Translation of *Is a picture worth...On Proofs Without Words...a thousand words?*
At Right Angles, March 2015

क्या एक चित्र...

शब्दों के बिना प्रमाण

... हज़ार शब्दों के बराबर होता है?

- **कम्युनिटी मैथमैटिक्स सेंटर**

-

"शब्दों के बिना प्रमाण" यह बात अपने आप में विरोधाभास की तरह लगती है! यदि आपको किसी भी शब्द के उपयोग की अनुमति नहीं है, तो आप कैसे कुछ साबित कर सकते हैं? इस विचार के बेतुकेपन के बावजूद, शब्दों के बिना प्रमाण की धारणा (जिसे आमतौर पर संक्षिप्त में PWW- Proof Without Words कहा जाता है) ने हाल ही के दशकों में गणित में बहुत लोकप्रियता हासिल की है। समय-समय पर पुराने, परिचित कथनों के लिए नए, सुरुचिपूर्ण PWWs से हमारा सामना होता रहता है। इस छोटे-से लेख में PWW के विरोधाभासी मालूम होने वाले स्वरूप की चर्चा की गई है और PWWs के कुछ उदाहरण प्रस्तुत किए गए हैं।

मुख्य शब्द *: दृश्य प्रमाण, पाइथागोरस प्रमेय, कोज्या नियम, tan 15, त्रिकोणीय संख्या, समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य, हरात्मक माध्य*

परिचयात्मक टिप्पणी

हाल के दशकों में 'शब्दों के बिना प्रमाण' (PWWs) में बहुत रुचि रही है। मैथ वुल्फ्राम (सन्दर्भ 6) में, संक्षेप में और स्पष्ट शब्दों में बताया गया है कि शब्दों के बिना प्रमाण ऐसे प्रमाण हैं "...जो बिना किसी टिप्पणी के, केवल दृश्य तत्वों पर आधारित होते हैं।" PWWs आज प्रमाणों की एक पूरी नई शैली बनाते हैं। मैथेमैटिक्स एसोसिएशन ऑफ़ अमेरिका (MAA) द्वारा प्रकाशित दो पत्रिकाएँ *(कॉलेज जर्नल ऑफ़ मैथेमैटिक्स* और *मैथेमैटिक्स मैग्ज़ीन)* पाठकों द्वारा भेजे गए मौलिक PWWs को नियमित रूप से प्रकाशित करती हैं। दो PWW संकलन (सन्दर्भ 2 और 3)

पुस्तक के रूप में आए हैं (इनमें PWWs के अलावा और कुछ भी नहीं है)। इन पुस्तकों की सामग्री मोटे तौर पर इन उल्लिखित पत्रिकाओं और कुछ वेब पेजेस (सन्दर्भ 1, 4, 5), जिनके पास अपना ख़ुद का अच्छा संग्रह है, से ली गई है।

PWW वास्तव में क्या है? इस बारे में विकिपीडिया (सन्दर्भ 5) का कहना है, "गणित में, शब्दों के बिना प्रमाण एक सर्वसमिका या गणितीय कथन का प्रमाण है, जिसे किसी भी शाब्दिक व्याख्या के बिना आरेख द्वारा स्व-स्पष्ट रूप से प्रदर्शित किया जा सकता है। अपनी स्व-स्पष्ट प्रकृति के कारण इस तरह के प्रमाणों को औपचारिक और गणितीय रूप से परिशुद्ध (rigorous) प्रमाणों से अधिक सुरुचिपूर्ण माना जा सकता है। जब आरेख, किसी सामान्य कथन के एक विशेष मामले को प्रदर्शित करता है, तो एक प्रमाण होने के लिए, इसे ऐसा होना चाहिए कि इसे सामान्यीकृत किया जा सके।"

लेकिन क्या वास्तव में शब्दों के बिना प्रमाण जैसी कोई चीज़ हो सकती है, या यह एक स्व-विरोधाभासी धारणा है? इस पर विचार करें कि गणितीय प्रमाण क्या माना जाता है : स्पष्ट और समझने योग्य भाषा में लिखा गया एक तर्क, जो किसी दिए गए कथनों के समूह से शुरू होता है, प्रत्येक चरण का कारण बताता है (आमतौर पर ऐसे कथन का उल्लेख करके, जो पहले ही साबित हो चुका है) और कथन को सिद्ध करने के साथ समाप्त होता है। इस प्रकार, हर चरण *औपचारिक* और *स्पष्ट* होता है।

