Translation : Tiresome Paths, Water Gates & Euler's Formula : At Right Angles_March_2020

उबाऊ रास्ते, जल द्‌वार और यूलर का फॉर्मूला

बी. सूरी

अलग-अलग लगने वाली विभिन्न समस्याओं को एक ही नज़र से देखना और एक ऐसा आइडिया खोजना जो दोनों को हल करता हो यह गणित की ताक़त की एक बानगी है। यह आश्चर्य की बात नहीं है कि जिन दो समस्याओं पर हम यहाँ चर्चा कर रहे हैं –विभिन्न प्रतिबन्धों के साथ लिए जाने वाले मार्गों के बारे में और खेतों को पानी देने के बारे में –उन दोनों का हल ग्राफ सिद्‌धान्त के तरीक़ों का उपयोग करके निकाला जा सकता है।

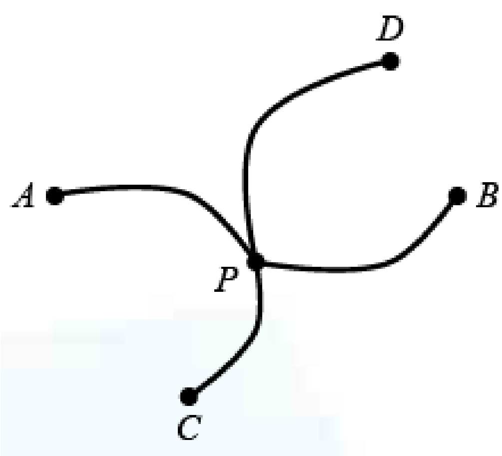
नए शब्द : नेटवर्क, मार्ग, कोने, विषम, सम, किनारे, फलक, यूलर का फॉर्मूला

◌े

जहाँ एंजेल्स को क़दम रखने में डर लगता है?

एंजेल ट्रेडिंग कम्पनी की पूरे मालगुडी में कई सारी शाखाएँ हैं और कई मार्ग हैं जो पहले से मौजूद हैं। अब, कम्पनी अपने सभी मौजूदा मार्गों का इस्तेमाल इस तरह से करना चाहती है कि वह किसी भी शाखा से किसी भी अन्य शाखा में जा सके और लागत कम से कम हो। इसके लिए यह जानना महत्त्वपूर्ण होगा कि *किसी भी हिस्से में एक से अधिक मार्ग के बिना सभी हिस्सों में सर्विस देने के लिए कम्पनी को कितने मार्गों को संचालित करना चाहिए?*

इस समस्या को समझने के लिए, हम एक साधारण स्थिति से शुरू करते हैं। मान लीजिए कि शाखाएँ *A, B, C, D* और *P* पर हैं, और मार्ग चित्र 1 में दिखाए अनुसार हैं।

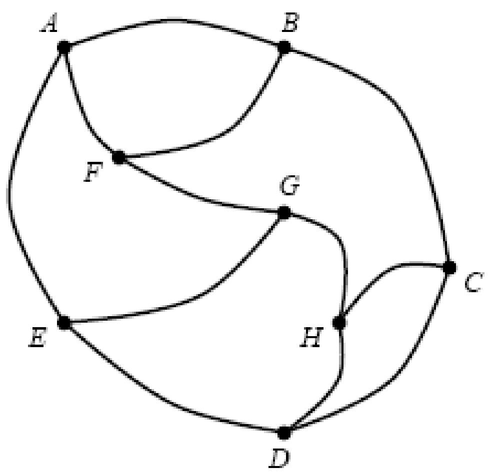


चित्र 1

एक मार्ग *P* से होते हुए *A* से *B* तक जा सकता है; एक और मार्ग, फिर से *P* से होते हुए *C* से *D* तक जा सकता है। स्पष्ट है कि यह दो मार्ग पर्याप्त हैं और यह भी स्पष्ट है कि दो, इस समस्या को हल करने वाली सबसे छोटी संख्या है। *A* से *C* जाने का इच्छुक व्यक्ति *P* तक पहला मार्ग ले सकता है और *P* से *C* के मार्ग के लिए मुड़ सकता है।

