Translation of *A New Divisibility by 8* From_Azim Premji University At Right Angles_Nov,2016

----

8 से विभाज्यता जाँचने के लिए एक नया नियम

कोमेक

मुख्य शब्द : *8 से विभाज्यता, जाँच, सौराष्ट्र*

कोई दी गई संख्या 8 से विभाज्य है या नहीं, यह तय करने की मानक जाँच इस प्रकार है :

> *मान लीजिए कि दी गई संख्या N है। N के केवल अन्तिम तीन अंकों की जाँच करें। इन तीन अंकों से बनने वाली संख्या को M मान लीजिए। तब :*
>
> - *यदि M, 8 से विभाज्य है तो N भी 8 से विभाज्य होगा।*
> - *यदि M, 8 से विभाज्य नहीं है तो N भी 8 से विभाज्य नहीं होगा।*
>
> *संक्षेप में : N, 8 से विभाज्य है यदि और केवल यदि M, 8 से विभाज्य हो।*

इस नियम के द्वारा हम केवल संख्या के अन्तिम तीन अंकों की जाँच करके यह तय कर सकते हैं कि कोई संख्या विशिष्ट 8 से विभाज्य है अथवा नहीं। चूँकि दी गई संख्या कितनी भी बड़ी हो सकती है, यह नियम हमारी मेहनत को कम करके हमारे कार्य को सरल बनाता है।

क्या 8 से विभाज्यता का कोई ऐसा नियम हो सकता है जिसमें उपरोक्त दिए गए नियम से कम कार्य करना पड़े? इस सवाल का जवाब आश्चर्यजनक रूप से **हाँ** है। एक राष्ट्रीय अख़बार (1) में छपी रिपोर्ट के अनुसार, ऐसा एक नियम सौराष्ट्र के कोडिनार तालुक के गणित-शिक्षक श्री **सुरसिंह परमार** द्वारा तैयार किया जा चुका है। 6 सितम्बर, 2016 को परमार जी को इस नवाचार के लिए सर्वश्रेष्ठ शिक्षक का पुरस्कार भी मिला है। कहा जाता है कि यह परीक्षण कक्षा 5 के एक विद्यार्थी द्वारा पूछे गए सवाल का परिणाम है। दरअसल उसका सवाल था कि क्या 8 से विभाज्यता की जाँच कम बार भाग देकर की जा सकती है? अख़बार को दिए गए एक साक्षात्कार में परमार जी ने कहा, "इस सवाल ने मुझे अन्दर से परेशान कर$A = \pi r^2$ दिया और सोचने पर मजबूर कर दिया... मेरे पास इस सवाल का कोई जवाब नहीं था...।" कुछ समय तक इस समस्या के साथ जूझने के बाद उन्होंने नीचे दिया गया नियम सुझाया।

विभाज्यता के लिए संकेतन

सबसे पहले हम एक सुविधाजनक लघु रूप संकेतन का वर्णन करेंगे जिसका उपयोग इस पूरे आलेख में किया जाएगा : $a \mid b$ का मतलब होगा कि *a, b* का एक भाजक है यानी *b, a* के द्वारा विभाज्य है। (उदाहरण : 4 | 12; 5 | 35) संकेतन $a \nmid b$ का मतलब होगा कि a, *b* का भाजक *नहीं* है यानी *b, a* के द्वारा विभाज्य नहीं है। (उदाहरण : 2 ∤ 5; 3 ∤ 10) $A = \pi r^2$

एल्गोरिद्म : मान लीजिए कि दी गई संख्या *N* है। मानक जाँच के अनुसार अन्तिम तीन अंकों से संख्या *M* बनाएँ। *M* को *abc* के रूप में लिखें जहाँ *a* सैकड़े का अंक, *b* दहाई का अंक और *c* इकाई का अंक है।

