Translation of π Enters the 5th Class : Sabitha Raghunath & Sneha Bhansali _From_Azim Premji University At Right Angles_July,2019

कक्षा से

पाँचवीं कक्षा में π का प्रवेश

सबिता रघुनाथ और स्नेहा भंसाली

मुख्य शब्द : परिमाप, वृत्त, परिधि, व्यास, अनुपात, पाई, जाँच-पड़ताल, शिक्षण

यह लेख मैं ख़ुद को यह जताने के लिए लिख रही हूँ कि यह कोई सपना नहीं था।

पिछले साल, मैंने सह्याद्रि स्कूल, केएफआई (कृष्णमूर्ति फाउण्डेशन इंडिया) में पाँचवीं कक्षा के बच्चों के एक समूह को पढ़ाया। अपनी उम्र के सभी बच्चों की तरह यह बच्चे भी बहुत ऊर्जा से भरे थे। वे पड़ताल करने के लिए तैयार थे, लेकिन उनके लिए एक जगह बैठना मुश्किल था। मेरे उनके साथ बहुत अच्छे सम्बन्ध थे। कक्षा में प्यार, विश्वास और विस्मय का माहौल था!

क्षेत्रफल और परिमाप के बीच के सम्बन्ध (यदि कोई है तो) की पड़ताल करने के लिए हमने अख़बारों से बने वर्गों और आयतों के कटआउट्स के साथ वह सब किया जो हम कर सकते थे। (इस पड़ताल के हिस्से के रूप में हमने बिस्कुट का भी इस्तेमाल किया था।) अलग-अलग वर्गों और आयतों के क्षेत्रफल और परिमाप को मापने का 40 मिनट का एक रोमांचक सत्र इस बातचीत के साथ ख़त्म हुआ– "जल्दी करो! चलो, असेम्बली में चलते हैं, जल्दी।" तभी एक आवाज़ सुनाई दी, "लेकिन अक्का, वृत्त के परिमाप का क्या?"

मुझे एक्शन मोड में लाने के लिए यह काफ़ी अच्छा ट्रिगर था।

मैंने वृत्ताकार प्यालियों, बोतल के ढक्कनों और इस तरह की अन्य उपलब्ध चीज़ों का उपयोग करके पुरानी पत्रिकाओं के पन्नों से अलग-अलग आकार के लगभग 50 रंगीन वृत्त काट लिए। किसी भी वृत्त को काटने के लिए मैंने कम्पास का इस्तेमाल नहीं किया था। फिर मैंने कला कक्ष से धागा लिया; भौतिकी प्रयोगशाला से आधा मीटर के कुछ स्केल ले लिए; और यह सब लेकर, वृत्त के परिमाप को मापने के उद्देश्य से कक्षा में पहुँची।

इस पड़ताल के दौरान निम्नलिखित चरणों में काम किया गया :

1. प्रत्येक बच्चे ने अपनी पसन्द के आकार और रंग के दो वृत्त लिए।
2. प्रत्येक बच्चे ने 50 सेंटीमीटर का स्केल और जूट की रस्सी का उपयोग करके वृत्त के घेरे यानी “परिमाप” को नापा।
3. मैंने “परिधि” शब्द से बच्चों का परिचय कराया। (इस समय तक भी, न तो शिक्षक और न ही विद्यार्थियों के पास कोई सुराग था कि आगे हम क्या करने वाले हैं।)

    एक सवाल उठा, “अक्का, हमें और क्या मापना चाहिए?”

    तभी मेरे दिमाग़ में एक विचार आया, “क्या हम किसी वृत्त की सबसे लम्बी रेखा की लम्बाई पता कर सकते हैं?”

    “कैसे अक्का?”

    “चलो, कोशिश करते हैं।”

    एक बच्चे ने नवाचारी तरीक़ा सुझाया, “वृत्त को मोड़कर हमें सबसे लम्बी रेखा मिल जाएगी, अक्का!”

    “मुझे पता है अक्का, यह व्यास है।”

    मेरा अपना नवाचार भी ज़ोर मारने लगा और मैंने ब्लैकबोर्ड पर 23 × 5 की एक तालिका बना दी। इसमें पाँचवीं कक्षा के सभी 23 बच्चों के नाम लिख दिए, जैसा आप यहाँ देख सकते हैं। और फिर नीचे दिए निर्देश दिए :

क्रमांक	**नाम**	**वृत्त का घेरा (A)**	**सबसे लम्बी रेखा (B)**	$A \div B$

4. “बच्चो, वृत्त के अन्दर की सबसे लम्बी रेखा की लम्बाई को नापो।”
5. “सबसे लम्बी रेखा की लम्बाई से वृत्त के घेरे की लम्बाई को भाग दो।”
6. “ब्लैकबोर्ड के पास आओ और अपने-अपने माप लिखो।”
7. “भाग करके भागफल को अपने नाम के सामने उपयुक्त कॉलम में लिखो, उन मापों के बग़ल में जो तुमने पहले लिखे थे।”
8. “यह तालिका अपनी कॉपी में भी बना लो।”

