Translation of *What's the Next Number?* From_Azim Premji University At Right Angles_August, 2017

अगली संख्या क्या है?

CoMaC

मुख्य शब्द : *क्रम,पैटर्न, बौद्धिक क्षमता जाँच,भविष्यवाणी, अनिश्चितता*

“अगली संख्या क्या है?” तथाकथित बौद्धिक क्षमता की जाँच करने वाला यह प्रश्न इस देश और अन्य स्थानों की प्रवेश परीक्षाओं में शामिल किया जाने वाला एक बहुत ही लोकप्रिय प्रश्न है। इस प्रकार के प्रश्नों में नीचे दिए गए प्रत्येक अनुक्रम में प्रश्न-वाचक चिन्ह को सबसे उपयुक्त संख्या से बदलने की आवश्यकता होती है :

(i) 8, 7, 16, 5, 32, 3, 64, 1, 128, (?)
(ii) 16, 33, 65, 131, (?), 523,
(iii) 5, 2, 17, 4, (?), 6, 47, 8, 65

यह प्रश्न राष्ट्रीय प्रतिभा खोज परीक्षा (पहला चरण) और राष्ट्रीय साधन-सह-योग्यता (मेरिट-कम-मीन्स) छात्रवृत्ति परीक्षा 2012 से लिए गए हैं।

प्राय: ऐसे प्रश्नों में, प्रश्न-पत्र बनाने वाले द्वारा किसी पैटर्न के अनुसार अनुक्रम बनाया जाता है। विद्यार्थी से उस पैटर्न की पहचान करने और उसकी मदद से विलोपित संख्या ज्ञात करने की अपेक्षा की जाती है। इस प्रकार के प्रश्नों का औचित्य है क्योंकि पैटर्न गणित के साथ-साथ विज्ञान के लिए भी महत्त्वपूर्ण होते हैं। इसका अर्थ है कि पैटर्न खोजने की क्षमता कई मायनों में महत्त्वपूर्ण है। (उदाहरण के लिए क्रिप्टोग्राफ़ी यानी कूटलेखन के क्षेत्र में इसका बहुत महत्त्व है। आपमें से कई लोगों को शायद फ़िल्म *ए ब्यूटिफ़ुल माइंड (A Beautiful Mind)* याद होगी, जिसमें रसेल क्रो द्वारा निभाए गए पात्र (जॉन नैश) में पैटर्न पहचानने की एक अद्भुत क्षमता दिखाई गई थी।)

हालाँकि, इस कहानी में एक दिलचस्प मोड़ है। इसमें निहित प्रश्न है : एक अनुक्रम के आरम्भिक (मान लीजिए) पाँच पद दिए गए हैं, तो क्या हम यक़ीन से कह सकते हैं कि अगला पद क्या होगा? मान लेते हैं कि दिए गए आरम्भिक हिस्से में हमने एक बढ़िया पैटर्न का पता लगाया है; क्या हम यक़ीन से कह सकते हैं कि यह अनुक्रम केवल इसी पैटर्न को ध्यान में रखकर बनाया गया है?

उदाहरण के लिए, मान लीजिए कि $\{f(n)\}_{n\geq 1}$ अनुक्रम के पहले पाँच पद 1, 2, 3, 4, 5 हैं और हमें छठवें पद का पता लगाना है। यह बहुत ही आसान अनुक्रम लगता है। लगता है कि सभी n के लिए $f(n) = n$ है। यदि ऐसा है तो इसका मतलब $f(6) = 6$ होगा। परन्तु क्या केवल यही एकमात्र सम्भव हल है? या क्या ऐसा हो सकता है कि अनुक्रम के आरम्भिक हिस्से (अर्थात दिए हुए पदों से) से मेल खाते हुए कई पैटर्न सम्भव हैं? यदि एक से अधिक पैटर्न सम्भव हैं, तो अगले पद का अनुमान लगाने का कोई भी तरीक़ा तार्किक रूप से उचित नहीं होगा। यहाँ हम दिखाएँगे कि स्थिति यही है। वास्तव में, *हम यह दिखाएँगे कि छठा पद कोई भी, यानी कोई भी संख्या हो सकती है।*