तरीक़ा तो यही है कि किसी भी प्रमाण को कम-से-कम ऐसा होना चाहिए। व्यवहार में ऐसे बहुत सारे कथन हैं, जिन्हें केवल इस आधार पर उचित नहीं माना गया है कि वे 'स्पष्ट' हैं। किसी भी प्रमाण को देखने पर आप कभी न कभी इन वाक्यांशों : "यह स्पष्ट होना चाहिए कि...", "अब स्पष्ट रूप से...", "यह बिलकुल स्पष्ट है कि..."; या अर्थ और आशय में इनसे मिलते-जुलते वाक्यांशों से रूबरू होंगे। शायद इसे ऐसा ही होना चाहिए; कोई भी व्यक्ति हर एक कथन को कैसे उचित ठहरा सकता है? निम्नलिखित तथ्य उल्लेखनीय है : जब कोई प्रकाशित प्रमाण ग़लत पाया जाता है, तो ग़लती तक़रीबन हमेशा ऐसे वाक्यांशों में छिपी हुई पाई जाती है। प्रमाण लिखते समय जो स्पष्ट लगता है वह न केवल स्पष्ट *नहीं* होता है, वास्तव में ग़लत भी हो सकता है!

तो ऐसे में PWWs के सम्बन्ध में यह सारी बातचीत हमें कहाँ ले जाती है? उपरोक्त टिप्पणियों से समझ आता है कि शब्द के विशुद्ध औपचारिक अर्थों में PWW कोई प्रमाण *नहीं* है। बल्कि, यह *किसी प्रमाण का एक सुझाव* है; यह *प्रमाण की एक रूपरेखा* है। दूसरे तरीक़े से कहें तो यह *काव्य रूपक में ढला हुआ एक प्रमाण* है। PWW में, लेखक और पाठक के बीच एक प्रकार

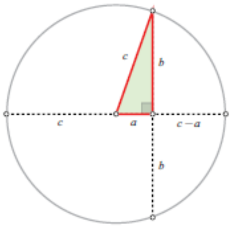
का ग़ैर-मौखिक संवाद चल रहा होता है, और उस संवाद में पूरे प्रमाण के पुनर्निर्माण के लिए पर्याप्त संकेत निहित होते हैं। इसका मतलब यह है कि PWW अपने अर्थ के लिए गणित की एक साझा संस्कृति पर निर्भर करता है : इसमें लेखक और पाठक द्वारा इस्तेमाल की जाने वाली एक समान भाषा, एक समान शब्दकोश या शब्दावली होती है। इस तरह के साझा आधार के बिना, PWW समझ से बाहर होगा।

ऐसी टिप्पणियों की पृष्ठभूमि के ख़िलाफ़ यह देखा गया है कि, PWW को प्रमाण के रूप में नहीं मानने का कोई ठोस कारण नहीं लगता है। इसलिए हम ऊपर दिए गए विवरणों को सन्दर्भ (5) और (6) के ज़रिए स्वीकार करेंगे।

नीचे हम विशेष औचित्य वाले कुछ PWWs उनके सन्दर्भों के साथ (जहाँ भी उपलब्ध हैं) दे रहे हैं। हमें उम्मीद है कि यह किसी भी संशयवादी पाठक को प्रमाण की एक मान्य शैली के रूप में PWW के मूल्य और महत्त्व को समझने में उपयोगी होंगे।

