Translation of *Teaching Ternary Base Using a Card Trick* : **Suhas Saha**, From_Azim Premj University At Right Angles_August, 2017

ताश के पत्तों के करतब से

त्रि-आधार [Ternary Base]

सिखाना*

सुहास साहा

"कोई भी पर्याप्त रूप से उन्नत तकनीक किसी जादू से अलग नहीं है।"

– *Profiles of the Future : An Inquiry Into the Limits of the Possible* में आर्थर सी. क्लार्क

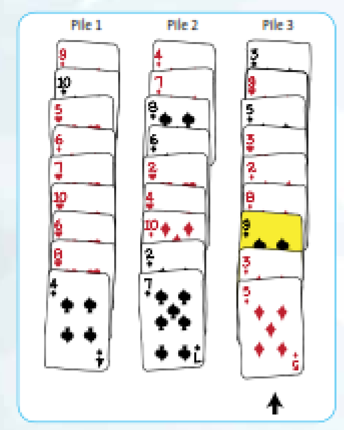
बच्चे हों या बड़े, जादू में सभी का ध्यान खींचने की क्षमता होती है। फिर चाहे वह टोपी में से खरगोश निकालने का पारम्परिक करतब हो या मन को पढ़ने वाला ताश के पत्तों का अधिक परिष्कृत करतब। हमने अपने स्कूल के बच्चों में गणित के प्रति कौतूहल जगाने के लिए ताश के पत्तों का उपयोग करते हुए एक प्रोजेक्ट शुरू किया। हमें सभी ग्रेड के बच्चों से मिली सकारात्मक प्रतिक्रिया देखकर बहुत सुखद आश्चर्य हुआ।

इस लेख में हम बताएँगे कि किस तरह हमने ताश के 27-पत्तों के करतब से ग्रेड 9 के विद्यार्थियों का त्रि-आधारी प्रणाली [Ternary Base] से परिचय करवाया।

जादू

ताश के पत्तों की एक गड्डी लें, उसमें से सभी जोकर अलग कर दें और फिर गड्डी को फेंटें। अब गड्डी में से कोई भी 27 पत्ते चुन लें। इन्हें अपनी कक्षा के विद्यार्थियों के सामने फैला दें। बच्चों में से किसी एक को वालिंटियर के रूप में आगे आने को कहें। उस वालिंटियर को बताएँ कि उसे, बिना किसी तरतीब के, कोई भी एक पत्ता चुनना है, बाक़ी कक्षा को दिखाना है और उसे फिर से ताश की गड्डी में रख देना है। (जब वालिंटियर ऐसा कर रहा हो तब आप अपनी आँख बन्द कर लें या उस ओर पीठ कर लें ताकि यह सबको साफ़ हो कि आपने वह

* ***मुख्य शब्द :*** *ताश के 27-पत्तों का करतब (27-card trick), त्रि-आधार (ternary base), जादू, उच्चतम फलन*



चित्र–1

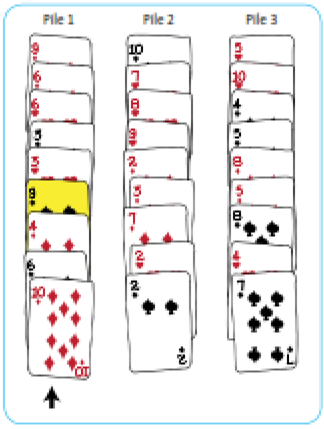
चुना हुआ पत्ता नहीं देखा है)। अब यह पत्ता गुप्त पत्ता कहलाएगा। वालिंटियर से ताश की गड्डी को अच्छी तरह फेंटने को कहें ताकि सभी देखने वाले सन्तुष्ट हो जाएँ कि वह गुप्त पत्ता उस गड्डी में कहीं खो चुका है। वालिंटियर से ताश की गड्डी लें ले और आप घोषणा करें कि तीन चरणों में आप उस गुप्त पत्ते को सामने ले आएँगे।

यहाँ हमारे उदाहरण में, मान लीजिए कि वह गुप्त पत्ता हुकुम का नेहला (9) है। हम हुकुम का नहला [9 of spades] के लिए 9S, ईंट का नहला [9 of diamonds] के लिए 9D, चिड़ी का नहला [9 of clubs] के लिए 9C और पान का नहला [9 of hearts] के लिए 9H के अंकन का इस्तेमाल करेंगे। सभी की नज़रों के सामने, चरण I में, पत्तों के सामने के भाग को खोलकर रखते हुए तीन ढेरियों में जमा दें, हर ढेरी में 9 पत्ते हों।

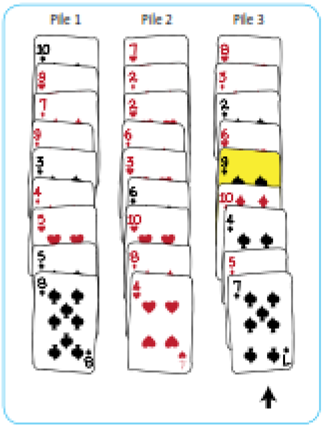
चित्र-1 देखें । पहला पत्ता जो बाँटा जाएगा वह 9D होगा, दूसरा पत्ता 4D, तीसरा पत्ता 3S, चौथा पत्ता 10S और इस क्रम में अन्य पत्ते होंगे, जिनमें 25वें, 26वें, 27वें स्थान पर क्रमशः 4S, 7S और 5D पत्ते होंगे। पहली ढेरी में पत्तों के सामने के भाग को खोलकर रखते हुए उनका इस प्रकार ढेर जमाएँ कि पत्ता #25 सबसे ऊपर पहला पत्ता हो और पत्ता #1 सबसे नीचे, ढेरी का आख़िरी पत्ता हो। इसी प्रकार, बाकी दोनों ढेरियों के पत्तों को जमाएँ। उदाहरण के लिए, तीसरी ढेरी में पत्ता #27 सबसे ऊपरी और पत्ता #3 सबसे नीचे का पत्ता होगा। वालिंटियर अब उस ढेरी की ओर इशारा करेगा जिसमें गुप्त पत्ता है।

