

गणित में भटकाव, एक वजह, भाषा का अटकाव

मुकेश मालवीय

गणित विषय के सीखने-सिखाने को लेकर हर समय एक बहस बनी ही रहती है। गणित विषय का शिक्षण अपने-आप में दो चुनौतियों से घिरा दिखाई देता है; एक तो विषय में निहित अमूर्तता और दूसरे उसकी भाषा का अजनबीपन। तकनीकी, पारिभाषिक और गैर-बोलचाल की शब्दावली की वजह से अवधारणाओं को सीखना-समझना और भी दुरुह हो जाता है। इस लेख में मुकेश मालवीय ने कई सारे उदाहरणों को लेकर इस ओर ध्यान दिलाने की कोशिश की है। सं.

24 में 5 का भाग देना है तो हम सभी इसका उत्तर 4.8 ले आते हैं। यह कितना सरल है बड़ों और बच्चों के लिए भी। पर जब कोई हमसे यह पूछता है कि इसमें दशमलव 8 का मूल्य कितना है या $24/5 = 4.8$ के मायने क्या हैं? या इसके लिए गणितीय कथन क्या हो सकता है? इन सवालों के जवाब बताने में मुश्किल खड़ी होने लगती है।

मेरा मानना है कि गणित विषय की बहुतेरी शिक्षा बच्चों को कुछ प्रतीकों और उनपर रोपित क्रायदों को बताने और अपनाने का ज्ञान बनती जाती है। गणित की अवधारणाओं के लिए ठीक ढंग से भाषा नहीं गढ़ी जाती, इसलिए वह बच्चों और शिक्षकों में संज्ञानात्मक समझ नहीं बना पाती। मैं कुछ उदाहरण लेता हूँ :

$$\text{जैसे } 4/5 \times 2/3 = 8/15$$

$$\text{वर्ग का क्षेत्रफल} = \text{भुजा} \times \text{भुजा}$$

$$\text{वृत्त की परिधि} = 2 \text{ पाई आर}$$

$$\text{लाभ प्रतिशत} = \text{लाभ} \times 100 / \text{क्रय मूल्य}$$

परिमेय संख्या वह संख्या है जिसे p/q के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

क्या दो न्यून कोण एक दूजे के पूरक हो सकते हैं?

यदि दो रेखाएँ एक दूसरे को प्रतिच्छेद करती हैं तो इस प्रकार बने शीर्षाभिमुख कोण समान होते हैं।

यह और इस तरह के कई अन्य तथ्य गणित की भाषा में कक्षा 6वीं, 7वीं तक बच्चों को बता दिए जाते हैं। बच्चों के संज्ञान या समझ के दायरे में इन्हें लाने के लिए उनसे संवाद, परिचर्चा और अनुप्रयोग के लिए जिस भाषा की ज़रूरत है, वह भाषा, शिक्षक अपने शिक्षण के दौरान इस्तेमाल में नहीं लाते या कम लाते हैं। इसे इस तरह भी कह सकते हैं कि अधिकांश शिक्षकों के पास गणित की इन अवधारणाओं को बच्चों को समझाने के लिए सहज अभिव्यक्ति (एक ही बात को अलग-अलग शब्दों और अलग-अलग वाक्यों में कहना) नहीं है जिसे वह अपने शब्दों में और उन शब्दों में, जिन्हें बच्चे समझ रहे हों, आवश्यकतानुसार शब्दों के बदलाव के साथ इस्तेमाल कर सकें।

तो क्या गणित विषय में बच्चे समझ के सम्प्रेषण से रहित एक ऐसा ज्ञान अर्जित कर

रहे होते हैं जो वैध तो है पर अनुभूतिविहीन बना हुआ है? क्या शिक्षकों को पहले खुद के लिए इन्हें अनुभूत करने, समझने की ज़रूरत है?

गणितीय अवधारणाएँ क्या शिक्षकीय समझ के दायरे में हैं ?

