Translation of ***A Puzzle Leading to Some Interesting Mathematics*** : **A. Ramchandran** From Azim Premji Foundation, Azim Premji University At Right Angles_March, 2014

दिलचस्प गणित की ओर ले जाती एक पहेली

ए रामचन्द्रन

एक जानी-पहचानी पहेली है जो छोटे बच्चों से भी पूछी जा सकती है :

"घरों की एक कतार है, जिसमें घरों के नम्बर एक से शुरू होकर क्रमश: बढ़ते हैं। एक दिन एक घर का निवासी यह ध्यान देता है कि उसके घर के बाईं ओर के सभी घरों के नम्बर का योग तथा उसके दाईं ओर के सभी घरों के नम्बर का योग बराबर है। बताओ, इस कतार में कुल कितने घर हैं? तथा उस व्यक्ति के घर का नम्बर क्या है?"

यदि यह बता दिया जाए कि कुल घरों की संख्या 10 से कम है, तो मामला सरल हो सकता है। तब इस पहेली का हल प्रयत्न एवं त्रुटि विधि (trial and error method) द्वारा पाना मुश्किल नहीं है। चाहें तो आप भी कोशिश करके देख सकते हैं।

चुनौती की अगली कड़ी के रूप में इस पहेली का कोई दूसरा सम्भव हल भी पूछा जा सकता है। (घरों की संख्या अब भी 50 से कम ही है) अब प्रयत्न एवं त्रुटि शायद एक अच्छा विकल्प न हो। यहाँ हम प्रथम n प्राकृत संख्याओं के जोड़ के लिए प्रयुक्त किए जाने वाले जाने-माने सूत्र का उपयोग कर सकते हैं :

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

मान लीजिए घरों की संख्या n है और उस व्यक्ति के घर का नम्बर m है। तब 1 से $m-1$ तक की संख्याओं का योग $m+1$ से n तक की संख्याओं के योग के बराबर होगा। यानी कि

$$\frac{(m-1)m}{2} = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(m+1)m}{2} \qquad (1)$$

और इसलिए $m^2 = \frac{n(n+1)}{2}$ (2)

समीकरण (2) का दायाँ पक्ष एक *त्रिभुज संख्या* को दर्शाता है, जबकि बायाँ पक्ष एक वर्ग संख्या को। अत: हमें ऐसी संख्याएँ तलाशनी होंगी जो त्रिभुज संख्या के साथ-साथ वर्ग संख्या भी हो।

ऐसी संख्याओं की सूची उपलब्ध है। अगर 1 को छोड़ दें तो ऐसी सबसे छोटी संख्या 36 है। यह छठवीं वर्ग संख्या और आठवीं त्रिभुज संख्या है। इस हिसाब से उस व्यक्ति के घर का नम्बर (m) 6 है तथा कुल घरों की संख्या (n) 8 है। उसके घर के बाईं ओर के घरों के नम्बरों

का योग 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 होगा तथा उसके दाईं ओर के घरों का योग 7 + 8 = 15 होगा। m और n के अगले मान क्रमश: 35 और 49 होंगे।

$1 + 2 + 3 + \cdots + 33 + 34 = 595$

$36 + 37 + 38 + \cdots + 48 + 49 = 595$

भले ही यह स्पष्ट नहीं हो, पर (m, n) के लिए पूर्ण संख्याओं के ऐसे बहुत सारे जोड़े हैं जो समीकरण (2) को सन्तुष्ट करते हैं। नीचे तालिका में ऐसे ही कई जोड़े दर्शाए गए हैं :

m	1, 6, 35, 204, 1189, 6930...
n	1, 8, 49, 288, 1681, 9800...

(3)

जैसे-जैसे m और n का मान बढ़ता जाता है, अनुपात n/m का मान √2 के मान के क़रीब आने लगता है। उदाहरण के लिए :

$$\frac{49}{35} = 1.4, \quad \frac{288}{204} \approx 1.41, \quad \frac{1681}{1189} \approx 1.414, \quad \ldots.$$

हम देखते हैं कि n/m धीरे-धीरे √2 के मान के क़रीब होता जा रहा है। यह समझना कठिन नहीं है कि ऐसा क्यों हो रहा है। हम $m^2 = n(n+1)/2$ को $n^2 + n = 2m^2$ के रूप में भी लिख सकते हैं, जिससे हमें मिलता है

$$\frac{n^2}{2m^2} = 1 - \frac{n}{2m^2},$$
$$\therefore \frac{n^2}{2m^2} = 1 - \frac{n}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