बेशक, उपरोक्त हल एकमात्र हल नहीं है; उदाहरण के लिए, एक व्यक्ति *P* से होते हुए *A* से *C* तक जा सकता है और कोई दूसरा व्यक्ति *P* से होते हुए *B* से *D* तक जा सकता है।

आइए हम चित्र 2 में दिखाए एक और नेटवर्क को देखें जो पिछले वाले नेटवर्क की तुलना में थोड़ा अधिक जटिल है।



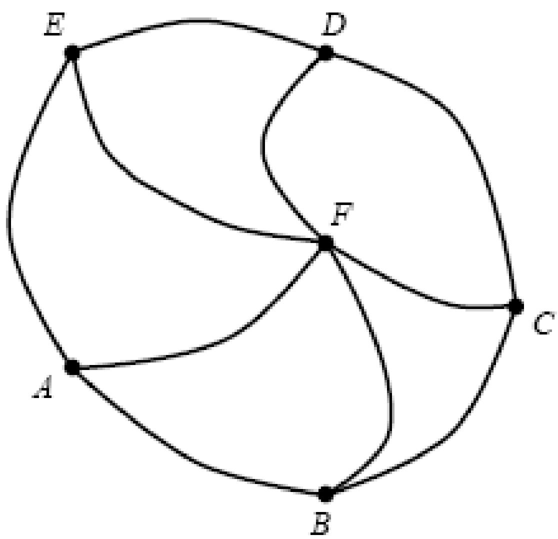
चित्र 2

एक मार्ग *A* से शुरू होकर *B, C, D, E* से पूरा गोल घूमते हुए वापिस *A* पर पहुँच सकता है। एक दूसरा मार्ग *A* से शुरू करके *F, G, H* और फिर *D* तक जा सकता है। तीन अन्य मार्गों *BF, EG, CH* की आवश्यकता होगी, सब मिलाकर 5 मार्ग हो जाएँगे। लेकिन, जैसा कि हम देख सकते हैं, हम पहले दो मार्गों को मिलाकर एक मार्ग बना सकते हैं और इसलिए, इस नेटवर्क के लिए चार मार्ग पर्याप्त हैं। हम कुछ देर में सिद्ध करेंगे कि वास्तव में, यहाँ आवश्यक मार्गों की सबसे छोटी संख्या चार है।

इस समस्या में आवश्यक बात यह विचार करना है कि विभिन्न मार्गों के छोर कहाँ ख़तम होने चाहिए। जहाँ भी मार्ग के एक खण्ड का *मुक्त छोर* होता है, जैसा कि चित्र 1 में *A, B, C, D* में है, वहाँ एक मार्ग का प्रारम्भ या अन्त होना चाहिए। चूँकि चित्र 1 में चार मुक्त छोर हैं, और चूँकि प्रत्येक मार्ग में अधिकतम दो छोर हो सकते हैं (किसी बन्द मार्ग में केवल एक होगा), स्पष्ट रूप से चार मुक्त छोरों के बीच कम से कम दो मार्ग होने चाहिए। एक प्रतिफल (single consideration) के माध्यम से हमने वही परिणाम प्राप्त किया जो हम सभी सम्भावित मार्गों पर विचार करके पहले प्राप्त कर सकते थे!

आइए अब चित्र 2 को फिर से देखते हैं। इसमें कोई मुक्त छोर नहीं हैं, लेकिन *A* जैसे संगम हैं जहाँ तीन खण्ड एक साथ आते हैं। ऐसी जगह पर, कम से कम एक मार्ग शुरू या समाप्त होना चाहिए! क्यों? कारण यह है कि *A* से गुज़रने वाले किसी भी मार्ग को *A* पर आने के दौरान मार्ग के एक खण्ड का उपयोग करना पड़ता है और *A* को छोड़ते समय एक अन्य खण्ड का उपयोग करना पड़ता है। तो इस मार्ग का जो खण्ड किसी भी अन्य खण्ड से जुड़ नहीं पाता है उसे एक मार्ग का प्रारम्भ या अन्त होना चाहिए। बेशक, यह हो सकता है कि सभी तीन खण्ड ऐसे हों, जहाँ से किसी मार्ग की शुरुआत या अन्त हो। इसलिए हमने कहा कि *A* पर कम से कम एक मार्ग का अन्त या शुरुआत होती है। चित्र 2 में इस तरह के आठ स्थान हैं, इसलिए कम से कम चार मार्ग होने चाहिए; और जैसा कि हमने देखा, चार मार्ग पर्याप्त होंगे।