तीनों ढेरियों को पलट दें ताकि सभी पत्तों का सामने का हिस्सा अब नीचे की ओर हो। ढेरियों को उठाकर, अपनी हथेली पर एक के ऊपर एक रखें। ऐसा करते समय यह ध्यान रखें कि जिस ढेरी में गुप्त पत्ता होना बताया गया है वह बाकी दोनों ढेरियों के बीच में हो। यहाँ हमारे उदाहरण में, चूँकि गुप्त पत्ता ढेरी 3 में है इसलिए इस ढेरी को ढेरी 1 एवं ढेरी 2 के बीच में रखना चाहिए। आप चाहें तो अपनी हथेली पर सबसे पहले ढेरी 2 को रखें, इसके बाद ढेरी 3 और सबसे ऊपर ढेरी 1 रख दें। दूसरे शब्दों में, ढेरी 2 सबसे नीचे है, ढेरी 3 बीच में और ढेरी 1 सबसे ऊपर है।

चरण II और चरण III में हम 27 पत्तों के सामने के भाग को खोलकर 9 पत्तों वाले 3 ढेरियों में बाँटना दोहराएँगे, वालिंटियर से फिर पूछेंगे कि गुप्त पत्ता किस ढेरी में है और पत्तों को इकट्ठा करते समय उस ढेरी को बाकी दोनों ढेरियों के बीच में रखेंगे। तीनों चरण पूरे हो जाने के बाद अब हम उस गुप्त पत्ते को ज़ाहिर करने के लिए तैयार हैं।

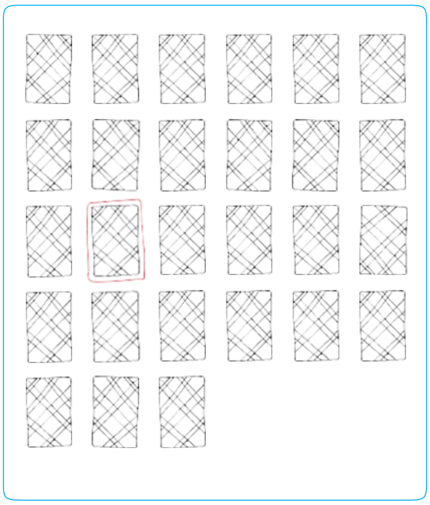


चित्र – 2



चित्र – 3

चित्र-2, चरण II में पत्ते बाँटे जाने के बाद उनकी जमावट को दिखाता है। चूँकि गुप्त पत्ता अब ढेरी 1 में है, तो ढेरियों को इस प्रकार इकट्ठा करके हथेली पर जमाया जाएगा कि ढेरी 2 और ढेरी 3 के बीच में ढेरी 1 रहे। मान लें कि आपने ढेरियों को इस प्रकार से जमाया कि ढेरी 2 सबसे ऊपर है, ढेरी 1 बीच में और ढेरी 3 सबसे नीचे है। **चित्र-3** चरण III में पत्ते बाँटे जाने के बाद उनकी जमावट को दिखाता है। गुप्त पत्ता अब ढेरी 3 में है। अतः, आपको ढेरियों को इस प्रकार इकट्ठा करना है कि ढेरी 3 बीच में रहे। ध्यान दें कि चरण III के अन्त में गुप्त पत्ता हमेशा ऊपर से (या नीचे से) 14वें स्थान पर रहेगा, जो कि पत्तों के ढेर का बीच वाला पत्ता है। यह **चित्र 3** से स्पष्ट है।



चित्र-4

एक हाथ में पत्तों का ढेर लेकर, जिसमें सभी पत्तों के सामने वाला भाग नीचे की ओर हो, पत्ते बाँटिए (बाँटते समय आप पत्तों के सामने वाले भाग को खोलकर, या उसे नीचे की ओर रखते हुए कैसे भी बाँट सकते हैं)। पत्तों को मेज़ पर बेतरतीब रखते जाएँ लेकिन 14वें पत्ते का बराबर ध्यान रखें। सभी पत्ते बाँट लेने के बाद ऐसा जताएँ मानो गुप्त पत्ता आपके ध्यान से उतर गया

है। जब दर्शक आपको हारा हुआ मानने को हों तभी 14वें पत्ते की ओर इशारा करें और घोषणा करें कि यही वह गुप्त पत्ता है। दर्शकों की तारीफ़ को विनम्रता के साथ स्वीकार करें और उसका आनन्द लें!

यह करतब क्यों काम करता है?