गणित के सूत्र और कथन मुझे (एक शिक्षक को) तब ही समझ आते हैं जब मैं इन शब्दावलियों से खुद जूझकर अपने लिए इनका अर्थ खोजता हूँ और इन्हें अपनी समझ के दायरे में लाता हूँ, तब इनका अर्थ पहली बार मेरे दिमाग में खुलता है और इसे बच्चों को समझने के लिए सीधे किताबी भाषा न बोलकर दो तरफ़ा संवाद के ज़रिए उन्हें समझाने की कोशिश करता हूँ। उदाहरणार्थ, परिमेय संख्या को बच्चों को समझाने के लिए मैंने खुद के लिए इस संख्या को समझना चाहा। मेरे समझने की प्रक्रिया में 'परिमेय' नाम का यह शब्द कोई मदद नहीं करता, क्योंकि कहीं और यह मेरी भाषा में कभी इस्तेमाल नहीं हुआ है। समझने की कोशिश में यह परिभाषा भी मदद नहीं करती कि जिस संख्या को p/q के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ पर q शून्य नहीं है, उसे परिमेय संख्या कहेंगे। आगे के उदाहरणों में बताया गया कि जैसे संख्या 2 को हम $2/1$ या $4/2$ लिख सकते हैं उसी तरह किसी भी संख्या को p/q के रूप में लिखा जा सकता है। पर मेरे मन में सवाल उठता है कि मैं जब 2 को इस तरह 2 लिख सकता हूँ तब $2/1$ या $4/2$ लिखने की क्या ज़रूरत? यहाँ पाठ्यपुस्तकों में एक और जवाब मिलता है कि हम पूर्णांक संख्याओं को दो संख्याओं के अनुपात के रूप में भी लिख सकते हैं। अनुपात की जो मेरी समझ थी वह इस तरह के उदाहरणों में थी, जैसे— मेरे पास 200 रुपए हैं और मेरे दोस्त के पास 400 रुपए, तो इसे हम कह सकते हैं कि हमारे पास रुपए 1 : 2 में हैं। या किन्हीं भी दो या अधिक संख्याओं के बीच एक सरल अनुपात निकाला जा सकता है।

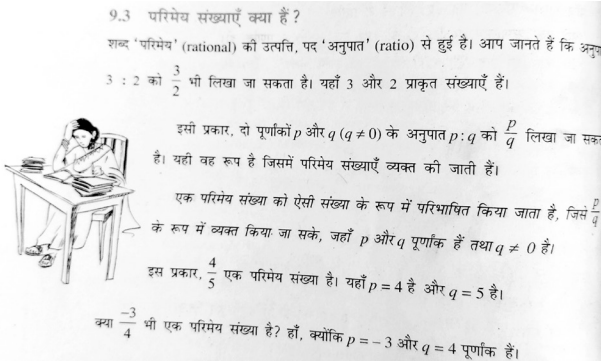
कोई एक संख्या दो अलग-अलग संख्याओं का अनुपात कैसे हो सकती है? इसे समझने के लिए मुझे 1 : 2 की दूसरी व्याख्या सोचनी पड़ी। मेरी विचार प्रक्रिया से मुझे यह तर्क मिला कि मुझसे दोगुने रुपए मेरे साथी के पास हैं, इस आधार पर मैं यह भी कह सकता हूँ कि मेरे साथी के रुपए से आधे मेरे पास हैं। इस तरह 1:2 को मैं 0.5 के रूप में इस्तेमाल कर सकता हूँ, पर यह तो भिन्नात्मक संख्या के नाम से मुझे पहले से पता है। फिर परिमेय संख्या अलग नाम क्यों? पाठ्यपुस्तकें कहती हैं कि भिन्नात्मक संख्या ऋणात्मक नहीं हो सकती, पर परिमेय संख्या धनात्मक और ऋणात्मक दोनों हो सकती है। अतः परिमेय संख्या की जड़ों को समझने के लिए मुझे अपनी सोचने की प्रक्रिया को थोड़ा और सुलझाना पड़ा। मुझे समझ में आया कि यह नाम किसी एक संख्या का नहीं है, जैसे— पाँच को 5 नाम से जानता हूँ, साथ ही इस तरह की सारी गणना करने वाली संख्याओं को प्राकृत संख्या के सदस्य के नाम से भी जानता हूँ। इसी तरह मैं -5 को ऋण पाँच कहता हूँ पर यह प्राकृत संख्या के समूह में नहीं है। इसे एक नए नाम के समूह, जिसे पूर्णांक संख्या कहते हैं, के सदस्य के रूप में भी देख पाता हूँ। मैंने अपने सोचने के क्रम में यह भी समझा कि संख्याओं का यह नया समूह 'पूर्णांक', प्राकृत संख्या के समूह को अपने में समाहित कर लेता है, मतलब मैं 5 को प्राकृत संख्या भी कह सकता हूँ और पूर्णांक भी। पर-5 को पूर्णांक संख्या में ही रखना होगा। प्राकृत संख्या में हमने पूर्ण इकाई, जैसे— 2, 5, 8, आदि, को शामिल किया है। हमें किसी इकाई के छोटे हिस्से या टुकड़े की भी गणना करने की ज़रूरत होती है, तब किसी इकाई के उस हिस्से को कैसे मापें और इस माप को क्या कहेंगे? इसके लिए एक नया संख्या समूह हमें भिन्नात्मक संख्याओं के नाम से समझने को मिलता है। मेरी यह समझ है कि भिन्नात्मक संख्याओं के लिखने के तरीके से हम प्राकृत संख्याओं और इकाई के किसी हिस्से को व्यक्त करने वाली संख्या दोनों को ही लिख सकते हैं।

