Translation : Product Numbers : Vishak Vikranth
At Right Angles, March 2020

गुणनफल संख्याएँ

विशाक विक्रान्त

कुंजीशब्द : गुणनफल संख्याएँ, *स्ट्रांड* मैगज़ीन, महालनोबिस, रामानुजन, बैलेंसिंग प्रॉब्लम

'बैलेंसिंग प्रॉब्लम' प्राकृत संख्याओं के एक ऐसे युग्म $m, n \quad (m < n)$ को ज्ञात करने से सम्बन्धित है, जहाँ 1 से लेकर $m-1$ तक की सारी प्राकृत संख्याओं का योग $m+1$ से लेकर n तक की सारी प्राकृत संख्याओं के योग के बराबर हो। (हम इसे 'बैलेंसिंग प्रॉब्लम' का एक प्रकार समझ सकते हैं। यहाँ संख्या m सन्तुलन का बिन्दु है।) यह प्रॉब्लम अँग्रेज़ी मैगज़ीन *स्ट्रांड* के दिसम्बर, 1914 के अंक में पहली बार प्रकाशित हुई थी। इसे पी सी महालनोबिस ने त्रुटि एवं प्रयत्न (trial and error) विधि द्वारा हल किया था। रामानुजन ने इसका एक व्यापक हल दिया था। इसका सबसे सरल हल है

$$1+2+3+4+5=7+8$$

यहाँ $n=8$ है, और मध्य पद $m=6$ है, जो सन्तुलन का बिन्दु भी है। इस प्रॉब्लम के अनन्त हल हैं।

प्रॉडक्ट बैलेंस प्रॉब्लम (गुणनफल बैलेंस प्रॉब्लम)

ऊपर दर्शाई गई विधि के अनुरूप ही, हम एक *प्रॉडक्ट बैलेंस प्रॉब्लम* तैयार करते हैं। हम प्राकृत संख्याओं के एक ऐसे युग्म $m, n \quad (m < n)$ को ज्ञात करने की कोशिश करते हैं, जहाँ 1 से लेकर $m-1$ तक की सारी संख्याओं का गुणनफल $m+1$ से लेकर n तक की सारी संख्याओं के गुणनफल के बराबर हो।

उदाहरण के लिए, हम $m=7$ और $n=10$ पर विचार करते हैं। यह देखा जा सकता है,

$1\times2\times3\times4\times5\times6=8\times9\times10$ (दोनों तरफ़ के गुणनफल 720 के बराबर हैं)।

पर, आगे इस प्रकार के अन्य युग्मों का ज्ञात करना काफ़ी मुश्किल होता जाता है। यह इसलिए भी, क्योंकि संख्याओं के इस युग्म को छोड़कर कोई दूसरा युग्म इस प्रकार नहीं लिखा जा सकता है। दरअसल, $(7,10)$ ही ऐसा एकमात्र युग्म है।

दावे का प्रमाण

$m < 7$ की सारी स्थितियों के लिए जाँच करने पर, यह स्पष्ट है कि $m < 7$ के लिए इस प्रॉब्लम का कोई हल नहीं है। और यह तो हम पहले से ही जानते हैं कि $m = 7$, $n = 10$ इस प्रॉब्लम का एक हल है।

तो अब, हम $m > 7$ के लिए जाँच करते हैं। जब $m > 7$, तब मान लीजिए कि (m, n) प्राकृत संख्याओं का एक युग्म है, जो इस प्रॉब्लम का हल है। मान लीजिए, p संख्या m से छोटी सबसे बड़ी अभाज्य संख्या (prime number) है। इसलिए, $p \geq 7$। इसका मतलब यह हुआ कि 1 से लेकर $m - 1$ तक की सारी प्राकृत संख्याओं का गुणनफल निश्चित रूप से p का एक गुणज है।

इसलिए, $m + 1$ से लेकर n तक की सारी प्राकृत संख्याओं का गुणनफल भी p का एक गुणज होना चाहिए। ऐसा होने के लिए $m + 1$ से n तक की संख्याओं में p का कोई गुणज शामिल होना चाहिए। अब, p के बाद सबसे छोटी वह प्राकृत संख्या जो p का एक गुणज है, वह $2p$ है। इसलिए, $n \geq 2p$।

हमें यह भी ज्ञात है कि किसी भी प्राकृत संख्या k, जो 2 से बड़ी या 2 के बराबर हो $(k \geq 2)$, के लिए एक अभाज्य संख्या q, इस रूप में मौजूद है कि $k < q < 2k$। इस अद्भुत परिणाम से सम्बन्धित अधिक जानकारी https://en.wikipedia.org/wiki/Bertrand's_postulate पर प्राप्त की जा सकती है। संख्या सिद्धान्त (Number theory) में यह परिणाम बर्ट्रेंड पास्चलेट (Bertrand's Postulate) के रूप में जाना जाता है।

इसके और भी दमदार परिणाम ज्ञात हैं। रामानुजन ने दर्शाया था कि 6 के बराबर या 6 से बड़ी किसी प्राकृत संख्या k के लिए $(k \geq 6)$, *कम से कम दो अभाज्य संख्याएँ* q_1, q_2 मौजूद हैं, जहाँ $k < q_1 < q_2 < 2k$ है।

प्रस्तुत प्रॉब्लम में रामानुजन के इस परिणाम का उपयोग करते हुए हम देखते हैं कि दो अभाज्य संख्याएँ q_1, q_2 मौजूद हैं, जहाँ $p < q_1 < q_2 < 2p$ है। इन दो अभाज्य संख्याओं में, यह भी हो सकता है कि $q_1 = m$ हो। (यह तभी सम्भव है जब m स्वयं एक अभाज्य संख्या हो, अगर नहीं, तो $q_1 > m$ होगा।) लेकिन, किसी भी परिस्थिति में $q_2 > m$ होगा। इसका आशय है कि $m + 1$ से लेकर n तक की सारी प्राकृत संख्याओं का गुणनफल q_2 से तो निश्चित ही विभाजित होगा।

पर, 1 से लेकर $m - 1$ तक की प्राकृत संख्याओं का गुणनफल q_2 से विभाजित नहीं हो सकता है, क्योंकि q_2 एक अभाज्य संख्या है और $q_2 \geq m$ भी है। अत: 1 से लेकर $m - 1$ तक की प्राकृत संख्याओं का गुणनफल, $m + 1$ से लेकर n तक की प्राकृत संख्याओं के गुणनफल के बराबर नहीं हो सकता।

इसलिए, इस प्रॉब्लम का $m = 7$, $n = 10$ के अलावा कोई दूसरा हल नहीं है।

विशाक विक्रान्त बीजीएस नेशनल पब्लिक स्कूल में ग्यारहवीं कक्षा के विद्यार्थी हैं। वह संख्या सिद्धान्त में रुचि रखते हैं तथा भविष्य में एक संख्या सिद्धान्तकार बनना चाहते हैं। विशाक से vishak20903@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : कुमार गन्धर्व मिश्र
पुनरीक्षण एवं **कॉपी-एडीटिंग :** कविता तिवारी
सम्पादन : राजेश उत्साही