चरण 1 : जाँचें कि 4 | *bc*, अगर नहीं तो निष्कर्ष निकालें कि 8 ∤ *N*।
चरण 2 : यदि *bc*, 4 से विभाज्य है तो भागफल (*q* = *bc*÷ 4) की गणना करें।
चरण 3 : यदि *a* और *q* दोनों विषम हों या दोनों सम हों तो निष्कर्ष निकालें कि 8 | *N*; अन्यथा 8 ∤ *N*।

उदाहरण

उदाहरण 1 :

मान लीजिए कि *N* = 1,003,496; तब *M* = 496, *a* = 4, *bc* = 96, *bc* ÷ 4 = 96 ÷ 4 = 24। चूँकि 24 और 4 दोनों सम हैं, हम निष्कर्ष निकालेंगे कि 8 | *N*

उदाहरण 2 :

मान लीजिए कि *N* = 2,842,536; तब *M* = 536, *a* = 5, *bc* = 36, *bc* ÷ 4 = 36 ÷ 4 = 9। चूँकि 9 और 5 दोनों विषम हैं, हम निष्कर्ष निकालेंगे कि 8 | *N*।

उदाहरण 3 :

मान लीजिए कि *N* = 6,042,586; तब *M* = 586, *a* = 5, *bc* = 86। यहाँ पर हम देखते हैं कि 4 ∤ *bc*; अत: 8 ∤ *N*। (इस उदाहरण में हमें चरण 1 के आगे भी नहीं गए।)\

उदाहरण 4 :

मान लीजिए कि *N* = 6,042,588; तब *M* = 588, *a* = 5, *bc* = 88, *bc* ÷ 4 = 88 ÷ 4 = 22। चूँकि 22 सम है और 5 विषम हैं, हम निष्कर्ष निकालेंगे कि 8 ∤ *N*।

एल्गोरिद्म के सही होने का प्रमाण आलेख के अन्त में दिया गया है। 4 के गुणजों में पैटर्न का अध्ययन करके इसे और सरल बनाने का प्रयास किया जा सकता है।

विस्तार : 4 से विभाज्यता का नियम

उपरोक्त एल्गोरिद्म को 4 से विभाज्यता की जानी-मानी जाँच से जोड़ना प्रभावशाली है :

> *मान लीजिए कि दी गई संख्या N है। N के केवल अन्तिम 2 अंकों की जाँच करें। इन दो अंकों से बनी संख्या को M मान लीजिए। तब (i) यदि $4 \mid M$, तब $4 \mid N$; (ii) यदि $4 \nmid M$, तब $4 \nmid N$। संक्षेप में : $4 \mid N$ यदि और केवल यदि $4 \mid M$*

परमार जी द्वारा सुझाए गए तरीक़े पर विचार करते हुए हम इस एल्गोरिद्म को और सरल बना सकते हैं। मान लीजिए कि दी गई संख्या N है। इसके अन्तिम 2 अंकों से संख्या M बनाएँ। M को bc के रूप में लिखें जहाँ b दहाई का अंक है और c इकाई का ।

चरण 1 : जाँच करें कि $2 \mid c$। अगर नहीं तो निष्कर्ष निकालें कि $4 \nmid N$।

चरण 2 : यदि $2 \mid c$, तब भागफल ($q = c \div 2$) की गणना करें ।

चरण 3 : यदि b और q दोनों ही सम हों या दोनों ही विषम हों, तो निष्कर्ष निकालें कि $4 \mid N$; अन्यथा $4 \nmid N$।

इसे और स्पष्टता से इस प्रकार से कहा जा सकता है :

> कोई सम संख्या 4 से केवल तब ही विभाज्य होगी जब उस संख्या का दहाई का अंक और इकाई के अंक का आधा दोनों या तो सम हों या फिर दोनों विषम हों।