आगे हम एक तथ्य से परिचित होते हैं कि भिन्नात्मक संख्या का समूह ऋणात्मक संख्याओं को अपने में शामिल नहीं कर सकता। अतः हमें संख्याओं को लिखने का एक ऐसा तरीका और समूह चाहिए जिसमें प्राकृत संख्या, पूर्ण संख्या, धनात्मक भिन्नात्मक संख्या, पूर्णांक, ऋणात्मक भिन्नात्मक संख्या सभी को शामिल किया जा सकता हो। भिन्नात्मक संख्या लिखने के तरीके से ही हमें यह तरीका मिलता है कि हम इन सारी संख्याओं को किन्हीं दो पूर्णांक के अनुपात p/q के रूप में लिख सकते हैं। इसे हम परिमेय संख्या कहते हैं। इस तरह परिमेय संख्या के बारे में यह मेरी अपनी स्थापना थी जो मुझे तार्किक रूप से सन्तुष्ट करती है (यह स्थापना किसी पाठ्यपुस्तक में नहीं है)। इस तरह परिमेय संख्या को जब मैं खुद के लिए समझ गया तो बच्चों के साथ इन संख्याओं पर बातचीत मेरे

क्रम, पूर्ववर्ती एवं परवर्ती संख्या, इकाई, दहाई, सैकड़ा, स्थानीय मान, गुणज, भाज्य, अपवर्त्य, गुणनखण्ड, सहचारी या साहचर्य और वितरण गुण, तत्समक अवयव, इस तरह की बहुत-सी शब्दावलियाँ हैं जो हमारी आम भाषा में इस्तेमाल नहीं होती हैं। इस समय बच्चों का भाषाई संसार बढ़ रहा होता है और वे कई सारे नए शब्द व अवधारणाएँ ग्रहण कर रहे होते हैं, पर इन गणितीय शब्दों का कोई सन्दर्भ और जुड़ाव उनके पास की मौजूदा अवधारणाओं से नहीं बन पाता।

“किसी नई अवधारणा या शब्द की समझ या अर्थ हमारे मस्तिष्क में तभी बनता है जब वह शब्द या अवधारणा हमारे पास पहले से मौजूद किसी अवधारणा से जुड़ाव बना पाए।”

- रोहित धनकर



ये शब्द अर्थ निर्माण की सहज प्रक्रियाओं (सन्दर्भ में या साथ आए शब्दों के ज़रिए नए शब्द का नज़दीकी अर्थ समझने का बुनियादी तरीका) से नहीं गुज़रते तब इन शब्दों से जुड़े नियम-क्राइदों को याद करना ही विकल्प रह जाता है। याद रखने के लिए भी इन शब्दों और अवधारणा की बारम्बारता ज़रूरी है, परन्तु बच्चों पर जल्द ही दूसरी अवधारणा को

सुनने का दबाव आ जाता है। इस तरह अर्थ और समझ विहीन शब्दावलियों के साथ गणित विषय कक्षा-दर-कक्षा आगे बढ़ता चला जाता है। इसका एक उदाहरण लघुतम समापवर्त्य और महत्तम समापवर्तक निकालना जानना है। पर यह क्या है? इन्हें कहाँ इस्तेमाल करना है? यदि हमारे सामने यह प्रश्न आ जाए कि सबसे छोटी वह कौन-सी संख्या है जो 1 से लेकर 10 तक सभी संख्याओं से विभाजित हो जाती हो? इस प्रश्न के लिए क्या तुरन्त हमारा दिमाग यह कहता है कि यार, इसके लिए 1 से लेकर 10 तक की सभी संख्याओं का लघुतम समापवर्त्य (एलसीएम) ले लो।

