Translation of *Sweet Seller's: Prithwijit De* From AzimPremji University At Right Angles,June 2012

आकृति, आकार, संख्या और दाम

मिठाई वाले की तरक़ीब

गणित के ज़रिए व्यापार का विश्लेषण

गुलाबजामुन की दो कटोरियों में कितना गणित हो सकता है? पृथ्वीजीत डे एक मॉडल बनाते हैं, अनुमान लगाते हैं, गणना करते हैं और एक ठोस तर्क प्रस्तुत करते हैं कि दोनों में से किस उत्पाद से मिठाईवाला ज़्यादा लाभ कमाता है।

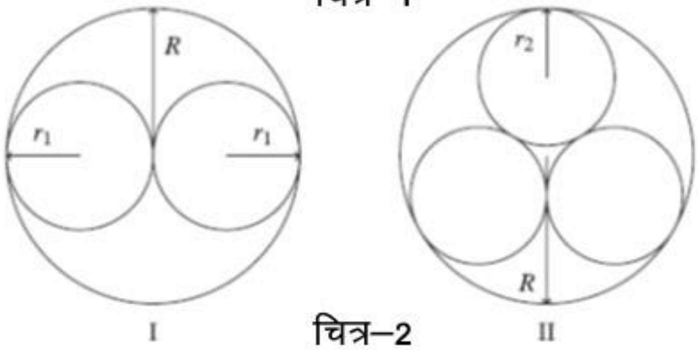
पृथ्वीजीत डे

गुलाबजामुन भारत की एक प्रसिद्ध मिठाई है। अक्सर एक कटोरी में एक या दो गुलाबजामुन बेचे जाते हैं। लेकिन, हाल ही जब मेरे संस्थान की कैंटीन के सड़क पार वाली मिठाई की दुकान ने प्रतिस्पर्धी मूल्य पर एक कटोरी में तीन गुलाबजामुन बेचना शुरू किया, तो मैं कौतुहल से भर गया। मेरे संस्थान के मिठाई प्रेमी लोगों ने तुरन्त वहाँ जाना शुरू कर दिया, लेकिन जो दाम को लेकर सजग थे वे कैंटीन के साथ ही रहे।

सड़क पार की उस दुकान को इस प्रतिस्पर्धी रणनीति के लिए किसने प्रेरित किया? एक गणितज्ञ होने के नाते, मुझे स्वाभाविक तौर पर इस समस्या को हल करना था। और जैसा कि गणित में आमतौर पर करते है मैंने अपने कैंटीन वाले को 'मिस्टर X' और मिठाई की दुकान वाले को 'मिस्टर Y' से सम्बोधित किया। इस समस्या के लिए मेरा गणितीय रूप कुछ इस प्रकार है।

मिस्टर X एक बेलनाकार कटोरी (जिसके अनुप्रस्थ काट की त्रिज्या R है) में दो गुलाबजामुन ₹ p_1 प्रति गुलाबजामुन की दर से बेचते हैं। दोनों गुलाबजामुन गोलाकार हैं तथा एक-दूसरे को बाहरी रूप से स्पर्श करते हैं और कटोरी को आन्तरिक रूप से स्पर्श करते हैं। मिस्टर Y (जो मिस्टर X के प्रतिद्वन्द्वी हैं) उसी आकृति और आकार की कटोरी में तीन गुलाबजामुन ₹ p_2 प्रति गुलाबजामुन की दर से बेचते हैं, जिस आकृति और आकार की कटोरी मिस्टर X इस्तेमाल करते हैं। **चित्र-1** में उनके द्वारा दिए जाने वाले गुलाबजामुन की तस्वीर दी गई है और **चित्र-2** में ऊपर से नीचे का दृश्य दर्शाया गया है।

चित्र–1



चित्र–2

निश्चित तौर पर p_2 को p_1 से कम होना चाहिए, क्योंकि अगर सामग्री समान रखी जाए तो दाम आकार के समानुपाती होता है। मिस्टर X से गुलाबजामुन ख़रीदने वाले व्यक्ति $2p_1$ ख़र्च करेंगे और मिस्टर Y से गुलाबजामुन ख़रीदने वाले व्यक्ति $3p_2$ ख़र्च करेंगे।