विस्तार : 16 से विभाज्यता का नियम

काफ़ी हद तक इसी तर्ज़ पर चलते हुए हम 16 से विभाज्यता का एक सरल नियम बना सकते हैं। मान लीजिए कि दी गई संख्या N है। N के अन्तिम 4 अंकों से संख्या M बनाएँ। M को $abcd$ के रूप में लिखें जहाँ a हज़ार का अंक, b सैकड़े का अंक, c दहाई का और d इकाई का अंक है।

चरण 1 : जाँचें कि $8 \mid bcd$ या नहीं। अगर नहीं तो निष्कर्ष निकालें कि $16 \nmid N$

चरण 2 : यदि $8 \mid bcd$, तब भागफल ($q = bcd \div 8$) की गणना करें ।

चरण 3 : यदि a और q दोनों सम हों या दोनों विषम हों, तो निष्कर्ष निकालें कि $16 \mid N$; अन्यथा $16 \nmid N$।

8 से विभाज्यता की जाँच के लिए इस एल्गोरिद्म के सही होने की उपपत्ति

इसका प्रमाण निम्नलिखित साधारण अवलोकनों पर निर्भर करता है जिन्हें आसानी से सत्यापित किया जा सकता है।

- 4 | 100; 8 ∤ 100; 8 | 200। तो 8, 100 के सभी सम गुणजों का भाजक है, किन्तु 100 के सभी विषम गुणजों का ग़ैर-भाजक (non-divisor)। और जैसे 100 में 8 से भाग देने पर 4 शेषफल बचता है, वैसे ही 100 के हर विषम गुणज में 8 से भाग देने पर 4 शेषफल बचता है।
- मान लीजिए कि *bc*, 4 का दो अंकीय गुणज है और *bc* ÷ 4 करने पर प्राप्त होने वाला भागफल *q* है। यदि *q* सम है, तब निश्चित तौर पर *bc*, 8 का गुणज होगा; और यदि *q* विषम है, तब निश्चित तौर पर *bc* को 8 से भाग देने पर 4 शेषफल बचेगा।

इन अवलोकनों से 8 से विभाज्यता के नियम का प्रमाण प्राप्त होता है। मान लीजिए कि $M = abc$, 4 का एक तीन अंकीय गुणज है और *bc* ÷ 4 करने पर प्राप्त होने वाला भागफल *q* है। ग़ौर करें कि $M = a00 + bc$। यह दो संख्याएँ (*a00* और *bc*) या तो दोनों 8 की गुणज हैं, या दोनों को 8 से भाग देने पर 4 शेषफल बचता है। यदि *M* को 8 का एक गुणज होना है, तो निम्न में से एक निश्चित तौर पर होना चाहिए :

- *a00* और *bc* दोनों 8 के गुणज हों । यह तब होगा जब *a* और *q* दोनों सम होंगे।
- *a00* और *bc* दोनों को 8 से भाग देने पर 4 शेषफल बचता हो। यह तब होगा जब *a* और *q* दोनों विषम होंगे।

इस एल्गोरिद्म के पीछे का तर्क अब स्पष्ट होना चाहिए।

References

1. Innovative maths teacher from Saurashtra to receive award, http://timesofindia.indiatimes.com/city/rajkot/Innovative-maths-teacher-from-Saurashtra-to-receive-award/articleshow/54016478.cms, Accessed 10 September, 2016

द कम्युनिटी मैथमैटिक्स सेंटर (कोमेक), ऋषिवेली एजुकेशन सेंटर (आन्ध्र प्रदेश) और सह्याद्रि स्कूल (केएफआई) की आउटरीच शाखा है। यह गणित-शिक्षण की कार्यशालाएँ आयोजित करती है और राज्य सरकारों व ग़ैर-सरकारी संगठनों के लिए शिक्षण-सामग्री तैयार करती है। कोमेक से shailesh.shirali@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : उत्सव पटेल **पुनरीक्षण :** यशवेन्द्र सिंह

कॉपी-एडीटिंग : कविता तिवारी **सम्पादन : राजेश उत्साही**