लिए सहज थी जिसे मैं एक संवाद की भाषा में, जिसमें बच्चे और मैं दोनों शामिल हो सकते थे, अनुप्रयोग कर सका।

अवधारणाओं की शब्दावली से उपजने वाली समस्या

गणित विषय में प्रारम्भिक स्तर पर ही आने वाली ज़्यादातर अवधारणाओं के लिए अँग्रेज़ी से हिन्दी में अनूदित या हिन्दी में कम प्रचलित शब्दों का प्रयोग पाठ्यपुस्तक में किया गया है। जैसे- संख्याओं का आरोही एवं अवरोही

गणित के मूल तत्त्व का शुरुआती गणित सिखाने में कमतर इस्तेमाल

गणित शिक्षण की स्कूली प्रक्रिया में प्रारम्भिक स्तर पर ही तर्क करने और सोचने के अवसर कम ही उपलब्ध होते हैं। टीचर ज्यादातर गणित हल करने के तरीके और सूत्र के अनुप्रयोग बताते हैं। गणित शिक्षण में यह शार्टकट की घुसपैठ किस वजह है, यह शोध का विषय है। मेरी समझ में इस शार्टकट को अपनाने के तीन कारण हैं :

1. गणित की पाठ्यपुस्तकें जो प्रश्नावलियों के रूप में तैयार की गई हैं;
2. गणित के शिक्षक जो अपनी पढ़ाई के दौरान सीखे हुए तरीकों को ही शिक्षण का आधार बनाए हुए हैं; और
3. गणित का पाठ्यक्रम जो माध्यमिक स्तर तक अधिक-से-अधिक अवधारणाओं का परिचय देने की जल्दबाजी का द्योतक है।

अभी हाल के वर्षों में आई गणित की पाठ्यपुस्तकों में अवधारणाओं को समझाने के उदाहरण तो रचे हैं (कक्षा 2 से 5 तक की एनसीईआरटी की पाठ्यपुस्तकें), पर इतने वर्षों का परम्परागत तरीकों से गणित शिक्षण में बदलाव कम ही हुआ है। हालाँकि, नई किताबें उस भाषा में बच्चों से संवाद करती हैं जो बच्चों के आसपास इस्तेमाल होने वाले गणित में इस्तेमाल होती है। ये बच्चों को कुछ समस्याओं के ज़रिए तर्क करने को भी प्रोत्साहित करती हैं, परन्तु मेरे आसपास के कुछ शिक्षकों का कहना है कि गणित की ये किताब तो क्रिस्सों-कहानियों की किताब है। इसमें प्रश्नावली और

उत्तरमाला नहीं है हम तो अपने तरीके से ही बच्चों को गणित सिखा रहे हैं।

फिर भी सम्भावनाएँ तो हैं

मेरे पास के ही एक स्कूल की कक्षा में शिक्षिका बच्चों को 24 में 5 का भाग देना सिखा रही हैं और इसके लिए शिक्षिका भाग देने का तरीका बताने की बजाय बच्चों के साथ भाग देने के अर्थ पर बात करती हैं। इस बातचीत में वह बच्चों की सामान्य समझ और उनके तर्क को इस्तेमाल करने को प्रोत्साहित कर रही होती हैं। इस प्रक्रिया में बातचीत पहले 24 को समझने पर होती है कि 24 कितना है, फिर वे 5 बराबर हिस्सों में बाँटने, बाँटने के तरीकों आदि पर बात केन्द्रित करती हैं। आगे 24 वस्तुओं को 5 बराबर भागों में बाँटने के क्या तरीके हो सकते हैं, इसपर बच्चों को सोचने के लिए कहती हैं। उनका मानना है कि किसी गणितीय समस्या को ठीक से समझना और हल के तरीके सोचना उन तर्कों की तरफ़ जाने का अवसर देगा जो गणित करने की बुनियाद हैं। गणितीय विचार को अपनाने या उसे आगे ले जाने के लिए उसे स्वयं की सोच प्रक्रिया (चिन्तन) में लाना आवश्यक है।