अवकल ज्यामिति (differential geometry) के एक विशेष रूप से कठिन सवाल को हल करते वक़्त मैंने जो बातचीत सुनी, उसे आप भी पढ़ें : “मिस्टर X ने एक गुलाबजामुन का दाम ₹6 रखा है! इसलिए उनकी दुकान पर दो गुलाबजामुनों की एक कटोरी का दाम सिर्फ़ ₹12 है!” “मिस्टर Y की दुकान पर एक कटोरी का दाम ₹15 है, पर मुझे 3 गुलाबजामुन मिलते हैं। तो प्रत्येक गुलाबजामुन का दाम ₹5 हुआ, और कटोरियाँ भी समान माप की हैं।” “हाँ, पर समान माप की कटोरी में भी तीनों गुलाबजामुन छोटे आकार के होते हैं! मुझे तो 2 बड़े गुलाबजामुन मिलते हैं, वह भी कम दाम पर!” जैसा कि आप देख सकते हैं मेरे कार्यालय में इस मुद्दे पर गम्भीर और महत्त्वपूर्ण चर्चाएँ होती रहती हैं।

इस मुद्दे पर ध्यान-से सोचते हुए मैंने इस समस्या को दो मुख्य प्रश्नों तक सीमित कर दिया।

1. किस कटोरी में अधिक मात्रा में मिठाई है?
2. अगर मिठाई के इकाई आयतन के उत्पादन का दाम समान है तो किस मिठाई वाले को अधिक लाभ होता है?

मिठाई को एक बेलनाकार कटोरी (जिसके अनुप्रस्थ काट की त्रिज्या R है) में बेचा जाता है। गुलाबजामुन गोलाकार आकृति के हैं और एक-दूसरे को बाहर से स्पर्श करते हैं और कटोरी को अन्दर से स्पर्श करते हैं।

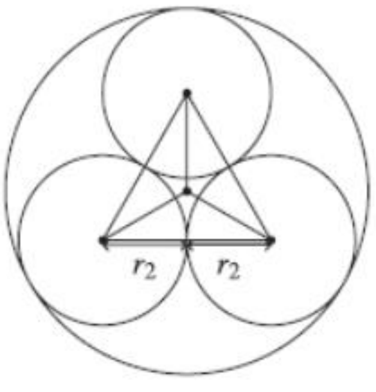
चित्र-2 (I) में दर्शाए गए प्रत्येक गुलाबजामुन की त्रिज्या r_1 है, जो $\frac{1}{2}$ R है।

इसलिए, कटोरी में मौजूद गुलाबजामुन का कुल आयतन V_1 है :

$$2\left(\frac{4\pi}{3}\left(\frac{R}{2}\right)^3\right) = \frac{\pi R^3}{3}$$

चित्र-2(II) में दिखाए गए एक गुलाबजामुन का आयतन ज्ञात करने के लिए प्रत्येक गोले की त्रिज्या ज्ञात करनी होगी।

चित्र-2(II) में दर्शाई गई व्यवस्था का द्विविमीय निरूपण देखें तो गोले वृत्त बन जाते हैं और बेलनाकार अनुप्रस्थ काट तीनों वृत्तों के परिगत (circumscribe) खींचे गए एक वृत्त में बदल जाती है। इस तरह गोले की त्रिज्या ज्ञात करने का कार्य आन्तरिक वृत्तों की त्रिज्या ज्ञात करने तक सीमित हो जाता है।



चित्र–3

आन्तरिक वृत्तों **(चित्र-3**) के केन्द्रों को आपस में मिलाकर एक समबाहु त्रिभुज प्राप्त होता है जिसका केन्द्रक बड़े वृत्त का केन्द्र है। यदि एक आन्तरिक वृत्त की त्रिज्या r_2 है तो त्रिभुज की भुजा का माप $2r_2$ है और

$$R = r_2 + \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2r_2) = r_2 + \frac{2r_2}{\sqrt{3}} = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)r_2$$

अत: एक गुलाबजामुन का आयतन हुआ

$$\frac{4\pi}{3}\left(\frac{R\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^3$$

और तीनों गुलाबजामुन का आयतन $V_2 = 4\pi\left(\frac{R\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^3$

अब देखते हैं कि कौन अधिक मात्रा में मिठाई बेच रहा है, और कितनी अधिक मात्रा में। ध्यान दें कि

(1) $$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^3}{36\sqrt{3}} \approx 0.83$$

$$\frac{V_2}{V_1} \approx 1.2$$

तो, मिस्टर Y, मिस्टर X से 20% अधिक मिठाई बेच रहे हैं। ग्राहक के परिप्रेक्ष्य से यह एक अच्छा सौदा हो सकता है। कटोरी के हिसाब से ग्राहक भले ही अधिक दाम ख़र्च कर रहे हों पर प्रति गुलाबजामुन दाम कम है, क्योंकि $p_2 < p_1$।