अन्तिम उदाहरण के रूप में, आइए हम चित्र 3 के नेटवर्क को देखते हैं; यहाँ पर क्रम 3 (यानी, जहाँ तीन मार्ग एक साथ आते हैं) वाले पाँच संगम हैं और क्रम 5 वाला एक संगम *F* है। फिर से, ज़ाहिर है कि *F* पर कम से कम एक मार्ग शुरू या समाप्त होना चाहिए क्योंकि *F* का क्रम 5 एक विषम संख्या है। तो, इसमें कम से कम 6 मार्ग समाप्त होने चाहिए और इसलिए कम से कम 3 मार्गों की आवश्यकता होगी। क्या आप वे 3 मार्ग खोज सकते हो, जो पर्याप्त हों?



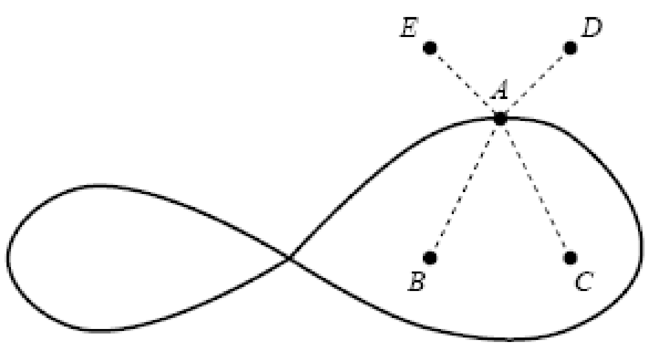
चित्र 3

किसी भी नेटवर्क के लिए, हालाँकि थोड़ा जटिल है, हम विषम क्रम के संगमों की संख्या की गणना कर सकते हैं और उसे 2 से विभाजित करके मार्गों की कम से कम सम्भावित संख्या प्राप्त कर सकते हैं। इन तीन उदाहरणों में, विषम क्रम के संगमों की संख्या हमेशा सम थी, और यह भी पता चला कि इस संख्या का आधा भी पर्याप्त था।

हम देख सकते हैं कि मार्गों की एक व्यवस्था को सर्वोत्तम होने के लिए, प्रत्येक संगम पर, जब भी सम्भव हो, खण्डों के जोड़े बनाने चाहिए। क्यों? चित्र 3 के बिन्दु *F* को देखें। यदि एक मार्ग

C से F पर आता है और *D* से *F* तक एक अन्य मार्ग आता है, तो दोनों को एक मार्ग बनाने के लिए *F* पर जोड़ा जा सकता है और इससे कुल मार्गों की संख्या कम हो जाएगी। तो, इस चर्चा से यह निष्कर्ष निकलता है : *एक व्यवस्था को सर्वोत्तम होने के लिए, प्रत्येक संगम पर जब भी सम्भव हो, खण्डों के जोड़े बनाने चाहिए, और किसी सम संगम पर कोई मार्ग समाप्त नहीं होना चाहिए; और फिर, मार्गों के छोरों की कुल संख्या विषम क्रम के संगमों की संख्या होगी, और मार्गों की संख्या विषम क्रम के संगमों की संख्या की आधी होगी।*

एक बिन्दु को अभी भी तय किया जाना शेष है कि क्या एक सर्वोत्तम व्यवस्था में एक बन्द मार्ग हो सकता है। चित्र 2 में हम बन्द मार्ग, *A* से शुरू करके *B, C, D, E* से होते हुए वापिस *A* तक आए, लेकिन फिर हमने इसे *A* से शुरू करके *F, G, H* से होते हुए *D* तक जाने वाले एक मार्ग से जोड़ा, ताकि हम *A* से *D* तक एक एकल मार्ग (जो बन्द नहीं है) बना सकें। इस तरह का घटाव तब किया जा सकता है जबकि एक बन्द मार्ग में विषम क्रम का संगम होता है। वास्तव में, एक इसी तरह का घटाव तब किया जा सकता है जब मार्ग के सभी संगम सम क्रम में हो, जैसा कि हम अभी दिखाते हैं। माना कि *A* एक बन्द मार्ग पर एक ऐसा संगम है जैसा कि चित्र 4 में है, यहाँ यह अंक आठ की आकृति के रूप में दिखाया गया है। *A* से होकर जाने वाले कुछ अन्य मार्गों (बिन्दु-बिन्दु वाली वक्र रेखाओं से) को भी यहाँ दिखाया गया है और उन्हें चाहे जैसे आगे बढ़ा सकते हैं।