कक्षा के एक और अनुभव पर बात करना चाहता हूँ।

मैं एक स्कूल में परीक्षा लेने गया। उस दिन गणित का पेपर बच्चों ने हल किया था। पेपर हो जाने के बाद मैंने पेपर में आए सवालों पर उनसे आधा घण्टे बातचीत की।

पेपर में एक सवाल था :

प्रश्न 10. एक दुकानदार ने एक कुर्सी 450 रुपये में खरीदी और 500 रुपये में बेच दी। तो उसका लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

उत्तर →

लाभ % = $\frac{\text{लाभ} \times 100}{\text{कम मूल्य}}$	कम मूल्य = 450 ₹
$\frac{50 \times 100}{450} = \frac{500}{45}$	विक्रम मूल्य = 500 ₹
$= 11.1\%$	लाभ = विक्रम - क्रम = 500 - 450 = 50 ₹

किसी दुकानदार ने एक कुर्सी 450 रुपए में खरीदी और 500 रुपए में बेच दी, तो उसका लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

इस प्रश्न को हल करने के लिए बच्चों ने इस सूत्र का उपयोग किया था।

लाभ प्रतिशत = लाभ × 100 / क्रय मूल्य

सूत्र का उपयोग कर लाभ प्रतिशत की गणना कर लेने वाले इन बच्चों की समझ परखने के लिए मैंने इस प्रश्न को लेकर उनसे आगे बात की। मैंने पूछा, “प्रतिशत लाभ का क्या मतलब है?” बच्चे चुप रहे। फिर मैंने प्रतिशत और लाभ को अलग-अलग किया। मैंने पूछा, “लाभ का मतलब क्या है?” सबने एक साथ कहा, “फ़ायदा।” “अच्छा, तो अब प्रतिशत का मतलब क्या है?” उन्हें लाभ, क्रय मूल्य, बिक्री मूल्य के बारे में तो पता था परन्तु ‘प्रतिशत’ शब्द के अर्थ के बारे में उनकी कोई व्याख्या नहीं थी, वे एक चिह्न के रूप में ही उसे जानते थे और प्रतिशत लाभ का सूत्र उन्हें पता था।

इस प्रश्न को समझने पर मैंने बात केन्द्रित की।

‘दुकानदार ने 450 रुपए की कुर्सी 500 रुपए में बेची।’ इस कथन को सभी बच्चे समझ रहे थे। आगे मैंने पूछा, “450 रुपए की कुर्सी 500 रुपए में बेचने पर लाभ होगा कि हानि?” बच्चों ने एक साथ कहा, “लाभ।”

मैंने पूछा, “कितना लाभ हुआ?”

सभी ने कहा, “50 रुपए।”

यह गणना वे मन में कर सकने में सक्षम थे।

मैंने कहा, “यदि सवाल यह होता कि 450 रुपए की सायकिल 500 रुपए में बेचने पर कितना लाभ होगा, तो इसका उत्तर क्या होता?”

बच्चों ने कहा, “50 रुपए।”

“पर हमें प्रतिशत लाभ निकालना है।”

मैंने उन्हें प्रतिशत का मतलब बताया— 100 रुपए पर, हर 100 पर

यहाँ प्रतिशत लाभ का मतलब है— हर 100 रुपए पर होने वाला लाभ

मैंने कहा, “इस सवाल में हमें पता है कि 450 रुपए पर 50 रुपए लाभ हुआ है। प्रतिशत लाभ का मतलब हर 100 पर हुआ लाभ है। इस प्रश्न में हमें 100 पर कितना लाभ हुआ है यह पता नहीं है, पर हमें यह पता है कि 450 रुपए पर 50 रुपए लाभ हुआ है। इससे आगे कैसे सोचें?”