अगर मिस्टर X एक गुलाबजामुन का दाम ₹6 रखते हैं, तो एक कटोरी का दाम ₹12 हुआ। अगर मिस्टर Y एक गुलाबजामुन का दाम ₹5 रखते हैं, तो एक कटोरी का दाम ₹15 हुआ, पर मिस्टर X की कटोरी की तुलना में मिस्टर Y की कटोरी में 20.48% अधिक मिठाई है और प्रति गुलाबजामुन दाम भी कम है।

लेकिन, अगर विक्रेता के परिप्रेक्ष्य से देखा जाए तो क्या यह लाभकारी है? मान लीजिए कि दोनों दुकानदारों के लिए मिठाई के इकाई आयतन के उत्पादन का दाम *(c)* समान है। तो, क्या यह सम्भव है कि मिस्टर Y एक गुलाबजामुन का दाम कुछ इस प्रकार निर्धारित कर सकें कि वे मिस्टर X से अधिक मुनाफ़ा कमा सकें?

प्रति इकाई आयतन का विक्रय मूल्य कटोरी के दाम को दिए जा रहे गुलाबजामुन के आयतन से विभाजित कर प्राप्त किया जा सकता है। तो, प्रत्येक दुकान पर होने वाला मुनाफ़ा -

$$\frac{\text{एक कटोरी का दाम}}{\text{गुलाबजामुन का आयतन}} - \text{प्रति इकाई आयतन का दाम}$$

कौन-सी दुकान अधिक मुनाफ़ा कमा रही है, यह ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित असमिका पर विचार करते हैं :

(2) $\frac{3p_2}{V_2} - c > \frac{2p_1}{V_1} - c$

(3) जो $\frac{p_2}{p_1} > \frac{2}{3}\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$ के तुल्य है।

समीकरण(1) के प्रभाव से यह $p_2 > 0.8p_1$ के तुल्य है।

सो, अगर मिस्टर Y, p_2 का चयन कुछ इस प्रकार करें कि $0.8p_1 < p_2 < p_1$ तो गुलाबजामुन के आकार और दाम में कटौती के बावजूद वह मिस्टर X से अधिक मुनाफ़ा कमा सकेंगे।

उदाहरण के लिए, यदि मिस्टर X एक गुलाबजामुन का मूल्य ₹6 निर्धारित करते हैं, तो मुनाफ़े के इस खेल में अपने प्रतिद्वन्द्वी को हराने के लिए मिस्टर Y प्रत्येक गुलाबजामुन के दाम के तौर पर ₹ 4.80 और ₹6 के बीच का कोई भी मूल्य निर्धारित कर सकते (तालिका 1 देखें)। तब इस बात की पूरी सम्भावना होगी कि ख़रीददार को प्रत्येक गुलाबजामुन के लिए कम दाम चुकाने और दो की जगह तीन गुलाबजामुन पाने में ख़ुशी होगी क्योंकि सम्भव है कि उनका सिद्धान्त कम कीमत में ज़्यादा चीज़ पाना हो।

P_1 दाम / कटोरी	P_2 दाम /कटोरी
6 12	4.80 14.40 5.00 15.00 5.50 16.50

ध्यान रहे कि दोनों ही स्थितियों में कटोरी का आयतन समान है, इसलिए इसकी सम्भावना है कि ग्राहक मिस्टर Y के पास जाएँगे ताकि उन्हें थोड़े-से अधिक मूल्य पर 3 गुलाबजामुन मिल सकें। इस तरह मिस्टर Y के पास अधिक ग्राहक आते हैं और वह प्रत्येक कटोरी पर अधिक मुनाफ़ा कमाते हैं।

आभार

इस लेख के प्रस्तुतीकरण की गुणवत्ता में महत्त्वपूर्ण सुधार के लिए मैं स्नेहा टाइटस और शैलेश शिराली के प्रति आभार प्रकट करता हूँ।

पृथ्वीजीत डे होमी भाभा विज्ञान-शिक्षण केन्द्र, टीआईएफआर,मुम्बई में गणित ओलम्पियाड प्रकोष्ठ के सदस्य हैं। उन्हें गणित के लोकप्रिय लेख लिखना और पढ़ना उतना ही पसन्द है जितना कि गणित के सवाल हल करना। उनकी रुचि पहेलियों, क्रिकेट, लिखने और संगीत में भी है। उनसे de.prithwijit@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : कुमार गन्धर्व **पुनरीक्षण एवं कॉपी-एडीटिंग :** कविता तिवारी
सम्पादन : राजेश उत्साही