वालिंटियर ने जब गुप्त पत्ते को ताश की गड्डी में डाल दिया और उसे खूब अच्छी तरह से फेंट लिया तो उसके बाद गड्डी में गुप्त पत्ते की स्थिति को (ऊपर से गिनते हुए) हम n से दिखाएँगे। यानी, $1 \geq n \geq 27$। उदाहरण के लिए, यदि n = 15 है, तो इसका अर्थ हुआ कि गुप्त पत्ते के ऊपर 14 पत्ते और नीचे 12 पत्ते हैं। आइए, चरण I के बाद गुप्त पत्ते की नई स्थिति की गणना करें, यानी पत्ते बाँटने और उन्हें फिर से इकट्ठा करके जिस ढेरी में गुप्त पत्ता है उसे बाकी दो ढेरियों के बीच रखने के बाद।

जब पत्ते तीन ढेरियों में बाँट दिए जाते हैं, तो गड्डी का पहला, दूसरा और तीसरा पत्ता, क्रमशः 1, 2 और 3 ढेरियों के पहले पत्ते बन जाते हैं। इसी प्रकार, गड्डी का चौथा, पाँचवाँ और छठा पत्ता क्रमशः 1, 2 और 3 ढेरियों का दूसरा पत्ता बन जाते हैं, और इस प्रकार यह क्रम जारी रहता है। आप स्वयं यह जाँच सकते हैं कि गड्डी में 16वाँ, 17वाँ और 18वाँ पत्ता क्रमशः 1, 2 और 3 ढेरी का छठा पत्ता बन जाते हैं।

इससे हम एक गणितीय फलन बनाते हैं, जो 27 पत्तों को प्रति ढेरी 9 पत्तों वाली तीन ढेरियों में बाँटने के बाद चुने हुए पत्ते की स्थिति को बताता है।

- n यदि 3 का गुणक है, (जैसे n = 3m *है*), तो n तीसरी ढेरी में जाएगा और स्थान m लेगा, यानी $f(n) = m$। उदाहरण के लिए, यदि गुप्त पत्ते की शुरुआती स्थिति n = 12 है, तो गुप्त पत्ता तीसरी ढेरी में स्थान 4 लेगा।

- अब, ऐसी परिस्थिति की कल्पना करें जहाँ n 3 का गुणक नहीं है। माना कि n = 20। ध्यान दें कि 20 की संख्या 18 और 21 के बीच में आती है (ये दोनों संख्याएँ 20 के दोनों ओर 3 की क्रमागत गुणक हैं)। अब, जबकि 6-6 पत्तों की तीन ढेरियों में 18 पत्ते बाँटे जा चुके हैं, तो पत्ता #19 ढेरी 1 का 7वाँ पत्ता, पत्ता #20 ढेरी 2 का 7वाँ पत्ता और पत्ता #21 ढेरी 3 का 7वाँ पत्ता बन जाते हैं।

ध्यान दें कि

$$\frac{19}{3} = 6 + \frac{1}{3}, \qquad \frac{20}{3} = 6 + \frac{2}{3}, \qquad \frac{21}{3} = 7.$$

तो हम f को ऐसा चाहते हैं कि $f(19) = 7$, $f(20) = 7$ और $f(21) = 7$ हो। इन अवलोकनों से यह देखना मुश्किल नहीं है कि

$$f(n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil. \tag{1}$$

जहाँ $\lceil x \rceil$ *उच्चतम फलन* है, जिसे इस प्रकार परिभाषित किया जाता है : $\lceil x \rceil$ सबसे छोटा पूर्णांक है जो x से बड़ा या उसके बराबर है।
(उदाहरण : $\lceil 1.7 \rceil = 2$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil 8 \rceil = 8$)

यहाँ आगे चर्चा में हम उच्चतम फलन के निम्नलिखित महत्त्वपूर्ण गुण का बार-बार इस्तेमाल करेंगे (इसका प्रमाण आप स्वयं ढूँढने की कोशिश करें) :

प्रमेय : *किन्हीं दो धनात्मक वास्तविक संख्याओं m एवं n के लिए,*

$$\left\lceil \frac{\lceil m \rceil}{n} \right\rceil = \left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$$

चरण I के बाद चुने हुए पत्ते की स्थिति : उपर्युक्त विवेचन से हम यह नतीजा निकालते हैं कि यदि चुना हुआ पत्ता शुरुआत में n_0 स्थान पर है, तो चरण I के बाद (यानी जब 9 पत्तों की एक ढेरी उस ढेरी के ऊपर रख दी गई हो जिसमें गुप्त पत्ता है) वह स्थिति n_1 पर होगा, जहाँ

$$n_1 = 9 + \left\lceil \frac{n_0}{3} \right\rceil. \tag{2}$$

हम इसे संक्रिया M कहते हैं, जिसमें M से तात्पर्य है कि वह ढेरी जिसमें गुप्त पत्ता है उसे 'मध्य' में रखा गया है। उदाहरण के लिए, यदि शुरुआत में गुप्त पत्ता स्थान $n_0 = 23$ पर था, तो चरण I के बाद वह पत्ता स्थान n_1 पर होगा, जहाँ

$$n_1 = M(23) = 9 + \left\lceil \frac{23}{3} \right\rceil = 17.$$

चरण II के अन्त में वह पत्ता ऊपर से स्थान n_2 पर होगा, जहाँ

$$\begin{aligned} n_2 = M\big(M(n_0)\big) &= 9 + \left\lceil \frac{n_1}{3} \right\rceil \\ &= 9 + \left\lceil \frac{17}{3} \right\rceil = 9 + 6 = 15. \end{aligned}$$