चित्र 4

यदि यह व्यवस्था सर्वोत्तम है, तो कोई भी मार्ग *A* पर समाप्त नहीं हो सकता है, इसलिए *B* से *A* तक का मार्ग आगे भी जारी रहता है, माना कि *E* तक। लेकिन तब, हम इस मार्ग को *B* से *A* तक और साथ ही बन्द मार्ग *A* से होते हुए और फिर *A* से *E* तक जोड़कर, इन दोनों मार्गों को जोड़ सकते हैं। इससे मार्गों की संख्या फिर से घट जाती है। इस तरह, यदि हम केवल सम संगमों से बन्द मार्गों को घटाते रहते हैं, तो हमारे पास, किसी न किसी स्तर पर, एक विषम

संगम वाला एक बन्द मार्ग बचेगा और फिर अगला घटाव एक ऐसे मार्ग को पैदा करेगा जो बन्द नहीं होगा। अन्यथा, मूल नेटवर्क में *सभी* संगम सम रहे होंगे, और फिर हम व्यवस्था को एकल बन्द मार्ग तक घटा सकते हैं।

अपनी चर्चा को संक्षेप में बताते हुए हम कह सकते हैं कि, यदि कोई व्यवस्था सर्वोत्तम है, तो :

1. मार्ग केवल विषम क्रम के संगमों पर शुरू या समाप्त होते हैं।
2. एक बन्द मार्ग केवल तभी होगा यदि मूल नेटवर्क में सभी संगम सम क्रम के हों, और फिर एकल बन्द मार्ग पूरे नेटवर्क को पार कर जाएगा।
3. विषम क्रम के संगमों की संख्या मार्गों के छोरों की संख्या के बराबर होती है, और इसलिए, वह एक सम संख्या होती है।
4. मार्गों की न्यूनतम संख्या विषम क्रम के संगमों की संख्या से आधी होती है, केवल उस स्थिति को छोड़कर, जहाँ सभी संगम सम क्रम के होते हैं, जब न्यूनतम एक (बन्द) मार्ग होता है।

यूलर का फॉर्मूला

आइए हम खेतों और मेढ़ों का एक नक्शा देखें (चित्र 5)। आपस में सटे हुए किन्हीं भी दो खेतों के बीच एक मेढ़ है, जो दोनों को अलग-अलग करती है। सोचकर देखें कि खेतों के बाहर पानी भरा हुआ है। हम एक के बाद एक मेढ़ों को तोड़ना चाहते हैं ताकि सभी खेतों में पानी पहुँच सके। (हम इस कार्य को "गेट खोलने" के रूप में भी सोच सकते हैं।) मान लीजिए कि शुरुआत में e मेढ़ और v कोने और f *खेत* हैं।