जैसे-जैसे n का मान बड़ा होता जाता है $\frac{1}{n+1}$ का मान शून्य के क़रीब आता जाता है, जिसका मतलब है कि $\frac{n^2}{m^2}$ 2 के क़रीब आता है ।

सूची (3) में हम कुछ बहुत स्पष्ट पैटर्न देख सकते हैं, m पंक्ति में भी और n पंक्ति में भी। उदाहरण के लिए n पंक्ति की संख्याओं को निम्नानुसार लिखिए :

1^2, $8 = 3^2 - 1$, 7^2,

$288 = 17^2 - 1$, $1681 = 41^2$, ..., (4)

हम देखते हैं कि इन संख्याओं में एक ख़ास क्रम है :

$1, 3, 7, 17, 41, \cdots,$ (5)

और इस क्रम में अपना एक पैटर्न है। इसमें प्रत्येक संख्या को उससे पहले की दो संख्याओं के संयोजन से निर्मित किया जा सकता है (लगभग फिबोनाची संख्याओं के नियम के समान)। इस अनुक्रम की कोई तीन क्रमागत संख्याएँ अगर a, b और c हों, तो

$$c = 2b + a \qquad (6)$$

उदाहरण के लिए : 41 = (2 x 17) + 7। यदि यह पैटर्न वैध है तो हमें इस क्रम की कई संख्याओं का अनुमान लगाने में सक्षम होना चाहिए। जैसे 41 के बाद की संख्या (2 x 41) + 17 = 99 होनी चाहिए, इसलिए 1681 के बाद की संख्या n, $99^2 - 1 = 98 \times 100 = 9800$ होनी चाहिए, और वास्तव में यही होती है।

इस पैटर्न को थोड़ा और आगे बढ़ाएँ तो अनुक्रम (5) में 99 के बाद वाली संख्या (2 x 99) + 70 = 239 तथा सूची (3) में दिए 1681 के बाद वाली संख्या का मान $239^2 = 57121$ होना चाहिए।

अब क्या हम सूची (3) के m पंक्ति में संख्या 6930 के बाद आने वाली संख्या का पूर्वानुमान लगा सकते हैं? इन संख्याओं में भी एक सरल-सा पैटर्न है। यदि इस अनुक्रम की तीन क्रमागत संख्याएँ a, b, c हों तो

$$c = 6b - a \qquad (7)$$

उदाहरण के लिए : 35 = (6 x 6) - 1, इसी तरह 6930 के बाद वाली संख्या होनी चाहिए

(6 x 6930) - 1189 = 40391 ।

अत: हम निम्नलिखित समिका (equality) के सही होने की अपेक्षा करते हैं :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 40390 = 40392 + 40393 + \cdots + 57121$$

वास्तव में यह सही है। दोनों पक्ष 815696245 के बराबर हैं। (प्लीज़ जाँच करके देखें। जाँच के लिए आप इस तथ्य का इस्तेमाल करें कि धनात्मक पूर्णांकों का योग $\frac{n(n+1)}{2}$ होता है।)

अन्त में पाठकों से अपेक्षा है कि वे भी सूची (3) में और नए-नए पैटर्न को खोजें और हो सके तो प्रमाण भी प्रस्तुत करें।

(*इनकी सचमुच ज़रूरत है*.....)

ए रामचन्द्रन की रुचि विज्ञान और गणित के शिक्षण में रही है। उन्होंने स्नातक की पढ़ाई भौतिक विज्ञान और गणित विषय में की थी, लेकिन स्नातकोत्तर स्तर पर उन्होंने लाइफ साइंस का अध्ययन किया है। दो दशक से भी अधिक समय तक उन्होंने ऋषि वेली स्कूल की माध्यमिक कक्षाओं में विज्ञान, गणित

और भूगोल पढ़ाया। अब वे चेन्नई में रहते हैं। इसके अलावा, उनकी रुचि अँग्रेज़ी भाषा और भारतीय संगीत में है। उनसे archandran.53@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : मनोज कुमार शराफ़ **अनुवाद पुनरीक्षण :** सुशील जोशी
कॉपी-एडिटर : अनुज उपाध्याय (सभी एकलव्य फ़ाउण्डेशन)
सम्पादन : कविता तिवारी एवं राजेश उत्साही