15. सीखे हुए की समझ जानने हेतु ठोस वस्तुओं, चित्रों व प्रतीकों पर आधारित प्रक्रियाएँ करते हैं।
16. बच्चों को विभिन्न पहेलियाँ व पैटर्न्स बनाने के लिए प्रेरित करते हैं।
17. आकलन के विभिन्न तरीकों, जैसे गृहकार्य, वर्कशीट, प्रोजेक्ट आदि का प्रयोग शिक्षण की प्रक्रिया के हिस्से के तौर पर करते हैं।

अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)- स्थानीय मान

18. हर बच्चे की समझ के आधार पर समूहवार योजना बनाते हैं। समूह बनाने में इस बात पर गौर करते हैं कि बच्चों का स्तर एक जैसा हो और उनके लिए तरीके अलग हों।
19. प्रक्रिया के प्रत्येक चरण में वर्कशीट या खेल के माध्यम से समझ जाँचते हैं। जैसे बच्चों को संख्या कार्ड देना और स्थानीय मान के फर्श पर बने डिब्बों में खड़ा कर संख्या पूछना और फिर उनके स्थान बदलना और पूछना।
20. हर बच्चे के जवाबों का विश्लेषण कर उससे बातचीत करते हैं।

अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)- जोड़-घटाव

1. जोड़ के सन्दर्भ- एकत्रीकरण (Aggregation) यानी दो या दो से अधिक समूहों को मिलाने का उपयोग करते हुए जोड़ की अवधारणा पर बच्चों के साथ काम करते हैं।
2. जोड़ के सन्दर्भ- वृद्धि (Augmentation) यानी किसी समूह में वृद्धि का उपयोग करते हुए जोड़ की अवधारणा पर बच्चों के साथ काम करते हैं।
3. घटाव के सन्दर्भ- हिस्से करना (partitioning) यानी किसी समूह से कुछ चीजों को निकालने या हटाने तथा समूह में बची हुई चीजों की संख्या पता करने की क्रिया का उपयोग करते हुए घटाव की अवधारणा पर बच्चों के साथ काम करते हैं।
4. घटाव के सन्दर्भ- कमी मालूम करना (depreciation) यानी जब मूल राशि और शेष बची राशि पता है, तब यह पता लगाना है कि कितनी राशि हटा दी गई या निकाली गई है, ऐसे सन्दर्भ का उपयोग करते हुए घटाव की अवधारणा पर बच्चों के साथ काम करते हैं।
5. घटाव के सन्दर्भ- तुलना (comparison) यानी दो समूहों या संख्याओं के बीच अंतर पता लगाना या एक समूह में दूसरे के मुकाबले चीजें कितनी कम या ज़्यादा हैं, ऐसे सन्दर्भ का उपयोग करते हुए घटाव की अवधारणा पर बच्चों के साथ काम करते हैं।
6. घटाव के सन्दर्भ- पूरक जोड़ (complimentary addition) यानी किसी संख्या या समूह को बढ़ाकर किसी अन्य संख्या या समूह में तब्दील करने के लिए कितना जोड़ना होगा, ऐसे सन्दर्भ का उपयोग करते हुए घटाव की अवधारणा पर बच्चों के साथ काम करते हैं।
7. शिक्षक गिनने के कौशल का उपयोग जोड़-घटाव की अवधारणा एवं प्रक्रिया को समझाने में करते हैं। जैसे- सभी को गिनना (count all), एक समूह के आगे से गिनना (count on), बड़े समूह के आगे से गिनना (count on from the larger number) का उपयोग करना।
8. जोड़-घटाव की अवधारणा को समझाते समय शिक्षक अपने परिवेश में आसानी से मिलनी वाली ठोस वस्तुओं (जैसे- कंकड़, लकड़ी की डंडी आदि) का उपयोग करते हैं एवं बच्चे खुद से भी ठोस वस्तुओं का उपयोग करते हुए समझ बनाते हैं।
9. जोड़-घटाव को समझाने में ठोस वस्तु के एक स्तर पर काम करने के बाद कुछ संकेत जैसे- लाइन या गोले का उपयोग करते हैं।
10. जोड़-घटाव को गणितीय संकेत (जोड़-घटाव के तथ्य) में लिखते हैं एवं गणितीय रूप में लिखने से पहले बच्चों की स्थानीय भाषा से गणितीय भाषा तक के चरणों पर बात करते हैं।
11. शिक्षक ज़रूरत के हिसाब से कक्षा के लिए शिक्षण सहायक सामग्री का निर्माण भी करते हैं।
12. कक्षा स्तर के तहत जोड़-घटाव से संबंधित इबारती सवाल को हल करने तथा उत्तर को जाँचने पर काम करते हैं।
13. शिक्षक पहले बिना हासिल एवं उधार वाले जोड़-घटाव के सवाल पर काम करते हैं एवं उसके बाद हासिल एवं उधार वाले सवाल पर काम करते हैं।
14. जोड़-घटाव संबंधित इबारती सवाल को एक से ज़्यादा तरीके से हल करने को प्रोत्साहित करते हैं।

अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)- जोड़-घटाव

15. शिक्षक दैनिक जीवन की समस्या से जोड़-घटाव के तथ्य बनाने एवं जोड़-घटाव के तथ्य से दैनिक जीवन की समस्या बनाने का बच्चों को मौका देते हैं।
16. बच्चे किन्हीं भी संख्याओं के जोड़-घटाव के सवाल को बिना हल किए उसके परिणाम का अनुमान लगाने पर काम करते हैं।
17. शिक्षक जोड़-घटाव की अवधारणा पर काम करने से पहले योजना बनाते हैं।
18. शिक्षक जोड़-घटाव की अवधारणा पर काम करते समय ठोस वस्तुओं के उपयोग, अर्द्ध-मूर्त संकेत एवं अमूर्त संकेत के क्रम का पालन करते हैं।
19. बच्चों के स्तर एवं परिवेश को ध्यान में रखते हुए उदाहरण का उपयोग करते हैं।
20. बच्चों को खुद से सीखने के लिए मौके देते हैं (ना कि हर चीज़ को बताते हैं)।
21. बच्चों के स्तर को ध्यान में रखते हुए समूह बनाते हैं एवं एक-दूसरे से सीखने के मौके देते हैं।
22. शिक्षक जोड़-घटाव पढ़ाने में कहानी, कविता का उपयोग करते हैं।
23. बच्चों के जोड़-घटाव की समझ को जाँचने के लिए वो कक्षा-कक्ष में पढ़ाने की प्रक्रिया के साथ-साथ गृहकार्य, वर्कशीट, प्रोजेक्ट आदि का उपयोग करते हैं।
24. बच्चों के सीखने से संबंधित सभी जानकारी को एकत्रित एवं विश्लेषण करते हैं एवं विश्लेषण के आधार पर बच्चों की आवश्यकता पर काम करते हैं।
25. शिक्षक पाठ्यपुस्तक में दिए गए सवाल के साथ-साथ नए सवाल भी बनाते हैं।

अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)- गुणा

1. ठोस वस्तुओं के द्वारा बराबर माला के समूह बनवाते हैं, जैसे कंकड़, बीज, मोती आदि से 2-2, 3-3 ... के समूह बनवाकर गिनवाते हैं।
2. दैनिक जीवन की स्थितियों से आरंभ कर किसी संख्या को बार-बार जोड़ के रूप में लिखकर जोड़ने के अनुभव देते हैं और इन अनुभवों से 'गुना' या 'बार' जैसी बोलचाल की भाषा से आरंभ कर गुणा के चिह्न से परिचय कराते हैं।
3. ऐसे उदाहरण / सवाल / परिस्थिति बच्चों के सामने रखते हैं जिनमें उन्हें बिना गिने बराबर माला के समूहों में वस्तुओं की संख्या पता लगाने के अवसर हों।
4. 'आयताकार जमावट' से सम्बंधित उदाहरणों एवं वस्तुओं से कार्य करवाकर गुणा की अवधारणा समझाते हैं।
5. 'मापक (Scaling)' से सम्बंधित उदाहरणों एवं वस्तुओं से कार्य करवाकर गुणा की अवधारणा समझाते हैं।
6. 'दर (Rate)' से सम्बंधित उदाहरणों एवं वस्तुओं से कार्य करवाकर गुणा की अवधारणा समझाते हैं।
7. आवश्यकतानुसार 'कार्तीय गुणन' से सम्बंधित उदाहरणों एवं वस्तुओं से कार्य करवाकर गुणा की अवधारणा समझाते हैं।
8. बार-बार जोड़ पर कार्य करवाते हुए गुणा की अवधारणा पर आते हैं।
9. 2, 3, 4, 5 तथा 10 के गुणन तथ्य बनवाने तथा दैनिक परिस्थितियों में उनके उपयोग से सम्बंधित कार्य करवाते हैं।
10. गुणा की अवधारणा का उपयोग करते हुए बच्चों से पहाड़े बनवाते हैं।
11. बार-बार जोड़ से गुणा पर जाने के लिए बीज/बटन/कंकड़/पत्तियों आदि सामग्री एवं सम्बंधित चित्रों का उपयोग करते हैं।
12. बीजों/कंकड़ों/डंडियों आदि के उपयोग से पहाड़े बनवाते हैं।
13. सामग्री के उपयोग के साथ कार्यों से ऐसे अवसर बनाते हैं जिससे बच्चे पहाड़ों का अर्थ समझकर स्वयं पहाड़े बना सकें।
14. गुणा के विभिन्न संदर्भों से सम्बंधित दैनिक जीवन की परिस्थितियाँ/समस्याएँ बच्चों के समक्ष रखते हैं।
15. इन परिस्थितियों/समस्याओं पर बच्चों को आपस में चर्चा करने और इनके हल के लिए अपने तर्क रखने के अवसर निर्मित करते हैं।
16. बच्चों द्वारा बताए गए विभिन्न तरीकों को स्वीकार करते हैं।
17. विभिन्न संदर्भों पर आधारित दैनिक जीवन की परिस्थितियों के इबारती सवाल बनवाते हैं।
18. संख्याओं के पैटर्न को आगे बढ़ाने के लिए तर्क आधारित नियम बनाने एवं प्रस्तुत करने के मौके देते हैं।

अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)- गुणा

19. शिक्षण में ELPS का ध्यान रखते हैं। जैसे:

- ठोस वस्तुओं (कंकड़/बीज... आदि) के साथ गुणा के विभिन्न संदर्भों के अनुभव देते हैं।
- वस्तुओं के साथ काम करते हुए बोलचाल की भाषा जैसे 'इतनी बार' या 'इतने गुना' आदि का प्रयोग कर गणितीय शब्दावली 'गुणा' से परिचित करवाते हैं।
- इसी प्रकार के कार्यों को फिर चित्रों के साथ करना या चित्रात्मक प्रस्तुति करना।
- प्रतीकों का प्रयोग करते हैं (जैसे गुणा के चिह्न का प्रयोग ऊपर दिए गए कार्य करने के बाद करते हैं)।
- इसी तरह मानक विधि से सवाल हल कराने के पूर्व ठोस वस्तुओं, चित्रों पर कार्य कराते हुए वैकल्पिक तरीकों से भी परिचय कराते हैं।

20. बच्चों के स्तर को ध्यान में रखते हुए समूह बनाते हैं एवं एक-दूसरे से सीखने के मौके देते हैं।