तो, 23वाँ पत्ता 15वें स्थान पर जा पहुँचेगा। चरण III के बाद पत्ते की स्थिति n_3 होगी, जहाँ

$$n_3 = M\left(M\big(M(n_0)\big)\right) = 9 + \left\lceil \frac{n_2}{3} \right\rceil$$
$$= 9 + \left\lceil \frac{15}{3} \right\rceil = 14.$$

करतब का कमाल हो, इसके लिए ज़रूरी है कि $1 \geq n_0 \geq 27$ गुणधर्म वाले किसी भी n_0 के लिए निम्नलिखित लागू होता हो,

$$M\left(M\big(M(n_0)\big)\right) = 14. \tag{3}$$

इसे दर्शाने के लिए, ध्यान दें कि

$$n_3 = 9 + \left\lceil \frac{n_2}{3} \right\rceil,$$
$$n_2 = 9 + \left\lceil \frac{n_1}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{27 + n_1}{3} \right\rceil,$$
$$\therefore \quad n_3 = 9 + \left\lceil \frac{1}{3} \left\lceil 27 + \frac{n_1}{3} \right\rceil \right\rceil$$
$$= 9 + \left\lceil \frac{27 + n_1}{9} \right\rceil = 12 + \left\lceil \frac{n_1}{9} \right\rceil.$$

अगला,

$$n_1 = 9 + \left\lceil \frac{n_0}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{27 + n_0}{3} \right\rceil,$$
$$\therefore \quad \left\lceil \frac{n_1}{9} \right\rceil = \left\lceil \frac{1}{9} \left\lceil \frac{27 + n_0}{3} \right\rceil \right\rceil = \left\lceil \frac{27 + n_0}{27} \right\rceil$$
$$= 1 + \left\lceil \frac{n_0}{27} \right\rceil = 1 + 1 = 2,$$

चूँकि $\left\lceil \frac{n_0}{27} \right\rceil = 1$ (क्योंकि $1 \geq n_0 \geq 27$)। यह, इस नतीजे की ओर ले जाता है :

$$n_3 = M\left(M\big(M(n_0)\big)\right) = 13 + \left\lceil \frac{n_0}{27} \right\rceil = 14. \tag{4}$$

यह ध्यान दें कि ताश के 27 पत्तों की गड्डी में 14 मध्य स्थिति है। यह करतब तब भी अपना कमाल दिखाता, जब हमने 21 पत्ते लिए होते और उन्हें 7 पत्तों वाली तीन ढेरियों में बाँटा होता, और ऊपर बताए अनुसार चरण I, II, III दोहराए होते। तीन चरणों के बाद चुना हुआ पत्ता 11वें स्थान पर होता, जो कि 21 पत्तों की गड्डी में बीच की स्थिति होती; देखें [1]।

करतब का सामान्यीकरण

अब हम ऊपर बताए करतब को इस तरह बदलेंगे जो त्रि-आधार के विकास की ओर ले जाएगा। (त्रि-आधार से क्या अर्थ है, इसके लिए **बॉक्स** देखें।) प्रश्न यह है : *चुने हुए पत्ते को 14वें स्थान पर लाने की बजाय क्या हम इन चरणों को कुछ इस तरह से कर सकते हैं कि चुने हुए पत्ते को किसी अन्य स्थान पर ला सकें?* एक उदाहरण आज़माते हैं।

पहले की तरह, ताश के 27 पत्तों को, उनके सामने वाले भाग को नीचे की ओर रखते हुए फैला दें। देखने वालों में से किसी एक को वालिंटियर के रूप में आगे आकर कोई भी एक पत्ता चुनने, बाकी सबको दिखाने और उसे फिर से ताश की गड्डी में रखने को कहें। इस दौरान आप अपनी पीठ उस ओर कर लें ताकि यह सबको साफ़ हो कि आपने वह गुप्त पत्ता नहीं देखा है। अब वालिंटियर से 1 से 27 के बीच कोई एक संख्या n चुनने को कहें। जब n को चुना जा रहा हो तब ताश की गड्डी को खूब फेंटें ताकि सभी देखने वाले सन्तुष्ट हो जाएँ। पिछले करतब में तीन चरणों में वह पत्ता गड्डी के बीच में ले आया गया था, इस बार हमारा काम गड्डी के पत्तों को 9-9 पत्तों वाली 3 ढेरियों में बाँटकर और उन्हें उसी क्रम में उठाते हुए उस पत्ते को n स्थान पर लाना है। स्वाभाविक है कि आप हर चरण में जिस क्रम में पत्तों को इकट्ठा करेंगे वह करतब का अपना कमाल दिखाने में महत्त्वपूर्ण होगा।

हम इसे यहाँ तीन उदाहरणों से दिखाएँगे।

उदाहरण 1 : माना कि n = 23। इसका मतलब हुआ कि चरण III के बाद हम गुप्त पत्ते को 23वें स्थान पर देखना चाहते हैं।

याद करें कि चरण III में पत्तों को तीन ढेरियों में बाँटना, वालिंटियर से उस ढेरी की ओर इशारा करने को कहना जिसमें गुप्त पत्ता है और उसके बाद तीनों ढेरियों को उठाना शामिल है। ध्यान दें कि ढेरियों को इकट्ठा करने के तीन तरीक़े हैं :

T: गुप्त पत्ते वाली ढेरी को बाकी दो ढेरियों के ऊपर [**T**op] रखें।
M: गुप्त पत्ते वाली ढेरी को बाकी दो ढेरियों के बीच में [**M**iddle] रखें।
B: गुप्त पत्ते वाली ढेरी को बाकी दो ढेरियों के नीचे [**B**ottom] रखें।