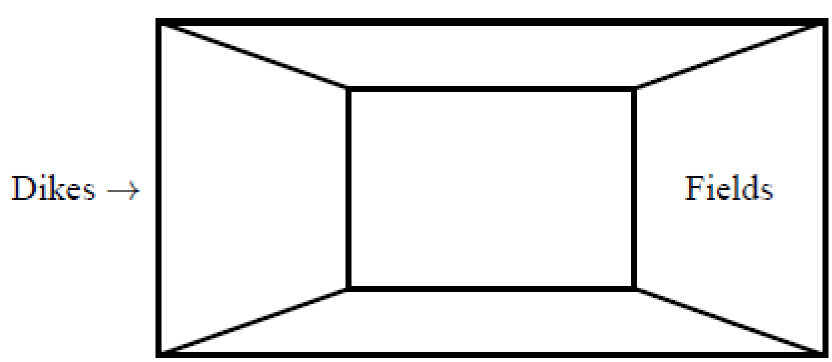
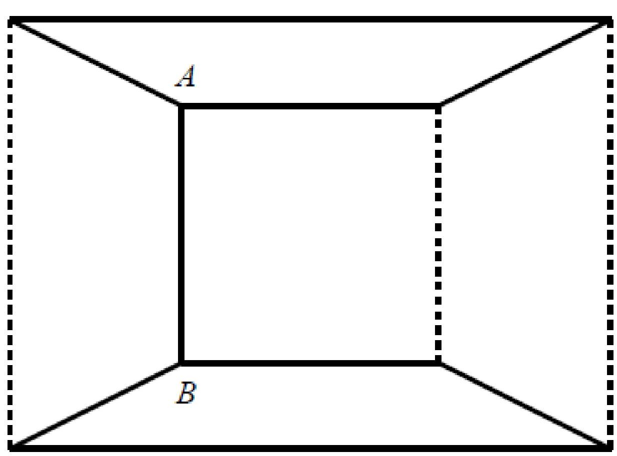


Figure 5. Here $f = 5$, $e = 12$ and $v = 8$

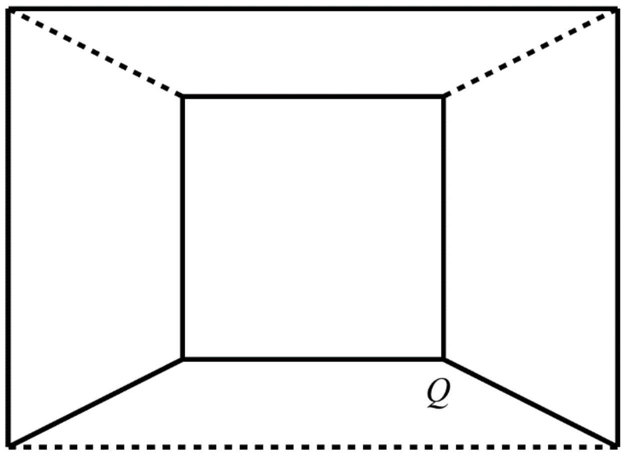
चित्र 5. यहाँ $f = 5, e = 12$ और $v = 8$ है

जैसा कि आप देख सकते हैं, खेतों को पानी देने के लिए *सभी* मेढ़ों को तोड़ने की आवश्यकता नहीं है। किसी भी मेढ़ को, जिसके दोनों तरफ़ पहले से ही पानी हो, निश्चित रूप से साबुत छोड़ा जा सकता है। यदि हम ऐसी मेढ़ों को तोड़ते हैं जिनमें केवल एक तरफ़ पानी है, तो प्रत्येक चरण में हम केवल एक मेढ़ को नष्ट करेंगे और एक और खेत को पानी से भर देंगे। चूँकि इस प्रक्रिया को तब तक जारी रखा जा सकता है जब तक कि सभी खेतों में पानी नहीं भर जाता है, और चूँकि अन्ततः हम सभी *f* खेतों में पानी भर देंगे, तो अन्त में हमने ठीक-ठीक *f* मेढ़ों को तोड़ दिया होगा। हम दूसरे तरीक़े से $e-f$ (साबुत मेढ़ों की संख्या) की गणना करना चाहते हैं।

कोई भी व्यक्ति मेढ़ों के साथ-साथ किसी भी कोने से किसी भी अन्य कोने तक सूखे पैर चल सकता है। मेढ़ों को तोड़ने से पहले तो यह निश्चित रूप से किया ही जा सकता था। मान लीजिए कि खेतों में पानी भरने के दौरान मेढ़ *AB* (जैसा कि चित्र 6 (a) में दिखाया गया है) के नष्ट हो जाने से यह व्यवस्था दो अलग-अलग खण्डों में बँट जाती है। ऐसी स्थिति में *A* से *B* तक की मेढ़ के साथ चलना असम्भव होगा। इसका मतलब है कि पानी इन दो खण्डों में से प्रत्येक को पूरी तरह से घेर लेगा। इसका मतलब है कि इस मेढ़ के टूटने से पहले से ही पानी *AB* के *दोनों* तरफ़ होना चाहिए था, और हमने कहा कि इस तरह की मेढ़ को नहीं तोड़ा जाना चाहिए। इससे पता चलता है कि हम वास्तव में किसी भी कोने से किसी अन्य कोने के लिए मेढ़ के साथ-साथ चल सकते हैं :



