Translation: Chika’s Test for Divisibility by 7
At Right Angles_March, 2020

7 से विभाज्यता की ‘चिका’ जाँच

कोमैक (CoMaC)

मुख्य शब्द/ कीवर्ड : विभाज्यता, संख्या, विभाज्यता की जाँच

प्राथमिक और उच्च प्राथमिक स्तर पर विद्यार्थी, संख्या 2, 5, 3, 9, 4, 6, 8 और 11 से विभाज्यता की जाँच (divisibility test) से परिचित होते हैं। वे इन संख्याओं से सम्बन्धित विभाज्यता की जाँच में महारत भी हासिल कर लेते हैं। लेकिन वे किसी जाँच के कारगर होने की वजह को समझने की कोशिश हमेशा नहीं करते हैं। चूँकि इस प्रकार की विभाज्यता की जाँच करना सुगम है, इसलिए विद्यार्थी इन्हें आसानी से भूलते भी नहीं हैं।

इस सूची में संख्या 7 के न होने पर कुछ सजग विद्यार्थी आश्चर्यचकित होते हैं। कभी-कभार, कोई जिज्ञासु विद्यार्थी 7 से विभाज्यता की जाँच स्वयं ही कर सकता है। बेशक, जब ऐसा होता है, तब विद्यार्थियों के साथ-साथ शिक्षकों के लिए भी यह एक रोमांचक अनुभव होता है। एक ऐसी ही जाँच की खोज चिका ओफ़िलि द्वारा की गई। चिका वेस्टमिंस्टर अण्डर स्कूल (लन्दन, यूके) में एक नाइजेरियन विद्यार्थी हैं। यह लेख इस जाँच की प्रामाणिकता देता है।

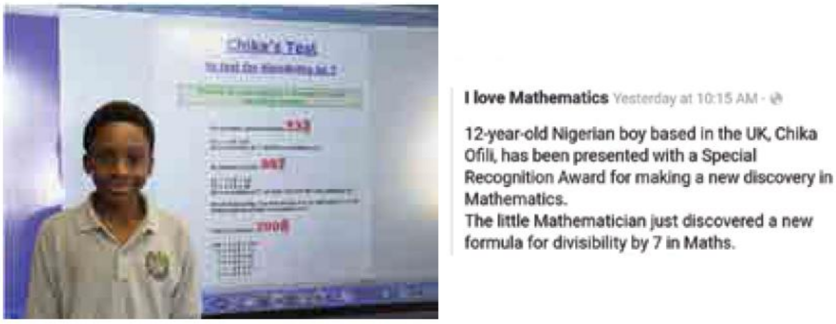
7 से विभाज्यता के लिए चिका जाँच

यह जाँच काफ़ी आसान है। हम इसे चिका की गणित शिक्षिका मिस मैरी इलिस[1] के शब्दों में दे रहे हैं :

> *एक दफ़ा जब चिका बोर हो रहा था, तब उसने इस समस्या पर विचार किया और एक परिणाम प्राप्त किया। उसने यह सिद्ध किया कि जब किसी पूर्ण संख्या (Whole Number) के अन्तिम अंक को 5 से गुणा किया जाए और इस गुणन से प्राप्त संख्या को उस प्रारम्भिक पूर्ण संख्या की बाकी बची हुई संख्या (अन्तिम अंक को छोड़कर) से जोड़ा जाए तो एक नई संख्या प्राप्त होती है। अगर यह नई संख्या 7 से विभाजित होती है, तो वह पूर्ण संख्या (प्रारम्भिक मूल संख्या) 7 से विभाज्य है। कितना आसान टेस्ट है न!*

आगे, वे कहती हैं : “इसका विपरीत कथन भी सही है। यदि नई संख्या 7 का गुणज नहीं हो, तो जाँच की जाने वाली वह पूर्ण संख्या भी 7 से विभाज्य नहीं होती है।”

नीचे की तस्वीर में कक्षा में चिका अपनी जाँच का प्रदर्शन करते हुए दर्शा रही है।



उदाहरण (व्याख्या सहित)

इस जाँच को हम कुछ उदाहरणों के ज़रिए दर्शाते हैं।

- संख्या 532 पर विचार करें। इसका अन्तिम अंक 2 है, तो जाँच की संक्रिया के अनुसार : $532 \rightarrow 53 + (5 \times 2) = 63$।
  ध्यान दें, 532 और 63 दोनों ही 7 के गुणज हैं।
- संख्या 973 पर विचार करें। इसका अन्तिम अंक 3 है। संक्रिया के अनुसार : $973 \rightarrow 97 + (5 \times 3) = 112$।
  इस संक्रिया को हम 112 के साथ फिर से दुहरा सकते हैं। 112 का अन्तिम अंक 2 है, तो संक्रिया के अनुसार : $112 \rightarrow 11 + (5 \times 2) = 21$।
  ध्यान दें, 21 और 973 दोनों ही 7 के गुणज हैं।
- अब संख्या 873 पर विचार करें।
  इसका अन्तिम अंक 3 है, तो संक्रिया के अनुसार : $873 \rightarrow 87 + (5 \times 3) = 102$।
  इस संक्रिया को फिर से 102 के साथ दुहराया जा सकता है।
  इसका अन्तिम अंक 2 है, तो संक्रिया के अनुसार : $102 \rightarrow 10 + (5 \times 2) = 20$।
  ध्यान दें कि 20 और 873 दोनों में से कोई भी 7 का गुणज नहीं है।