यदि गुप्त पत्ते को 23वें स्थान पर रखना है तो इसके ऊपर 22 पत्ते होने चाहिए। चूँकि हर ढेरी में 9 पत्ते हैं, तो हम उन दो ढेरियों (18 पत्तों) को इकट्ठा करेंगे जिनमें गुप्त पत्ता नहीं है और उन्हें उस ढेरियों के ऊपर रख देंगे जिसमें गुप्त पत्ता है। यह हुई संक्रिया (**B**)। ज़ाहिर है कि गुप्त पत्ता 23वें स्थान पर हो, यह सुनिश्चित करने के लिए इतना ही काफ़ी नहीं है। उदाहरण के लिए, माना कि गुप्त पत्ता ढेरी 1 में 7वें स्थान पर है। तब, यदि हम ढेरी 2 और ढेरी 3 (कुल पत्ते 18) को ढेरी 1 के ऊपर रखें और पत्ते बाँटें तो गुप्त पत्ते की स्थिति 18 + 7 = 25 होगी। गुप्त पत्ता 23वें स्थान पर हो, इसके लिए हमें यह सुनिश्चित करना है कि जब चरण III में पत्ते बाँटे जाएँ तब गुप्त पत्ता *अपनी ढेरी में* 5वें स्थान पर हो।

त्रि-आधार
त्रि-आधार, 'base 3' ही है। आप में से अधिकतर base 2 से परिचित होंगे, जिसे **द्विआधार प्रणाली (binary system)** भी कहते हैं, जिसमें केवल 0 और 1 अंकों का उपयोग होता है।

इस प्रणाली में हम धनात्मक पूर्णांकों को 2 की भिन्न घातों के योग के रूप में व्यक्त करते हैं। उदाहरण के लिए :

$6 = 2^2 + 2^1 = (110)_{\text{base two}}$,

$7 = 2^2 + 2^1 + 2^0 = (111)_{\text{base two}}$,

$11 = 2^3 + 2^1 + 2^0 = (1011)_{\text{base two}}$,

$19 = 2^{43} + 2^1 + 2^0 = (10011)_{\text{base two}}$,

इत्यादि। यह प्रणाली इसलिए काम करती है क्योंकि प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक को **अद्‌वितीय** तरीक़े से 2 की भिन्न घातों के योग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है; अद्‌वितीय का मतलब है कि उस योग को लिखने का केवल एक ही तरीक़ा है। 2 की प्रत्येक घात उस योग में या तो मौजूद होगी या नहीं होगी, और इसकी वजह से अंक 1 या 0 ही होते हैं।

इसी प्रकार, हम प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक को 3 की घातों में व्यक्त कर सकते हैं। हालाँकि, यहाँ हम '3 की विशिष्ट घातों का योग' नहीं कह सकते हैं; उदाहरण के लिए, हम 6 को 3 की विशिष्ट घातों के योग के रूप में नहीं लिख सकते हैं। लेकिन हम प्रत्येक पूर्णांक को 3 की घातों के योग के रूप में व्यक्त कर सकते हैं बशर्ते कि हम प्रत्येक घात को उपयोग में नहीं लेने, या एक बार उपयोग में लेने, या दो बार उपयोग में लेने की छूट दें; इससे अधिक विकल्पों की ज़रूरत नहीं है। उदाहरण के लिए :

$4 = 3^1 + 3^0 = (11)_{\text{base three}}$,

$5 = 3^1 + 2 \cdot 3^0 = (12)_{\text{base three}}$,

$6 = 2 \cdot 3^1 = (20)_{\text{base three}}$,

$7 = 2 \cdot 3^1 + 3^0 = (21)_{\text{base three}}$,

$8 = 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = (22)_{\text{base three}}$,

इत्यादि। ऊपर दिया गया प्रत्येक व्यंजक अद्‌वितीय है।

तो हम यह कैसे करें? चरण III की शुरुआत में जब हम 27 पत्ते बाँटेंगे, तब गड्डी का 13वाँ, 14वाँ और 15वाँ पत्ता क्रमशः ढेरी 1, 2 और 3 में 5वाँ स्थान लेगा। अतः, चरण II के अन्त में, जब हमने तीनों ढेरियों को इकट्ठा कर लिया होगा, तब गुप्त कार्ड को गड्डी में 13वें या 14वें या 15वें स्थान पर होना चाहिए। इसके लिए ज़रूरी है कि हम चरण II में संक्रिया (**M**) को अपनाएँ : 9 पत्तों वाली उस ढेरी को लें जिसमें गुप्त पत्ता है, उसके ऊपर एक ढेरी और नीचे एक ढेरी रखें। क्या यह सुनिश्चित करने के लिए कि चरण II के अन्त में गुप्त पत्ता 13वें या 14वें या 15वें स्थान पर हो, इतना ही काफ़ी है? इसका जवाब है, हाँ, लेकिन ऐसा तब ही मुमकिन है जबकि चरण II की शुरुआत में जब पत्ते बाँटे जाएँ तब गुप्त पत्ता अपनी ढेरी में स्थान 4, 5, या 6 पर हो।

ध्यान दें कि जब 27 पत्तों की गड्डी को बाँटा जाता है तब हमेशा 10 से 18 स्थानों वाले पत्ते अपनी-अपनी ढेरियों में स्थान 4, 5 या 6 पर स्थित होंगे। उदाहरण के लिए, दूसरी ढेरी में

