

माध्यमिक विद्यालयों की समस्याओं को विस्तृत खोज की आवश्यकता है

ए. रामचन्द्रन

संकेत शब्द/मुख्य शब्द : बाध्यताएँ, शर्त, खोज, जादुई वर्ग, वर्ग समीकरण, गुणनखण्ड

ऐसी कई समस्याएँ हैं, जहाँ हमें कई सम्भावनाओं में से ऐसे उदाहरणों या हलों को खोजने की आवश्यकता होती है, जो दी गई परिस्थितियों में सन्तुष्ट कर सकें। कई सम्भावनाओं के बीच, इस खोज के दौरान इस बात का ध्यान रखना होगा कि उनमें से एक भी सम्भावना को बिना जाँचे-परखे छोड़ न दिया जाए।

यहाँ पर ऐसी कुछ समस्याएँ दी गई हैं।

समस्या 1. सामान्यतः हम तारीखों को DD-MM-YY यानी कि दिन-महीना-साल के तरीके में लिखते हैं। इस तरीके में शुरुआत के दो अंक दिनों को, उसके बाद के दो अंक महीने को, और उसके बाद के दो अंक उस साल के अन्तिम दो अंकों को बताते हैं। तारीखों को लिखने के इस तरीके में आप कुछ जगहों पर इस तरह से पाएँगे कि (DD)(MM) = (YY), मतलब यह कि दिन व महीने की संख्या का गुणनफल, साल (साल के अन्तिम दो अंकों) के बराबर होता है। तारीख 15-4-60, इसका एक उदाहरण है। किसी एक शताब्दी में इस तरह की सभी तारीखों को खोजें, और उन्हें तारीखवार एक व्यवस्थित क्रम में रखें।

समस्या 2. जुलाई 2014 के एट राइट एंगल के अंक में जादुई वर्गों पर दिए गए एक लेख में यह कहा गया था : '1 से लेकर 16 तक की संख्याओं में से चार ऐसी संख्याओं को चुनने के 86 तरीके हैं, जिनका योग 34 हो। इन सभी संयोजन/तरीकों को खोजें।

समस्या 3. वह सबसे छोटी प्राकृत संख्या (Natural Number) कौन-सी है, जिसके ठीक 100 गुणनखण्ड (factor) हैं? (यहाँ पर हम केवल अभाज्य गुणनखण्डों को ही नहीं सभी गुणनखण्डों को शामिल कर रहे हैं।)

समस्या 4. निम्न गुणनखण्डों का अवलोकन कीजिए :

$$x^2 + 10x + 24 = (x + 4)(x + 6)$$

$$x^2 + 10x - 24 = (x + 12)(x - 2)$$

यहाँ पर दो व्यंजक (expression) और उनके गुणनखण्ड दिए गए हैं। बाईं ओर लिखे व्यंजकों में केवल अचर राशि के चिन्ह में अन्तर है। और इन दोनों व्यंजकों के गुणनखण्ड किए जा सकते हैं। इस तरह के अन्य उदाहरणों का पता लगाइए जिनमें अचर राशि का मान 100 के अन्दर हो। मतलब यह कि p और q , जहाँ पर $q < 100$ जिससे दोनों समीकरण $x^2 + px + q$ और $x^2 + px - q$ के गुणनखण्ड किए जा सकें।

शैक्षणिक नोट : खोज के कौशल का महत्व इतना स्पष्ट है (यहाँ तक कि विद्यार्थियों के लिए भी) कि किसी को इस पर ज़ोर देने की ज़रूरत नहीं है। हालाँकि वह प्रक्रिया जिसके दौरान एक यादृच्छिक खोज (random search) व्यवस्थित बन जाती है, अवलोकन करने लायक और विद्यार्थियों में विकसित करने लायक है। इससे विद्यार्थी न केवल अपने विचारों पर चिन्तन करना सीखते हैं, बल्कि वह अपनी खोज को संचालित करने के ज़्यादा प्रभावी तरीकों का विश्लेषण और चयन करने की शुरुआत करते हैं। यह बहुत ज़रूरी है कि वे केवल इस खोज से मिले उत्तर पर ध्यान देने की बजाय इस खोज की प्रक्रिया का दस्तावेज़ीकरण करें, और इस पर बात करें।

कुछ संकेत / बिन्दु

चूँकि यह समस्याएँ कुछ ज़्यादा समय लेने वाली हैं इसलिए हम यहाँ पर कुछ संकेत दे रहे हैं, जिससे यह सुनिश्चित किया जा सके कि आप सही दिशा में बढ़ रहे हैं। आप यह तय कर सकते हैं कि आप इस भाग को न पढ़ें, और अपने आप से आगे बढ़ें। समूह के रूप में इन पर काम करना अच्छा हो सकता है।