विधि के कारगर होने की वजह

अब हम तर्कपूर्ण तरीक़े से समझेंगे कि यह विधि क्यों काम करती है। मान लीजिए N कोई धनात्मक पूर्णांक (positive integer) है। मान लीजिए, b इस संख्या (N) के इकाई स्थान का अंक है और a संख्या N की बाकी बची हुई संख्या (संख्या N के इकाई अंक b को छोड़कर) को दर्शा रहा है। इस स्थिति में स्पष्ट रूप से हम N को इस प्रकार लिख सकते हैं :

$N = 10a + b$।

विभाज्यता की जाँच की विधि के अनुसार N की जगह संख्या $n = a + 5b$ का प्रयोग किया जा सकता है। दूसरे शब्दों में कहें तो, हमें यह कथन सिद्ध करना है कि :

$10a+b$ संख्या 7 से विभाज्य है यदि और केवल यदि $a+5b$ संख्या 7 से विभाज्य है।

यह ज़रूरी नहीं है कि इसे दर्शाने के लिए हमें तुरन्त ही किसी विधि का ख़याल आ जाए। हमें इन दोनों व्यंजकों ($10a+b$ और $a+5b$) के साथ कोई ऐसी संक्रिया करनी होगी कि व्यंजकों का संयोजन स्पष्ट रूप से 7 का गुणज हो। ध्यान दें, $10-3=7$, जो 7 का ही एक गुणज है। तो हम दूसरे व्यंजक के 3 गुणा मान को पहले व्यंजक से घटाकर देख सकते हैं। और हम देखते हैं कि यह संक्रिया तुरन्त कारगर साबित होती है :

$$(10a+b)-3(a+5b)=7a-14b$$
$$=7\,(a-2b)$$

यह साफ़ है कि $(10a+b)-3(a+5b)$ संख्या 7 का एक गुणज है। इसका मतलब $N-3n$ संख्या 7 का एक गुणज है। दूसरे शब्दों में $N-3n=7r$। यह विधि कितनी सार्थक और उचित है, इसे दर्शाने का हमारा कार्य अब लगभग समाप्त हो चुका है।

- मान लीजिए, n संख्या 7 का एक गुणज है, यानी $n=7s$।
  तब, हम कुछ ऐसा लिख सकते हैं : $N=3n+7r=21s+7r=7(3s+r)$।
  यह दर्शाता है कि N संख्या 7 का एक गुणज है।
- अब, मान लीजिए, N संख्या 7 का एक गुणज है, यानी $N=7k$।
  तब, हम कुछ ऐसा लिख सकते हैं : $3n=N-7r=7k-7r=7(k-r)$। यह दर्शाता है कि $3n$ संख्या 7 का एक गुणज है। अत: n भी 7 का एक गुणज है (यह इसलिए, क्योंकि 3 और 7 सह-अभाज्य (co-prime) संख्याएँ हैं और आपस में एक-दूसरे की विभाज्यता को प्रभावित नहीं करती हैं)।

ध्यान दें, इस विधि को दुहराकर लगातार आगे बढ़ाया जा सकता है। हर चरण में अंकों की संख्या एक अंक घटती जाती है। इसी क्रम में कोई न कोई ऐसी संख्या प्राप्त हो जाती है, जिसकी 7 से विभाज्यता का टेस्ट हम मानसिक रूप से भी कर सकते हैं। अत: यह विधि अपनी संक्रिया में काफ़ी प्रभावी है।

अन्त में

विभिन्न प्रकार के भाजकों से सम्बन्धित विभाज्यता की इस प्रकार की कई जाँचें हैं। दरअसल, कोई भी ऐसा विषम भाजक जो 5 का गुणज न हो, उसके लिए इस प्रकार जाँच की खोज की जा सकती है। इसे सिद्ध करने का काम हम पाठकों के लिए छोड़ रहे हैं।

सन्दर्भ

1. Westminster Under School, “Chika’s Test”, https://www.westminsterunder.org.uk/chikas-test/

कम्यूनिटी मैथेमेटिक्स सेंटर -कोमैक (COMMUNITY MATHEMATICS CENTRE - CoMaC) ऋषि वैली शिक्षण संस्थान (आन्ध्र प्रदेश) और सहयाद्रि स्कूल (कृष्णमूर्ति फाउण्डेशन) के प्रसार की एक शाखा है। यह सेंटर गणित के शिक्षण हेतु कार्यशालाएँ आयोजित करता है। यह एनजीओ और राज्य सरकारों के लिए शिक्षण-सामग्री भी तैयार करता है। कोमैक (CoMaC) से shailesh.shirali@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : कुमार गन्धर्व मिश्र
पुनरीक्षण : हनुमान सहाय शर्मा
कॉपी-एडीटिंग : कविता तिवारी
सम्पादन : राजेश उत्साही