स्थान 4 पर 11वाँ पत्ता होगा, तीसरी ढेरी में स्थान 5 पर 15वाँ पत्ता होगा, और पहली ढेरी में स्थान 6 पर 16वाँ पत्ता होगा। अतः, चरण II की शुरुआत में गुप्त पत्ते को अपनी ढेरी में स्थान 4, 5 या 6 पर रखने की समस्या अब चरण I के अन्त में गुप्त पत्ते को गड्डी में 10 से 18 स्थानों के बीच किसी भी स्थिति में रखने तक सीमित हो गई है। चरण I के बाद पत्तों को इकट्ठा करने का (**T**), (**M**), (**B**) में से कौन-सा तरीक़ा यह सुनिश्चित करेगा? जवाब है तरीक़ा (**M**), ताकि गुप्त पत्ते वाली ढेरी के ऊपर 9 पत्ते हों, और इस तरह गुप्त पत्ता गड्डी में 10 से 18 स्थानों के बीच किसी एक स्थिति में होगा।

संक्षेप में कहें तो, हम गुप्त पत्ते को 23वें स्थान पर लाने के लिए चरण III, II और I में क्रमशः तरीक़े (**B**), (**M**), (**M**) काम में लेंगे। आइए, इन तरीक़ों को कुछ संख्याएँ दें, माना कि (**T**) = 0, (**M**) = 1, (**B**) = 2। इन संख्याओं के पीछे का विचार यह है कि संक्रिया (**T**), (**M**), (**B**) से हम गुप्त पत्ते वाली ढेरी के ऊपर क्रमशः 0, 1 या 2 ढेरियाँ रख रहे हैं। ध्यान दें कि $23 - 1 = 22 = 2 \times 3^2 + 1 \times 3^1 + 1 \times 3^0$, जो बताता है कि गुप्त पत्ते के ऊपर पत्तों की संख्या, जो हमारे उदाहरण में 22 है, को (**M**), (**M**), (**B**) के अनुक्रम में संक्रियाओं का उपयोग करके बनाया जा सकता है। यह और कुछ नहीं बल्कि, छद्म भेष में, 22 का त्रि-आधारी निरूपण है।

उदाहरण 2 : माना कि $n = 21$। हम गुप्त पत्ते को स्थान 21वें में स्थित करने वाली संक्रियाओं को पाना चाहते हैं।

चूँकि 21 = 18 + 3, तो तीसरी संक्रिया (**B**) होना चाहिए ताकि गुप्त पत्ते वाली ढेरी के ऊपर 18 पत्ते हों। इसके अलावा, चरण III के अन्त में गुप्त पत्ते को *अपनी ढेरी में* स्थान 3 पर होना चाहिए। इसका मतलब है कि चरण III की शुरुआत में गुप्त पत्ते को गड्डी में 7वें, 8वें या 9वें स्थान पर होना चाहिए। इस तरह की जमावट के लिए हम कैसे व्यवस्था करें? यह केवल तब ही सम्भव है जब हम चरण II में गुप्त पत्ते वाली ढेरी के नीचे दो ढेरियों (18 पत्तों) को रखते हुए पत्ते इकट्ठा करें। अर्थात, हम चरण II में संक्रिया (**T**) को लागू करें। इसके अतिरिक्त, जब हम चरण II में पत्ते बाँटें तो गुप्त पत्ता अपनी ढेरी में 7वाँ, 8वाँ या 9वाँ पत्ता होना चाहिए। ध्यान दें कि जब 27 पत्तों की गड्डी को बाँटा जाता है तो 19वें से 27वें पत्ते *अपनी-अपनी ढेरियों में* 7वाँ, 8वाँ या 9वाँ स्थान लेते हैं।

उदाहरण के लिए, पहली ढेरी में स्थान 7 पर 19वाँ पत्ता होगा, दूसरी ढेरी में स्थान 8 पर 23वाँ पत्ता होगा और तीसरी ढेरी में स्थान 9 पर 27वाँ पत्ता होगा। अतः, चरण II में जब पत्ते बाँटे जाएँ तब गुप्त पत्ते को *अपनी ढेरी में* स्थान 7, 8 या 9 पर रखने की समस्या अब चरण I के अन्त में गुप्त पत्ते को गड्डी में 19 से 27 स्थानों के बीच किसी भी स्थिति में रखने तक सीमित हो गई है। अतः, चरण I में हमें संक्रिया (**B**) को लागू करते हुए पत्तों को इकट्ठा करना चाहिए, यानी गुप्त पत्ते वाली ढेरी के ऊपर पत्तों की दो ढेरियाँ रखें।

संक्षेप में कहें तो, हम गुप्त पत्ते को स्थान 21 पर लाने के लिए चरण III, II, I में क्रमशः संक्रिया (**B**), (**T**), (**B**) को काम में लेंगे। चूँकि
(**T**) = 0, (**M**) = 1, (**B**) = 2 और
$21 - 1 = 20 = 2 \times 3^2 + 0 \times 3^1 + 2 \times 3^0$, जो बताता है कि गुप्त पत्ते के ऊपर पत्तों की संख्या, जो हमारे उदाहरण में 20 है, को (**B**), (**T**), (**B**) के अनुक्रम में संक्रियाओं का उपयोग करके बनाया जा सकता है। फिर से, यह 22 का त्रि-आधारी निरूपण है।