समस्या 1 के लिए संकेत

दरअसल यह अभ्यास 1 से लेकर 99 तक की संख्याओं को यथासम्भव अधिक से अधिक तरीकों से दो संख्याओं के गुणनफल के रूप में व्यक्त करने का है। इन सब गुणनखण्डों के बीच आपको तारीख और महीने के रूप में संख्याओं की उन जोड़ियों को चुनना है, जो समस्या में दिए गए प्रतिबन्धों के अनुकूल हों।

समस्या 2 के लिए संकेत

इसकी शुरुआत करने के लिए हम एक बुनियादी नियम बनाते हैं : किसी भी संयोजन में हम संख्याओं को बढ़ते क्रम में प्रस्तुत करें। यह दोहराव रोकने में मदद करता है।

सबसे पहले सबसे छोटी संख्याओं के संयोजन (1, 2, 3, 4), के साथ शुरू करें। पक्के तौर पर यह उपयुक्त नहीं है, क्योंकि इन चारों संख्याओं का योग 34 नहीं है। अब इस संयोजन में आप सबसे पहले अन्तिम संख्या को बढ़ाकर देखें, इसके बाद तीसरी संख्या को फिर दूसरी संख्या को और अन्त में पहली संख्या को और ऐसा तब तक करें जब तक कि आपको

उपयुक्त संयोजन न मिल जाए, और इसके बाद कोई भी वृद्धि कुल योग को 34 से ज़्यादा कर देगी।

समस्या 3 के लिए संकेत

इस समस्या को हल करने के लिए आपको संख्या सिद्धान्त के इस नियम की जानकारी होनी चाहिए : “यदि $N = a^p \times b^q \times c^r \dots$ किसी प्राकृत संख्या N का अभाज्य गुणनखण्ड है, जहाँ पर a, b, c, \dots अभाज्य संख्याएँ हैं, और p, q, r, \dots प्राकृत संख्याएँ हैं, तब N के गुणनखण्डों की संख्या $(p + 1)(q + 1)(r + 1) \dots$ होगी।” इनमें गुणनखण्ड 1 व संख्या N खुद भी शामिल है।

अब संख्या 100 के यथासम्भव अधिक से अधिक तरीकों से गुणनखण्ड कीजिए। अब प्रत्येक गुणनखण्डन (Factorization) में हरेक गुणनखण्ड को 1 कम कीजिए, और इन संख्याओं को उपयुक्त अभाज्य संख्याओं की घातों के रूप में इस दृष्टि के साथ शामिल कीजिए कि इनका गुणनफल जितना सम्भव हो सके, उतना कम हो। उदाहरण के लिए, 100 के इस गुणनखण्डन $100 = 4 \times 5 \times 5$ के साथ शुरुआत करते हुए हम हर गुणनखण्ड को 1 कम करेंगे, और हमें संख्या 3, 4, 4 मिलती हैं। ऊपर बताए गए नियम के अनुसार हम यह देख सकते हैं कि निम्नलिखित में से हर संख्या के लिए ठीक 100 गुणनखण्ड हैं।

$$2^3 \times 3^4 \times 5^4, 2^4 \times 3^3 \times 5^4, 2^4 \times 3^4 \times 5^3.$$

ऐसा नहीं है कि केवल यही सम्भावनाएँ हैं, और भी कई सम्भावनाएँ हैं। अब इन सम्भावनाओं में से हमें उन सम्भावनाओं को चुनना होगा जिनका गुणनफल सबसे छोटा हो।

समस्या 4 के लिए संकेत

आपने समस्या 1 के लिए गुणनखण्ड का जो अभ्यास किया था, अब वह आपकी यहाँ पर मदद करेगा। 1 से लेकर 99 तक की प्रत्येक संख्या के गुणनखण्डों का अवलोकन करें और उन उदाहरणों को देखें जिनमें दो पूरक गुणनखण्डों का योग, दो पूरक गुणनखण्डों के अन्तर के बराबर हो। दूसरे शब्दों में कहें तो, वह मान जो इन समीकरणों को सन्तुष्ट करे :

$$A \times B = C \times D = N < 100,$$

$$A + B = C - D.$$

हम आशा करते हैं कि यह विस्तृत खोजें, थकाने या उबाने वाली नहीं बनेंगी!

(इन समस्याओं के हल At Right Angles March, 2020 अंग्रेजी अंक के पेज 75 पर दिए गए हैं।)

अनुवाद : निदेश सोनी

पुनरीक्षण : हनुमान सहाय शर्मा

कॉपी-एडीटिंग : कविता तिवारी
सम्पादन : राजेश उत्साही