तालिका से कुछ दिलचस्प अवलोकन सामने आए; कई बच्चे थे जो इस बारे में अपनी बात रखना चाहते थे :

1. हम सभी का हल “3” के आस-पास क्यों आया है?
2. मेरा हल आवर्ती दशमलव में क्यों आया है?
3. अक्का, क्या आपने पहले इन वृत्तों को नापा था और फिर काटा?
4. क्या मेरा भाग सही है?
5. क्या हम, ख़ुद से अपना वृत्त काट सकते हैं?
6. अक्का मेरे भाग को देखो न, यह ख़त्म ही नहीं हो रहा है।

इत्यादि।

वह एक यूरेका पल था जब 10 वर्षीय एक बच्चे ने ख़ुद से π का मान खोज लिया था।

अगली कक्षा में, हमने एक हद तक π और परिमाप के मापन के दौरान होने वाली ग़लतियों के बारे में बातचीत की। यह एक अहा (WOW) कक्षा थी...!

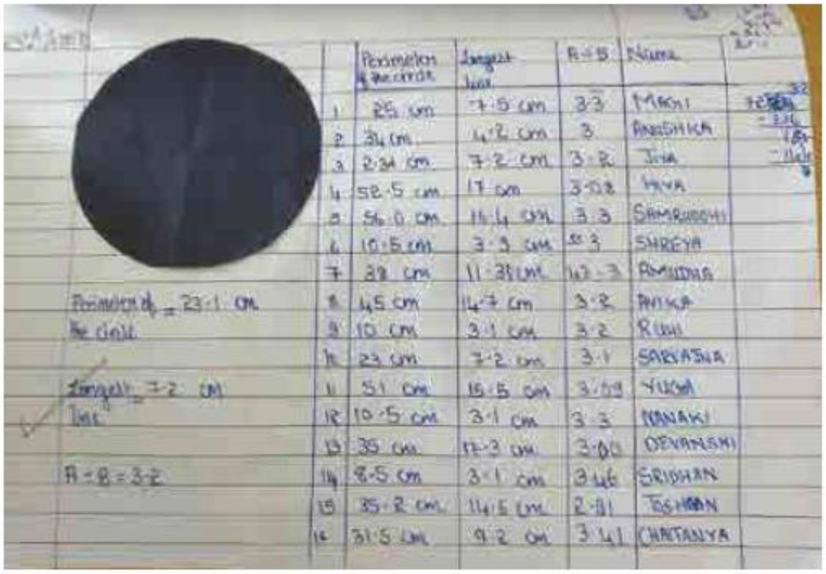
उन दो कक्षाओं का मुख्य आकर्षण गणित का चमत्कार था। मुझे पता नहीं है कि उन 23 बच्चों में से कितनों ने अवधारणा को पूरी तरह से समझा होगा, लेकिन मुझे पूरा यक़ीन है कि उन्होंने गणित के रहस्य की एक झलक देख ली थी। आने वाले वर्षों में, वे इसकी कई और झलक देखेंगे।

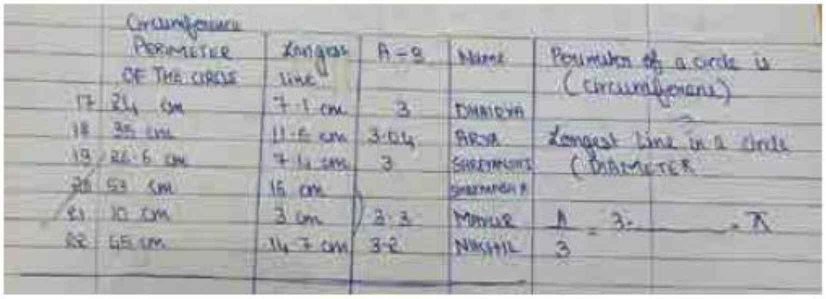
उन दो कक्षाओं से मैंने निम्न बातें सीखीं :

1. किसी भी कक्षा के लिए तैयारी निहायत ज़रूरी है।
2. किसी गतिविधि को करने में लगने वाले समय में विविधता होती है। (प्रत्येक बच्चे ने वृत्त के घेरे और सबसे लम्बी रेखा को नापा और फिर उन्होंने अपनी कॉपी में उन वृत्तों को चिपकाया। मैंने देखा कि प्रत्येक बच्चे की आवश्यकता अलग-अलग है; प्रत्येक बच्चे का ढंग अलग-अलग है। कुछ बच्चे काम को यथासम्भव अच्छे तरीक़े से करना चाहते थे और अधिक समय ले रहे थे; कुछ अन्य बच्चे काम को फटाफट करना चाहते थे। कुछ ऐसे भी थे जिन्हें काम शुरू करने में समय लग रहा था – वे धीमी शुरुआत करने वाले बच्चे थे, और फिर कुछ अन्य बच्चे अनिश्चितता और दुविधा की स्थिति में थे, क्योंकि उन्हें ख़ुद पर यक़ीन नहीं था कि उनके पास इस काम को करने का कौशल है या नहीं।)
3. हर उत्तर सही होता है। (मैंने परिमाप को मापने के लिए जूट की रस्सी का उपयोग किया था, तो उसका खिंचाव एक कारक था जिसके कारण नापी गई लम्बाइयों में कुछ भिन्नता थी। हमारा ज़ोर दशमलव के पहले स्थान तक सन्निकटन करके उत्तर लाने पर था।)