यह दर्शाने का एक आसान तरीक़ा यहाँ दिया गया है। माना कि k एक गैर-शून्य संख्या है। नीचे दिए व्यंजक से निरुपित फलन f पर विचार करें :

$$f(n) = n + k(n - 1)(n - 2)(n - 3)(n - 4)(n - 5)$$

यदि n का मान 1, 2, 3, 4, 5 में से कोई संख्या है, तो व्यंजक $k(n - 1)(n - 2)(n - 3)(n - 4)(n - 5)$ का मान 0 होगा। यह k के किसी भी मान के लिए सही है। अतः, $n = 1, 2, 3, 4, 5$ के लिए $f(n) = n$। परन्तु $n \neq 1, 2, 3, 4, 5$ के लिए $f(n) \neq n$ चूँकि $k(n - 1)(n - 2)(n - 3)(n - 4)(n - 5) \neq 0$। $n \geq 6$ के लिए $f(n)$ और n के बीच की असंगति को k का उचित मान चुनकर मनचाहे ढंग से बड़ा किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, यदि $k = 1$ हो, तो

$$f(6) = 126,\ f(7) = 727,\ f(8) = 2528,\ \ldots;$$

और यदि हम $k = 2$ लेते हैं, तो

$$f(6) = 246,\ f(7) = 1447,\ f(8) = 5048,\ \ldots;$$

इन मानों की तुलना $f(6) = 6$, $f(7) = 7$, $f(8) = 8$ से की जा सकती है जो हमें तब मिले थे जब $f(n) = n$ माना था।

या हम f को निम्नलिखित रूप में मान सकते हैं,

$$f(n) = n + g(n)\ k(n - 1)(n - 2)(n - 3)(n - 4)(n - 5)$$

जहाँ g एक मनमाना फलन है। यह स्पष्ट हो गया होगा कि व्यंजक में उचित रूप से बदलाव करके हम कोई भी संख्या छठे पद के रूप में प्राप्त कर सकते हैं।

यह हमें बताता है कि यदि किसी अनुक्रम के कुछ आरम्भिक पद दिए हैं, तो अगले पद का अनुमान लगाने का कोई तार्किक तरीका नहीं है। वास्तव में, *अगला पद कोई भी संख्या हो सकती*

है। यह ऐसा ही है, चाहे आरम्भिक पदों के नियम बताने वाला पैटर्न कितना भी स्पष्ट क्यों न हो।

वैसे, एक और तरीक़े से भी इस समस्या को प्रस्तुत किया जा सकता है। हम पूछ सकते हैं: *एक अनुक्रम के कुछ आरम्भिक पद दिए गए हैं, इस अनुक्रम का अगला **सबसे सम्भव** पद क्या होगा?* या : *एक अनुक्रम के कुछ आरम्भिक पद दिए गए हैं, इस अनुक्रम को बनाने वाला **सबसे सम्भव** सूत्र क्या है?* 'सबसे सम्भव' या सम्भावित जैसे शब्दों का प्रयोग तभी अर्थपूर्ण होता है जब हम यह मानते हैं कि अनुक्रम को किसी आसान नियम या पैटर्न से बनाया गया है। ध्यान दें कि अब हम एक शर्त के साथ प्रश्न पूछ रहे हैं, *दी गई परिस्थिति पर हम सरलता की शर्त लगा रहे हैं,* हम यह मान रहे हैं कि अनुक्रम बनाने वाला एक सरल व्यक्ति है और किसी भी प्रकार की चालाकी करने का इच्छुक नहीं है! इस शर्त के साथ यह कहना उचित होगा कि यदि किसी अनुक्रम की पहली पाँच संख्याएँ 1, 2, 3, 4, 5 हैं, तब अगली *सबसे सम्भव* संख्या 6 है और अनुक्रम को बनाने का *सबसे सम्भव* सूत्र अर्थात *nवाँ* पद = *n* है।