शब्दों के बिना प्रमाण की एक प्रदर्शनी

पाइथागोरस का प्रमेय : (सामान्यतया) हम पाइथागोरस के महत्त्वपूर्ण प्रमेय के साथ शुरू करते हैं। हमने इस प्रमेय के लिए बारहवीं सदी के प्रसिद्ध प्रमाण “ध्यानपूर्वक देखना!” (भास्कर द्वितीय ने आरेखों और केवल एक शब्द “Behold” के द्वारा पाइथागोरस प्रमेय को सिद्ध करके दिखाया) को *एट राइट एंगल्स* के पहले के किसी अंक में प्रस्तुत किया है, इसलिए हम इसे यहाँ नहीं दोहरा रहे हैं। इसके बजाय हम वृत्त के गुणधर्मों (विशेषकर जीवाओं का प्रतिच्छेदन प्रमेय (intersecting chords theorem), जिसे ‘प्रतिच्छेदी जीवा प्रमेय’ (crossed chords theorem) भी कहा जाता है) पर आधारित एक प्रमाण प्रस्तुत कर रहे हैं। इसे सन्दर्भ (2), पृष्ठ 8 से लिया गया है। चित्र-1 देखें।



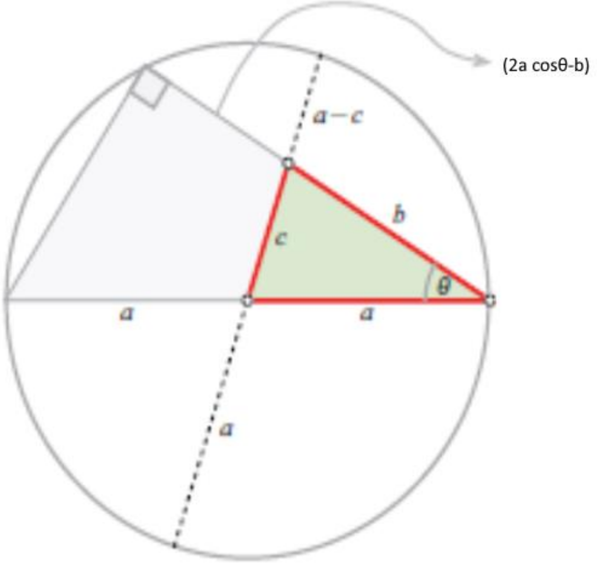
चित्र - 1 पाइथागोरस प्रमेय के लिए PWW

$(c + a) \times (c - a) = b \times b$

$\therefore c^2 - a^2 = b^2$

$\therefore a^2 + b^2 = c^2$

कोज्या नियम (Cosine Rule) : पाइथागोरस के प्रमेय के लिए PWW का एक छोटा-सा अनुकूलन कोज्या नियम के लिए PWW उत्पन्न करता है; इसकी प्रेरणा भी 'प्रतिच्छेदी जीवा प्रमेय' से मिलती है। यह PWW सन्दर्भ (2), पृष्ठ 32 से लिया गया है। चित्र-2 देखें।



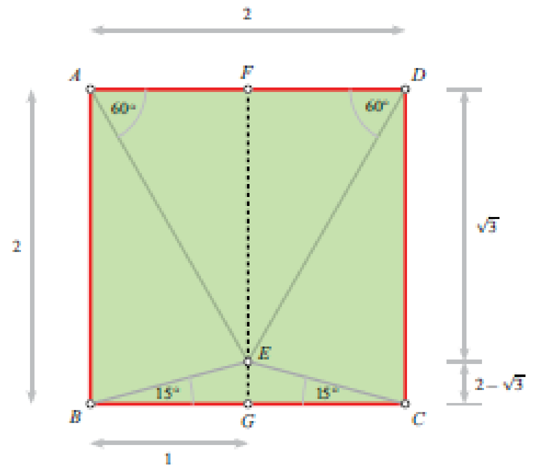
चित्र - 2 कोज्या नियम के लिए PWW

$(a + c) \times (a - c) = b \times (2a \cos\theta - b)$

$\therefore a^2 - c^2 = 2ab \cos\theta - b^2$

$\therefore c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\theta$

15 अंश की स्पर्शज्या (tangent) : $\tan 15^\circ$ का मान क्या है? चित्र-3 को (यदि हमने इसे ठीक से बनाया है, और यदि यह PWW उतना ही प्रभावी है जितना कि यह दावा करता है) इसका उत्तर प्रकट करना चाहिए! यानी कि इसे आपको यह विश्वास दिलाना चाहिए कि $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$ होता है। कृपया चित्र का ध्यानपूर्वक अध्ययन करें, और हमें बताएँ कि क्या इसने आपको इस कथन से सहमत होने के लिए राजी किया है।