उदाहरण 3 : माना कि $n = 16$। हम गुप्त पत्ते को स्थान 16 में स्थित करने वाली संक्रियाओं को पाना चाहते हैं।

चूँकि 16 = 9 + 7, तो तीसरी संक्रिया (**M**) होना चाहिए ताकि गुप्त पत्ते वाली ढेरी के ऊपर 9 पत्ते हों। इसके अलावा, चरण III के अन्त में गुप्त पत्ते को *अपनी ढेरी में* स्थान 7 पर होना चाहिए। अतः, जब हम चरण II के अन्त में पत्ते इकट्ठा करें तो हमें गुप्त पत्ते वाली ढेरी के ऊपर दो ढेरियाँ रखनी होंगी, जो कि संक्रिया (**B**) है। इसके अतिरिक्त, हमें यह सुनिश्चित करना है कि जब हम चरण II में पत्ते बाँटें तो गुप्त पत्ता अपनी ढेरी में स्थान 1 या 2 या 3 पर हो। ऊपर दिए गए उदाहरण की तरह, ध्यान दें कि जब 27 पत्तों की गड्डी को बाँटा जाता है तो क्रमांक 1 से 9 के पत्ते अपनी-अपनी ढेरियों में स्थान 1, 2 या 3 पर होते हैं। अतः, चरण I में हमें संक्रिया (**T**) को लागू करते हुए पत्तों को इकट्ठा करना चाहिए।

इस प्रकार, हम गुप्त पत्ते को स्थान 16 पर लाने के लिए चरण III, II, I में क्रमशः संक्रिया (**M**), (**B**), (**T**) को काम में ले रहे हैं। चूँकि
(**T**) = 0, (**M**) = 1, (**B**) = 2 और
$$16 - 1 = 15 = 1 \times 3^2 + 2 \times 3^1 + 0 \times 3^0, \qquad (5)$$

हम पाते हैं कि गुप्त पत्ते के ऊपर पत्तों की संख्या, जो हमारे उदाहरण में 15 है, को (**T**), (**B**), (**M**) के अनुक्रम में संक्रियाओं का उपयोग करके बनाया जा सकता है। यह 22 का त्रि-आधारी निरूपण है।

गणितीय विश्लेषण

यह जानने के लिए कि पत्ते को मनचाही स्थिति में कैसे लाएँ, आइए, पिछले करतब के चरण I को फिर से देखें। मान लीजिए कि ताश की गड्डी में गुप्त पत्ते को फिर से रख देने और गड्डी को खूब अच्छी तरह से फेंटने के बाद वह पत्ता ऊपर से n_0 स्थान पर है। इसका मतलब हुआ कि उसके ऊपर $n_0 - 1$ पत्ते हैं। जैसा पहले बताया गया है, उसके अनुसार आप 27 पत्तों को 9 पत्तों वाली 3 ढेरियों में बाँटते हैं, और पत्ता चुनने वाले विद्यार्थी को उस ढेरी की ओर इशारा करने को कहते हैं जिसमें वह गुप्त पत्ता है। इस समय गुप्त पत्ता गड्डी में $\left\lceil \frac{n_0}{3} \right\rceil$ स्थान

पर है। याद करें कि अब आप तीन तरीक़ों से ताश के पत्तों की इस गड्डी को इकट्ठा कर सकते हैं :

> **T:** गुप्त पत्ते वाली ढेरी को बाकी दो ढेरियों के ऊपर [**T**op] रखें।
> **M:** गुप्त पत्ते वाली ढेरी को बाकी दो ढेरियों के बीच में [**M**iddle] रखें।
> **B:** गुप्त पत्ते वाली ढेरी को बाकी दो ढेरियों के नीचे [**B**ottom] रखें।

यदि संक्रिया (**T**) है, तो गड्डी में गुप्त पत्ते की स्थिति बिना बदले $\left\lceil \frac{n_0}{3} \right\rceil$ ही बनी रहेगी। यदि संक्रिया (**M**) है, तो पत्ते की नई स्थिति $9 + \left\lceil \frac{n_0}{3} \right\rceil$ होगी, क्योंकि गुप्त पत्ते वाली ढेरी के ऊपर 9 पत्ते रखे जाएँगे। यदि संक्रिया (**B**) है, तो गुप्त पत्ता $18 + \left\lceil \frac{n_0}{3} \right\rceil$ पर स्थित होगा, क्योंकि गुप्त पत्ते वाली ढेरी के ऊपर 18 पत्ते रखे गए हैं।

आइए, इस संक्रिया को F_a से दिखाएँ जिसमें

$$F_a(n_0) = 9a + \left\lceil \frac{n_0}{3} \right\rceil, \tag{6}$$

जहाँ a = 0, 1 या 2। ध्यान दें कि संक्रिया (**T**) होने पर a = 0 होगा, संक्रिया (**M**) होने पर a = 1 होगा और संक्रिया (**B**) होने पर a = 2 होगा। अतः, करतब अपना कमाल तब ही दिखाएगा जब ऐसी तीन संख्याएँ $a, b, c \in \{0, 1, 2\}$ पाने में सफल हों, जो ऐसी हों कि 1 से 27 के बीच किसी भी संख्या n_0 के लिए, हमारे पास निम्नलिखित समीकरण हो

$$F_c\left(F_b\left(F_a(n_0)\right)\right) = n. \tag{7}$$

a, b, c के मूल्य यह तय करेंगे कि तीनों चरणों में से प्रत्येक में पत्ते इकट्ठा करते वक्त हम संक्रिया (T), (M) या (B) में से किसको लागू करेंगे।