(a)



(b)

चित्र 6. व्यक्ति मेढ़ों के ज़रिए किसी भी कोने से किसी अन्य कोने तक जा सकता है।

वास्तव में मेढ़ों के साथ चलते हुए एक कोने से दूसरे कोने तक जाने वाला सिर्फ़ एक रास्ता है। यदि P से Q तक दो रास्ते होते, तो वे कुछ क्षेत्र को घेरेंगे (चित्र 6(b) देखें)। इस क्षेत्र के आस-पास की साबुत मेढ़ों का रिंग इस क्षेत्र को सूखा रखेगा, जो इस तथ्य के विपरीत है कि सभी खेतों में पानी भरा गया है।

इन अवलोकनों से, हम देखते हैं कि यदि हम किसी भी शुरुआती बिन्दु P को तय करते लेते हैं, तो एक अलग ही साबुत मेढ़ है जो किसी भी कोने (P को छोड़कर) पर समाप्त होती है, और इसके विपरीत, प्रत्येक किनारे के लिए एक अद्वीतिय अलग अन्तिम बिन्दु है।

संक्षेप में : रास्तों के जितने अन्तिम बिन्दु होते हैं, उतनी ही साबुत मेढ़ें हैं।

चूँकि बाद वाली संख्या $v-1$ है (क्योंकि P एक अन्तिम बिन्दु नहीं है), हमारे पास $e-f=v-1$ है।

यह ***यूलर का सूत्र*** कहलाता है। इसे दूसरे रूप में बताने के लिए, F सतहों, E किनारों और V सिरों वाला एक नक्शा देखें। तब $V-E+F=2$ (हमारे मामले में, $F=f+1$ क्योंकि खेतों के बाहर पानी भी एक सतह है।)

यूलर का सूत्र बहुत ही महत्त्वपूर्ण परिणाम है; इसका इस्तेमाल यह साबित करने के लिए किया जा सकता है कि *हर नक्शे को पाँच रंगों से रंगा जा सकता है* । इसका अर्थ यह है कि आपस में सटी हुई सतहों के रंग अलग-अलग (एक मानचित्र में) होने चाहिए और पाँच रंग किसी भी

नक्शे को रंगने के लिए पर्याप्त हैं। वास्तव में, चार रंग पर्याप्त हो सकते हैं, लेकिन इस बात तक पहुँचना एक जटिल परिणाम है जो टोपोलॉजी के तरीक़ों का उपयोग करके साबित होता है।

बी सूरी ने टाटा इंस्टिट्यूट ऑफ़ फंडामेंटल रिसर्च (मुम्बई) से गणित में पीएचडी की उपाधि प्राप्त की। वे 1999 से भारतीय सांख्यिकी संस्थान (बेंगलूरु) के साथ हैं। वे स्कूल और कॉलेज स्तर पर विवेचनात्मक लेखन और गणित के प्रतिभाशाली विद्यार्थियों के साथ संवाद में रुचि रखते हैं। वे कर्नाटक में गणित ओलम्पियाड के लिए राष्ट्रीय समन्वयक और रामानुजन गणितीय सोसायटी के समाचार पत्र की सम्पादकीय समिति के सदस्य हैं। बीजगणित और संख्या सिद्धान्त उनके शोध के रुचिकर विषय हैं। गणितीय तुकबन्दी (लिमरिक्स) में भी उनकी रुचि है। उनसे sury@isibang.ac.in पर सम्पर्क किया जा सकता है। उनका प्रोफेशनल वेबपेज www.isibang.ac.in/~sury है।

अनुवाद : प्रमोद मैथिल
पुनरीक्षण : हृदय कान्त दीवान
कॉपी-एडीटिंग : कविता तिवारी
सम्पादन : राजेश उत्साही