21. दैनिक शिक्षण योजना में आकलन को शामिल करते हैं।

22. आकलन के लिए गतिविधियों, मौखिक कार्य एवं लिखित कार्य का उपयोग करते हैं।

23. पाठ्यपुस्तक में दिए गए सवाल के साथ-साथ नए सवाल भी बनाते हैं।

24. आकलन के आधार पर बच्चों की आवश्यकता की पहचान करते हैं।

25. आकलन के परिणामस्वरूप अपनी योजना व तरीकों में आवश्यकतानुसार बदलाव करते हैं।

अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)- भाग

1. बच्चों से वस्तुओं को बराबर-बराबर बाँटने के कार्य करवाते हैं। जैसे- समूहों में कंकड़, बीज, मोती आदि देकर समूह के सभी बच्चों में बराबर बाँटने के काम करवाते हैं और इसे भाग की अवधारणा से जोड़ते हैं।
2. वस्तुओं से विभिन्न मात्रा के समूह बनवाते हैं। जैसे- दो-दो के, तीन-तीन के ... आदि एवं इसे भाग की अवधारणा से जोड़ते हैं।
3. भाग सिखाना आरंभ करने के पूर्व संख्या ज्ञान, जोड़, घटाव और गुणा / पहाड़े की समझ सुनिश्चित करते हैं।
4. गुणन तथ्यों को भाग से जोड़कर देखते हैं, जैसे $3 \times 4 = 12$ तो $12 \div 3 = 4$ या $12 \div 4 = 3$, अर्थात् 12 वस्तुओं से 3-3 वस्तुओं के चार समूह या 4-4 वस्तुओं के तीन समूह बनाए जा सकते हैं।
5. बीजों / कंकड़ों / तीली-बण्डल / खिलौना नोटों आदि की मदद से भाग से सम्बंधित विभिन्न परिस्थितियाँ बनाकर बच्चों को स्वयं काम करने के अवसर देते हैं।
6. सामग्री के उपयोग के साथ-साथ बोलचाल की भाषा में बातचीत करते हुए मानक शब्दों एवं मानक विधि से परिचय कराते हैं।
7. बच्चों को सामान्यतः आने वाली कठिनाइयों को समझते हैं (जैसे- भाग नहीं जाना या ऐसी संख्याओं में भाग देना जिनमें 0 भी होता है) और कठिनाइयों के हल के लिए सामग्री के साथ तर्कपूर्ण कार्य करवाते हैं।
8. भाग और गुणा के अंतर्संबंधों पर समझ बनाने के लिए कार्य करते हैं।
9. भाग देने के विभिन्न तरीकों से बच्चों को परिचित कराते हैं।
10. विभिन्न संदर्भों पर आधारित दैनिक जीवन की परिस्थितियों के इबारती सवाल बनवाते हैं।
11. मानक विधि द्वारा यांत्रिक तरीके से सवाल हल करवाने के स्थान पर मानक विधि में निहित तर्क समझने में मदद करते हैं।
12. दो संख्याओं के भाग में गलती भी हो जाए तो उनसे चर्चा करके और अनुमान लगाकर सही दिशा में बढ़ने के लिए मदद करते हैं। जैसे $318 \div 3$ का उत्तर यदि 16 आ जाए तो बच्चों से बात करना— 300 रुपये 3 लोगों में बराबर बाँटे जाएँ तो प्रत्येक को कितने रुपये मिलेंगे? 300 से ज़्यादा रुपये 3 लोगों में बराबर बाँटे जाएँ तो प्रत्येक को 100 से ज़्यादा या 100 से कम रुपये मिलेंगे?
13. शिक्षण में ELPS का ध्यान रखते हैं। जैसे कि:
 - ठोस वस्तुओं (कंकड़ / बीज ... आदि) के साथ भाग के विभिन्न संदर्भों के अनुभव देते हैं।
 - वस्तुओं के साथ काम करते हुए बोलचाल की भाषा जैसे 'बराबर बाँटना', 'समूह बनाना', 'बचे' आदि का प्रयोग कर गणितीय शब्दावली 'भाज्य', 'भाजक', 'भागफल', 'शेष' आदि से परिचित करवाते हैं।
 - बच्चों को चित्रात्मक प्रस्तुति करने में मदद करते हैं।

अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)- भाग

- इसी तरह मानक विधि से सवाल हल कराने के पूर्व ठोस वस्तुओं, चित्रों पर कार्य कराते हुए वैकल्पिक तरीकों से भी परिचय कराते हैं।
- 14. बच्चों के स्तर को ध्यान में रखते हुए समूह बनाते हैं एवं एक-दूसरे से सीखने के मौके देते हैं।
- 15. दैनिक शिक्षण योजना में आकलन को शामिल करते हैं।
- 16. आकलन के लिए गतिविधियों, मौखिक कार्य एवं लिखित कार्य का उपयोग करते हैं।
- 17. पाठ्यपुस्तक में दिए गए सवाल के साथ-साथ नए सवाल भी बनाते हैं।
- 18. आकलन के आधार पर बच्चों की आवश्यकता की पहचान करते हैं।
- 19. आकलन के परिणामस्वरूप अपनी योजना व तरीकों में आवश्यकतानुसार बदलाव करते हैं।

अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)- भिन्न

1. बराबर-बराबर बाँटने की दैनिक जीवन की ऐसी परिस्थितियाँ बच्चों के सामने रखते हैं जिसमें पूर्ण को हिस्से में बराबर-बराबर बाँटना पड़े। मिलने वाले हिस्से को भिन्न संख्या में बताना पड़े। जैसे 2 रोटी को 3 बच्चों में बराबर-बराबर बाँटना।
2. आम ज़िंदगी की ऐसी परिस्थितियाँ बच्चों के सामने रखते हैं जिसमें चीज़ों के समूह को बराबर-बराबर बाँटना पड़े और समूह के हिस्से के लिए भिन्न संख्या बतानी पड़े। जैसे- एक कक्षा में 24 बच्चे हैं, इसके आधे या एक तिहाई में कितने बच्चे होंगे? 24 बच्चों में अगर 4 लड़कियाँ हैं तो लड़कों की संख्या को भिन्न संख्या में कैसे व्यक्त करेंगे?
3. ऐसी परिस्थितियाँ बच्चों के सामने रखते हैं जिसमें आयताकार, वर्गाकार, वृत्ताकार, त्रिभुजाकार जैसी आकृतियों के कागज़ को दो, तीन... आदि भागों में बराबर बाँटना हो और हिस्से की भिन्न संख्या बतानी हो।
4. ऐसी परिस्थितियाँ कक्षा-कक्ष में रखते हैं जिसमें दी गई भिन्न संख्या को संख्या रेखा पर प्रदर्शित करना हो। जैसे $4/3$ को संख्या रेखा पर प्रदर्शित करो। संख्या रेखा पर प्रदर्शित करने में एक इकाई को निर्धारित करना, उसके बराबर-बराबर 3 हिस्से करना और प्रत्येक हिस्सा पूरी इकाई का एक तिहाई है, इस समझ से $4/3$ संख्या रेखा पर दिखाना।
5. भिन्न संख्या पर काम से पूर्व भाग की संक्रिया में बराबर बँटवारे पर काम करवाते हैं।
6. बराबर बँटवारे की समझ का उपयोग किसी इकाई/पूर्ण के बराबर हिस्से करने में करते हैं।
7. पाठ्यपुस्तक में पूर्ण संख्याओं के बाद भिन्न संख्याओं पर काम की शुरुआत की जाती है। जबकि पूर्ण संख्याओं के बाद पूर्णांक (integers) पर काम होना चाहिए। इस क्रमिक बदलाव के तर्क को शिक्षक समझता है।
8. भिन्न संख्याओं की समझ बच्चों की परिमेय संख्याओं की समझ के लिए आधार तैयार करती है। इस बात को शिक्षक समझता है।
9. भिन्न संख्या के लिए आम ज़िन्दगी के सन्दर्भों का उपयोग करते हैं। जैसे- रोटियों का बँटवारा, पेपर फोल्डिंग, किसी समूह की चीज़ों का आधा, तिहाई आदि।
10. अंश और हर को संदर्भ के साथ समझाते हैं। जैसे $3/4$ भिन्न संख्या में हर 4 यह बताता है कि इकाई/पूर्ण के चार समान हिस्से किए गए हैं। प्रत्येक हिस्सा $1/4$ है। अंश 3 यह बताता है कि एक चौथाई हिस्से तीन हैं। इस बात को पेपर फोल्डिंग, कागज़ की चकतियों आदि से बताते हैं।
11. दो भिन्न संख्याओं की तुलना को ठोस सामग्री जैसे कागज़ की चकतियों, रोटियों आदि से बताते हैं। जैसे $2/3$ और $4/5$ में कौन-सी भिन्न बड़ी है, इसको बच्चों में रोटियों के बँटवारे, पेपर फोल्डिंग आदि से समझाते हैं।
12. भिन्न संख्या को समझने के लिए विविध प्रकार के अनुभव बच्चों को देते हैं। जैसे- किसी भिन्न संख्या को चित्र में दिखाना, चित्र को भिन्न संख्या में लिखना, आम ज़िन्दगी का संदर्भ गढ़ना, टीएलएम का उपयोग आदि।

अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)- भिन्न

13. बच्चे की भाषा को गणित की भाषा से जोड़ते हैं। जैसे- आधा, पाव, पौन, सवा, डेढ़, ढाई आदि।
14. शिक्षक भिन्न संख्याओं के कक्षावार सीखने के प्रतिफलों को जानते हैं।
15. सीखने के प्रतिफलों के अनुसार शिक्षण प्रक्रिया को अपनाते हैं। जैसे- बराबर बँटवारा के रूप में भिन्न, पूर्ण के हिस्से के रूप में भिन्न, मापक के रूप में भिन्न, शब्दावली, चित्रों में दिखाना, चित्र से भिन्न में लिखना, भिन्नों की तुलना करना, समतुल्य भिन्न आदि।
16. भिन्न संख्याओं की मात्रात्मक समझ पर काम करते हैं। जैसे 5/6 कितना होता है? इसे बच्चों को विभिन्न तरीकों से समझाते हैं कि यह $\frac{3}{4}$ से ज्यादा है, 1 से कम है, 1 से $\frac{1}{6}$ कम है, 5/6 को 1 बनाने के लिए इसमें $\frac{1}{6}$ मिलाना पड़ेगा आदि।
17. भिन्न के सवालों को विभिन्न तरीकों से हल करने के मौके बच्चों को देते हैं। जैसे- किसी आयताकार कागज़ को आधा करने के क्या-क्या तरीके हो सकते हैं?
18. दी गई भिन्न संख्या के लिए आम ज़िंदगी के संदर्भ गढ़ने पर काम करवाते हैं।
19. दी गई भिन्न संख्याओं की तुलना अनुमान लगाकर करने पर काम करते हैं। अनुमान की पुष्टि करवाते हैं।
20. एक ही भिन्न संख्या को विभिन्न तरीकों से प्रदर्शित करवाने पर काम करवाते हैं।
21. पैटर्न देखकर सामान्यीकरण पर काम करवाते हैं। जैसे- किसी पूर्ण/इकाई के जितने ज़्यादा हिस्से करते जाएंगे, मिलने वाला हिस्सा छोटा होता जाएगा।
22. भिन्न पर काम की शुरुआत बच्चों के अनुभवों व ठोस चीज़ों के बँटवारे से करते हैं।
23. बच्चों के अनुभव व ठोस चीज़ों के बँटवारे के काम को चित्रों के रूप में प्रदर्शित करते हैं।
24. ठोस चीज़ों, चित्रों की समझ को आगे सांकेतिक (symbolic) भाषा तक ले जाते हैं।
25. कक्षा में बच्चों को सवाल पूछने के मौके देते हैं।
26. बच्चों के स्तरानुसार योजना बनाना, गतिविधियों का निर्माण करना और उसी अनुरूप काम करते हैं।
27. आकलन की प्रक्रिया में विविध तरह के सवालों, गतिविधियों, कार्यपत्रकों का इस्तेमाल करते हैं।
28. बच्चों के जवाबों का विश्लेषण करते हैं, जिससे बच्चों के साथ ज़रूरत अनुसार काम किया जा सके।