चित्र - 3 PWW यह दर्शाने के लिए कि $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$ होता है

त्रिकोणीय संख्या सर्वसमिका (Triangular number identity) : त्रिकोणीय संख्याओं T_n ('T-संख्याएँ') को प्राकृत संख्याओं 1, 2, 3, 4,... के अनुक्रम के आंशिक योगफलों के रूप में परिभाषित किया जाता है (इसलिए यह संख्याएँ 1, 1 + 2 = 3, 1 + 2 + 3 = 6, 1 + 2 + 3 + 4 = 10,... हैं)।

यह निम्न सूत्र द्वारा उत्पन्न होती हैं :

$$T_n = n(n+1)/2$$

यह T-संख्याएँ बड़ी संख्या में ऐसी सर्वसमिकाओं को दर्शाती हैं जो वर्ग संख्याओं के गुणधर्मों के साथ घनिष्ठ रूप से जुड़ी हुई हैं। इनमें से सबसे सरल और सबसे आकर्षक हैं :

(अ) दो क्रमागत T-संख्याओं का योगफल एक पूर्ण वर्ग होता है।

(ब) यदि आप एक T-संख्या को 8 से गुणा करते हैं और परिणाम में 1 जोड़ते हैं, तो आपको एक पूर्ण वर्ग मिलता है।

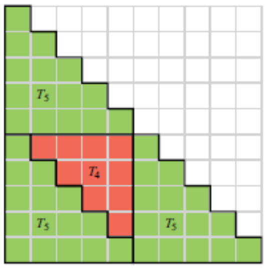
इन दोनों गुणधर्मों के लिए कई अच्छे PWWs हैं जिनकी खोज हम आप पर छोड़ते हैं।

अब हम एक कम स्पष्ट और बहुत कम जाने-पहचाने परिणाम के लिए एक PWW प्रस्तुत कर रहे हैं जिसे सन्दर्भ (2), पृष्ठ 104 से लिया गया है।

यह परिणाम कुछ इस प्रकार है :

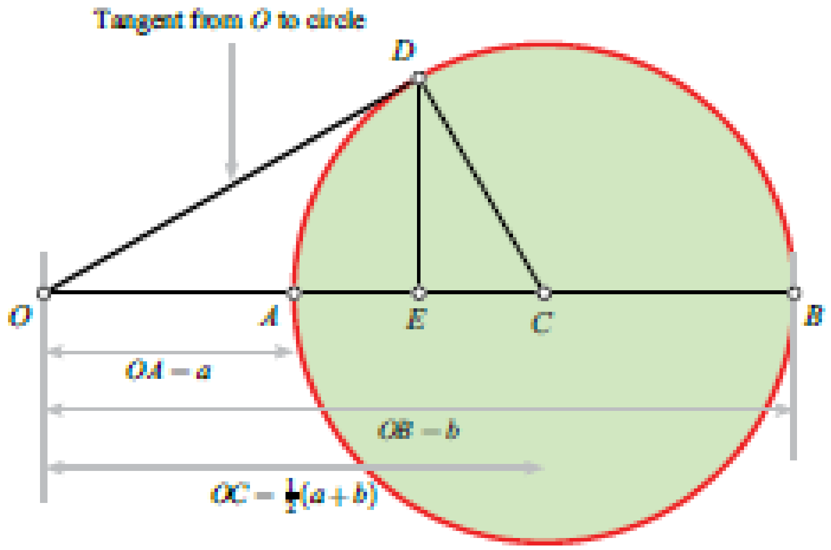
$$3T_n + T_{n-1} = T_{2n}$$

PWW को चित्र-4 में दर्शाया गया है। ध्यान दें कि इस चित्र को $n = 5$ के विशिष्ट मामले के लिए तैयार किया गया है। इसलिए यह केवल $3T_5 + T_4 = T_{10}$ को दर्शाता है। लेकिन यह सभी धनात्मक पूर्णांकों के लिए, $3T_n + T_{n\text{-}1} = T_{2n}$ को दर्शाने के लिए काफ़ी स्पष्ट तरीक़े से सामान्यीकरण करता है।