आइये, अब देखें कि यह $F_c\left(F_b\left(F_a(n_0)\right)\right) = n$ है क्या। हमारे पास है :

$$F_a(n_0) = 9a + \left\lceil \frac{n_0}{3} \right\rceil,$$

$$\therefore\ F_b\left(F_a(n_0)\right) = 9b + \left\lceil \frac{1}{3}\left(9a + \left\lceil \frac{n_0}{3} \right\rceil\right) \right\rceil.$$

अब,

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} + \left(9a + \left\lceil \frac{n_0}{3} \right\rceil\right) &= \left\lceil \frac{1}{3}\left\lceil 9a + \frac{n_0}{3} \right\rceil \right\rceil \\ &= 3a + \left\lceil \frac{n_0}{3^2} \right\rceil, \end{aligned}$$

इसका मतलब है कि

$$F_b(F_a(n_0)) = 9b + 3a + \left\lceil \frac{n_0}{3^2} \right\rceil. \tag{8}$$

उसी तर्क के अनुसार, यह इस प्रकार होगा

$$\begin{aligned} F_c(F_b(F_a(n_0))) &= 9c + 3b + a + \left\lceil \frac{n_0}{3^3} \right\rceil \\ &= 9c + 3b + a + 1, \end{aligned} \qquad (9)$$

चूँकि $0 < \frac{n_0}{27} \leq 1$ और इसलिए $\left\lceil \frac{n_0}{3^3} \right\rceil = 1.$

ताश के करतब पर लौटें तो, ऊपर दिया गया विश्लेषण दिखाता है कि यदि 27 पत्तों वाली गड्डी में हम गुप्त पत्ते को स्थान n पर रखना चाहते हैं तो हमें ऐसी संख्याएँ $a, b, c \in \{0, 1, 2\}$ प्राप्त करनी होंगी, जो ऐसी हों कि $n = 9c + 3b + a + 1$ हो। इसे संक्षेप में यूँ लिख सकते हैं

$$n = cba_{\text{base three}} + 1, \qquad (10)$$

जहाँ सबस्क्रिप्ट 'base three' से यह मतलब है कि हम संख्या n को तीन के आधार में व्यक्त कर रहे हैं। उदाहरण के लिए, यदि चुनी हुई संख्या $n = 17$ है, तो हमें ऐसे a, b, c तलाशने होंगे जिनसे $9c + 3b + a = 17$ हो। यदि हम 16 को 9 से भाग देते हैं, तो हमें भागफल के रूप में 1 और शेषफल के रूप में 7 मिलता है। अतः, $c = 1$। यदि हम 7 को 3 से भाग देते हैं, तो हमें भागफल के रूप में 2 और शेषफल के रूप में 1 मिलता है। अतः, $b = 2$ और $a = 1$। इसलिए $16 = 121_{\text{base three}}$, और पत्ते बाँटने के बाद हर बार उन्हें संक्रिया **(M)**, **(B)**, **(M)** के क्रम में इकट्ठा करना होगा। यह गुप्त पत्ते को 17वें स्थान पर पहुँचा देगा। एक अन्य उदाहरण लें, जिसमें हम चाहते हैं कि गुप्त पत्ता 25वें स्थान पर हो। हमें त्रि-आधार में 24 को इस प्रकार बताना होगा 24 = 2 x 9 + 2 x 3 + 0 x 1 जिससे कि $a = 0$, $b = 2$, $c = 2$ हो। अतः, पत्ते बाँटने के बाद उन्हें इकट्ठा करने का क्रम **(T)**, **(B)**, **(B)** होगा।

निष्कर्ष

27-पत्तों का करतब विद्यार्थियों को त्रि-आधार का परिचय कराने का एक दिलचस्प तरीक़ा है। विद्यार्थियों में यह कौतूहल जागा कि आख़िर यह करतब काम कैसे करता है। उन्हें यही करतब कई बार तब तक दिखाया गया जब तक कि उन्हें इसमें एक पैटर्न उभरता नहीं दिखा। जादू के इस खेल से हम विद्यार्थियों में त्रि-आधार को सीखने की रुचि जगाने में सफल रहे।

सन्दर्भ :

1. https://www.youtube.com/watch?v=gcgvFTfOpD8
2. Martin Gardner (1956), *Mathematics, Magic and Mystery*, Dover Publications.

सुहास साहा कोयम्बटूर स्थित ईशा होम स्कूल में कक्षा 9 से 12 के विद्यार्थियों को गणित सिखाते हैं। इससे पहले उन्होंने जीवन बीमा के क्षेत्र में काम किया है। उन्होंने आईआईटी, कानपुर से भौतिकशास्त्र में एमएससी (इंटिग्रेटेड), इन्दिरा गाँधी इंस्टिट्यूट ऑफ़ डेवलपमेंट रिसर्च, मुम्बई से अर्थशास्त्र में एमफिल और युनिवर्सिटी ऑफ़ मिनेसोटा, यूएसए से फाइनेंशियल इकॉनॉमिक्स में पीएचडी की उपाधि ली है। उनसे suhas.s@ishahomeschool.org पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : हिमालय तहसीन **पुनरीक्षण :** सुशील जोशी **कॉपी-एडिटर :** सीमा (सभी द्वारा एकलव्य फ़ाउण्डेशन) **सम्पादन :** राजेश उत्साही