अपेक्षित शिक्षण प्रक्रियाएँ (Desired Teaching Practices)- दशमलव

1. दैनिक जीवन से जुड़े सन्दर्भों के माध्यम से दशमलव से परिचय करवाते हैं। उदाहरण के लिए- दवाइयों के पैकेट पर लिखे हुए दाम या नोटबुक के पीछे लिखा साइज़ या मूल्य बताके।
2. स्थानीय मान की समझ को आगे बढ़ाते हुए दशमलव के बाद के स्थान का मतलब और मान समझाते हैं।
3. शिक्षण प्रक्रिया के दौरान पूर्व-अवधारणाओं से जोड़कर दशमलव की समझ विकसित करते हैं। जैसे- नापने की समझ, भिन्न की समझ का दशमलव के महत्त्व को समझने में इस्तेमाल करना।
4. शिक्षण प्रक्रिया के दौरान गतिविधियों के क्रम को ध्यान में रखते हैं। जैसे-
 - स्थानीय मान की गतिविधि से शुरू करना
 - दशमलव संख्या की ज़रूरत वाली गतिविधि
 - दशमलव संख्या लिखने के लिए मॉडल पर गतिविधि
 - दशमलव संख्या में मापन एवं मुद्रा के संदर्भ में गतिविधि
5. भिन्न संख्या को दशमलव संख्या व दशमलव संख्या को भिन्न संख्या में कैसे बदलते हैं, इस पर अलग-अलग उदाहरण लेकर बच्चों के साथ काम करते हैं।
6. दशमलव संख्याओं में तुलना करने के अलग-अलग तरीकों पर बातचीत करते हैं।
7. दशमलव से जुड़े कक्षा स्तरीय सीखने के प्रतिफल व ELPS के अनुसार पाठ योजना बनाते हैं।
8. दैनिक शिक्षण योजना में आकलन को शामिल करते हैं।
9. आकलन के लिए गतिविधियों, मौखिक कार्य एवं लिखित कार्य का उपयोग करते हैं।
10. पाठ्यपुस्तक में दिए गए सवालों के साथ-साथ नए सवाल भी बनाते हैं।
11. शिक्षार्थियों को अपने द्वारा दिए गए उत्तर के पीछे का तर्क देने के लिए प्रोत्साहित करते हैं।
12. आकलन के आधार पर शिक्षार्थी की आवश्यकता की पहचान करते हैं।
13. आकलन के परिणामस्वरूप अपनी योजना व तरीकों में आवश्यकतानुसार बदलाव करते हैं।

Essential Reading		
Chapters	Section	Name of the reading
Chapter 1	प्रस्तावना - प्राथमिक गणित शिक्षण	Objectives of Mathematics teaching - position paper
		Perspective of Mathematics-IGNOU consolidated reading
		गणित की प्रकृति - रोहित धनकर
		गणित की प्रकृति और स्कूली शिक्षा से उसका सम्बन्ध - अमिताभ मुखर्जी
		गलतियाँ करना, यानी अक्ल के इस्तेमाल की आजादी - रविकांत
		मुझे गणित क्यूँ अच्छा लगता है - रोहित धनकर
		गणित का सीखना - रोहित धनकर
Chapter 2	Pre-number concepts	Pre-number concepts - IGNOU AMT module
	Counting	गिनना माने क्या - रोहित धनकर
		Co-dev module - basic decimal number system - counting part
		जीरो माने.... कुछ नहीं
		बालोतरा के बैल और उनके गले की मोतिमाला - Md. Umar
	Place Value	एक पे एक ग्यारह - Sunil Verma
		बस एक एक शून्य बढ़ाते जाओ - Radheshyam Thawait
		स्थानीय मान और जोड़ सीखने का प्रयास - कामी, लिंडा जोसेफ
		Co-dev module - basic decimal number system (place value part)
	Addition	Co-dev module - basic decimal number system (Addition part and addition-subtraction mix part)
		गणित की कक्षा में रचनावाद
	Subtraction	Co-dev module - basic decimal number system (Subtraction part and addition-subtraction mix part)
	Multiplication	जीरो बनाम कट्टम - Md. Umar
		Co-dev module - Multiplication-division (refer multiplication part and multiplication-division mix part)
	Division	Co-dev module - Multiplication-division (refer division part and multiplication-division mix part)
	Fraction	सवा छोटा चौथाई बड़ा - माधव केलकर
		Two Numbers One Above Line Below Line - Chhaya Dubey
		मेरी गणित की कक्षाएँ और सौरव - Md. Umar
		Co-dev module - Fraction (refer those parts which are in primary)