चित्र - 4 $3T_5 + T_4 = T_{10}$ को दर्शाने के लिए PWW

इस PWW में हम एक थीम देखते हैं जो संख्या-सम्बन्धों के लिए PWW में बहुत आम है : *यह PWW केवल एक विशिष्ट संख्या के लिए दिखाया गया है* । लेकिन जिस तरह से इसे बनाया गया है, उससे स्पष्ट सुझाव मिलता है कि इसे किसी भी संख्या के लिए किस तरह से तैयार किया जा सकता है। *जिस तरह से यह चित्र बनाया गया है उसमें सामान्यीकरण का मार्ग निहित है।*



- $OD^2 = OA \times OB$

- $OD = \sqrt{ab}$
- $OE/OD = OD/OC$ ($= \cos \angle DOE$)
- $OE = OD^2/OC = 2ab/a+b$
- OE = हरात्मक माध्य of a, b
- OD = गुणोत्तर माध्य of a, b
- OC = समान्तर माध्य of a, b
- $OE < OD < OC$

चित्र - 5 समान्तर माध्य - गुणोत्तर माध्य - हरात्मक माध्य असमिका के लिए PWW

समान्तर माध्य - गुणोत्तर माध्य - हरात्मक माध्य असमिका (Arithmetic mean - Geometric mean - Harmonic mean Inequality) : हम इस संकलन को AM-GM-HM असमिका के लिए एक PWW के साथ ख़त्म कर रहे हैं। यह AM-GM-HM असमिका इसी अंक यानी At Right Angles, March 2015 में हुसैन द्वारा लिखित एक लेख 'वर्गमूलों के लिए सरल सूत्र' (Simple Formulas for Square Roots) में एक महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाती है। "AM-GM-HM असमिका" का कथन यह है कि किन्हीं भी दो धनात्मक संख्याओं a और b के लिए $AM \geq GM \geq HM$ है, जहाँ पर AM, GM व HM a और b के क्रमश: समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य और हरात्मक माध्य को सूचित करते हैं :

$AM = a + b/2$,

$GM = \sqrt{ab}$,

$HM = 2ab/ a + b$

इसके अलावा, ठीक-ठीक समानता तब होती है जब $a = b$ होता है। चित्र-5 में दर्शाई गई आकृति इस गुणधर्म को सुन्दर और संक्षिप्त तरीक़े से प्रदर्शित करती है। (चित्र में यह मान लिया गया है कि $a < b$ है।) वास्तव में यह PWW *नहीं* है, क्योंकि व्युत्पन्न (derivations) दाईं ओर दिखाए गए हैं! लेकिन हमने इसे यहाँ शामिल किया है क्योंकि यह आकृति असमिका को काफ़ी अच्छे तरीक़े से ज्यामिति के ढाँचे में पेश करती है।

References

[1] Bogomolny, A. Proofs Without Words. From “Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles”,
http://www.cut-the-knot.org/ctk/pww.shtml, Accessed 18 November 2014

[2] Nelsen, Roger B. *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking*. MAA

[3] Nelsen, Roger B. *Proofs Without Words II: More Exercises in Visual Thinking*. MAA

[4] Proofs without words. http://mathoverflow.net/questions/8846/proofs-without-words

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Proof_without_words

[6] http://mathworld.wolfram.com/ProofwithoutWords.html

कम्युनिटी मैथमैटिक्स सेंटर (CoMaC) ऋषि वैली शिक्षा केन्द्र (AP) और सहयाद्रि स्कूल (KFI) की एक आउटरीच शाखा है। यह गणित-शिक्षण की कार्यशालाएँ आयोजित करता है और राज्य सरकारों और ग़ैर-सरकारी संगठनों के लिए शिक्षण-सामग्री तैयार करता है। CoMaC से shailesh.shirali@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : निदेश सोनी **पुनरीक्षण एवं कॉपी एडीटिंग :** कविता तिवारी

सम्पादन : राजेश उत्साही