यही नज़रिया अन्य तरीक़े से भी बन सकता है। गणित और विज्ञान में प्राय: ऐसा होता है कि दिए गए आँकड़ों को सन्तुष्ट करने वाला सबसे सरल फलन सबसे सन्तोषजनक साबित होता है। (हमेशा नहीं, परन्तु हमारे लिए आश्चर्य करने के लिए पर्याप्त मर्तबा होता है।) या सबसे सरल फलन नहीं तो एक ऐसा फलन जो 'पर्याप्त सरल' हो। अक्सर ऐसा होता है कि प्रकृति ऐसी चीज़ें चुनती है जो सरल और सुन्दर होती हैं। विज्ञान के इतिहास में डुबकी लगाएँ तो इस विषय के इर्द-गिर्द कई कहानियाँ बताई जा सकती हैं।

ऐसी सबसे अच्छी कहानी शायद सौर-मण्डल की संरचना से सम्बन्धित है। हम इसे यहाँ संक्षिप्त में बता रहे हैं। आरम्भिक मनुष्य को यह स्पष्ट प्रतीत हुआ होगा कि वे ब्रह्माण्ड के केन्द्र में स्थित हैं, और सभी खगोलीय पिण्ड ज्यामितीय रूप से परिपूर्ण कक्षाओं में हमारे चारों ओर चक्कर लगाते हैं। (हमारे दैनिक अनुभव और अवलोकन इस बात की पुष्टि करते हैं।) ग्रीक युग के दौरान इसे ***भूकेन्द्रित मॉडल (geocentric model)*** का औपचारिक रूप दिया गया। किसी भी मॉडल की शक्ति उसकी भविष्य को जानने और नए अवलोकनों की व्याख्या करने की क्षमता में निहित होती है। (मॉडल का मूल उद्देश्य यही है।) भू-केन्द्रित मॉडल के मामले में, प्रेक्षकों ने जल्द ही यह ध्यान दिया कि इस सरल मॉडल द्वारा सुझाई गई बातों और वास्तव में होने वाली घटनाओं में विसंगतियाँ थीं। इन विसंगतियों को दूर करने के लिए *अधिचक्र (epicycle)* की धारणा को जोड़कर इस मॉडल में संशोधन किया गया। सदियाँ बीतीं और कहीं अधिक विसंगतियाँ दिखाई देने लगीं। इसके जवाब में और अधिचक्र जोड़े गए और समायोजन किए गए। यह प्रक्रिया लगातार चलती गई और एक बहुत ही जटिल मॉडल बन गया : अधिचक्र पर अधिचक्र पर अधिचक्र! और तब

अचानक 16वीं सदी के उत्तरार्ध में एक नया सिद्धान्त आया - जिसे ***सूर्यकेन्द्रित सिद्धान्त (heliocentric theory)*** कहा जाता है। अधिचक्रों के विपरीत यह एक बहुत सरल मॉडल था और इसने प्रेक्षित परिघटनाओं का बहुत ही सुन्दर वर्णन किया। यह मॉडल आज तक जीवित है।

यह कहानी अत्यन्त संक्षिप्त रही; शायद बहुत संक्षिप्त! हम इस विषय पर भविष्य के लेख में और अधिक बात करेंगे और विज्ञान के इतिहास से इस तरह के और भी प्रकरण प्रदर्शित करेंगे। उन कहानियों का इन्तज़ार करें!

....

सामुदायिक गणित केन्द्र (**COMMUNITY MATHEMATICS CENTRE** - CoMaC) ऋषि वैली शिक्षा केन्द्र (आंध्र प्रदेश) और सहयाद्री स्कूल (KFI) का विस्तार कार्यक्रम है। यह गणित शिक्षण की कार्यशालाएँ आयोजित करता है और राज्य सरकार व गैर सरकारी संगठनों के लिए शिक्षण सामग्री तैयार करता है। सम्पर्क: shailesh.shirali@gmail.com

अनुवाद : संजय गुलाटी **पुनरीक्षण :** सुशील जोशी **कॉपी-एडिटर :** पारुल सोनी (सभी द्वारा एकलव्य फ़ाउण्डेशन)
सम्पादन : राजेश उत्साही