बच्चों ने इस बातचीत में आपने तर्क रखे।

“450 रुपए पर 50 रुपए लाभ हुआ तो यदि हम 450 का आधा 225 करते हैं तो लाभ भी 50 का आधा हो जाएगा। यानी 225 रुपए पर 25 रुपए लाभ हुआ। हमें 100 रुपए पर लाभ पता करना है तो अब 225 को भी आधा कर दें। इस प्रकार, 112.5 रुपए पर लाभ 25 का आधा 12.5 रुपए होगा। तो क्या हम मान लें कि 100 रुपए पर 10 रुपए लाभ हुआ होगा।”

कुछ ने “हाँ” कहा। पर तभी एक लड़की बोली, “नहीं सर, 100 रुपए पर 10 लाभ होगा तो 400 रुपए पर 40, और 50 रुपए पर 5 रुपए यानी 450 रुपए पर 45 रुपए लाभ होगा। जबकि प्रश्न में 450 रुपए पर 50 रुपए लाभ हुआ है।”

तर्क के आधार पर वे बता पाए कि 100 रुपए पर लाभ 10 रुपए से थोड़ा अधिक और 12.5 से कम होगा। यह उत्तर पूरा ठीक नहीं है, पर इस उत्तर की तार्किक अनुभूति उन्हें है और वे सोचने के हर अगले स्तर पर पिछले निर्णय या तर्क का सहारा ले रहे थे।

बच्चों के साथ मेरे इस अनुभव के आधार पर मैं कह सकता हूँ कि बच्चे अपनी समझ का उपयोग तभी करेंगे जब उनके सोचने की प्रक्रिया में हर कड़ी दूसरे से जुड़ रही हो। गणित शिक्षण प्रक्रिया में इन तार्किक कड़ियों का बच्चों

के पास बने रहना और इनसे नई कड़ियाँ बनाना ही उन्हें गणित समझने में सक्षम बनाता है और सीखने का हौसला व आनन्द देता है।

मेरा मानना है कि गणित में सूत्र किसी गणना को शीघ्र करने के लिए हैं। किसी अवधारणा निर्माण के वक्त ही सूत्र का प्रयोग करना उस अवधारणा को समझने के मौक़े को अतिक्रमित कर देता है। जैसे— क्षेत्रफल क्या है? इसे समझे या समझाए बिना ही हम आयत और वर्ग का क्षेत्रफल निकालने वाले सवाल बच्चों से हल करवाते हैं।

आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

इस सूत्र को याद करा देने के बाद इस तरह के प्रश्न हल कराए जाते हैं जिनमें किसी कमरे की लम्बाई और चौड़ाई की माप देकर उस कमरे का क्षेत्रफल निकलना होता है।

क्षेत्रफल क्या है? यह लम्बाई में चौड़ाई का गुणा करने से कैसे निकल आएगा? इस सबकी बात नहीं होती। दूरी को तो हम लम्बाई के पैमाने से माप सकते हैं, पर किसी क्षेत्र

को दूरी के पैमाने (लम्बाई और चौड़ाई की माप) से कैसे नाप लिया गया? दो दूरियों की माप का आपस में गुणा करने से क्षेत्रफल की माप निकल आना आश्चर्य की बात है, पर इस आश्चर्य का बोध या अहसास हम शिक्षकों के संज्ञान में नहीं आता। अगर हम समझकर गणित करना, गणित सीखना और सिखाना चाहते हैं तो हमें अपने सीखे हुए गणित पर पुनः विचार करना चाहिए और हर उस स्टेप या तथ्य, जो हमने नियम के तौर याद किया है, के लिए तर्क बनाने होंगे। इससे हमें गणित को समझने और समझाने की एक ऐसी भाषा मिलेगी जिसमें हमारे हर क्यो का जवाब होगा और यह जवाब खुद को अर्थ देने वाला होगा। हम शिक्षकों के लिए तो यह बहुत ज़रूरी है कि जिस गणित को हमने प्रतीकों और सूत्र के ज़रिए ही समझा है, उसे भाषा के ज़रिए समझें। ऐसी भाषा जो हमें खुद के लिए अर्थ या समझ देती हो। जैसे— यहाँ इस सूत्र में हम खुद से पूछ सकते हैं कि क्यो लाभ में 100 का गुणा करने के बाद उसमें क्रय मूल्य का भाग देने से प्रतिशत लाभ मिल जाएगा।

मुकेश मालवीय पिछले दो दशक से भी ज्यादा समय से स्रोत शिक्षक के रूप में सरकारी और गैर-सरकारी भूमिकाओं में सक्रिय हैं। कक्षा अनुभवों को लेकर सतत लिखते रहते हैं। वर्तमान में अनुसूचित जाति विकास विभाग के शासकीय आवासीय ज्ञानोदय विद्यालय, होशंगाबाद (मध्य प्रदेश) में शिक्षक पद पर कार्यरत हैं।

सम्पर्क : mukeshmalviya15@gmail.com