4. हर एक बच्चे ने अपना काम पूरा कर लिया है यह सुनिश्चित करने के लिए पर्याप्त समय निर्धारित करें। यह महत्त्वपूर्ण है।
5. जिन विद्यार्थियों ने काम पूरा कर लिया है, वे उन विद्यार्थियों की मदद कर सकते हैं जिनका काम अभी नहीं हुआ है।
6. आपकी तैयारी कभी पर्याप्त नहीं होती है।
7. आश्चर्यचकित होने के लिए हमेशा तैयार रहें।
8. ग़लतियाँ होना स्वाभाविक है, यह मानकर चलें।

कृपया ध्यान दें कि नीचे दी गई तस्वीर में, एक बच्ची ने कॉलम्स को लिखने का अपना एक अलग क्रम चुना है। हम में से कुछ के लिए यह एक समृद्ध कक्षा थी।





शैक्षणिक टिप्पणियाँ

यह ध्यान देने योग्य है कि इस पड़ताल ने, जो कि π के एक अनुमान पर समाप्त होती है, प्रारम्भिक गणित की कई अलग-अलग अवधारणाओं और कौशलों को एकीकृत किया है। जैसे कि मापन, परिमाप, परिधि, दशमलव संख्याओं का भाग, तालिका के रूप में आँकड़ों की प्रस्तुति,

पैटर्न ढूँढ़ना, एक अनुमान को व्यक्त करना/स्पष्ट रूप से व्यक्त करना, एक प्रतिलोम के बारे में सोचना आदि। संक्षेप में, "गणित करने" का जो भी मतलब होता है उसके कई सारे पहलू इसमें शामिल थे। इस सरल-सी दिखने वाली पड़ताल से निकले कई पहलू चिन्तन करने योग्य हैं।
बच्चों द्वारा किए गए कार्यों के कुछ शैक्षणिक निहितार्थों को हमने नीचे सूचीबद्ध किया है। बाईं ओर के कॉलम में उपरोक्त लेख में दिए गए कथनों और निर्देशों को सूचीबद्ध किया है, जबकि दाईं ओर के कॉलम की सम्बन्धित प्रविष्टियाँ उन कथनों के सम्बन्ध में कुछ शैक्षणिक टिप्पणियाँ करती हैं।

शिक्षक द्वारा दिए गए निर्देशों के शैक्षणिक पहलू

निर्देश संख्या	उपरोक्त लेख में दिए गए निर्देश	शैक्षणिक टिप्पणियाँ
4.	"बच्चो, वृत्त के भीतर की सबसे लम्बी रेखा की लम्बाई को मापो..."	इस निर्देश का पालन करने के लिए, बच्चों को उस वृत्ताकार आकृति को ठीक से मोड़ने, मापने के स्केल का सटीक रूप से उपयोग करने और दशमलव का उपयोग करते हुए व्यास की लम्बाई को दर्ज करने की आवश्यकता है।
5.	"सबसे लम्बी रेखा की लम्बाई से वृत्त के घेरे की लम्बाई को भाग दो।"	बच्चों ने अभी-अभी दशमलव का विभाजन सीखा था। इस अवधारणा को सीखने और इसके साथ सहज महसूस करने के लिए शायद उन्हें अधिक काम करने और अधिक समय व ऊर्जा की आवश्यकता थी। इस प्रकार दो विशिष्ट संख्याओं के अनुपात की पड़ताल करने के इस वर्तमान कार्य में इसे जोड़ना इस अवधारणा को फिर से समझने एक अच्छा अवसर था।
6.	"ब्लैकबोर्ड के पास आओ और अपने-अपने माप लिखो।"	यह ध्यान देना कि अल्पतमांक (least count) 0.1 सेंटीमीटर या 1 मिलीमीटर है, अत: तालिका की प्रविष्टियों में दशमलव बिन्दु के बाद एक से अधिक अंक नहीं होगा।
7.	"भाग करके भागफल को अपने नाम के सामने उपयुक्त कॉलम में लिखो, उन मापों के बाजू में, जो	हो सकता है कि कई बच्चों को यह स्पष्ट न हो कि इस तरह के अभ्यास के कई उत्तर हो सकते हैं, और इनमें से कोई भी उत्तर 'ग़लत' नहीं है। 'गणित करने' के पर्याप्त अनुभव के बाद ही बच्चे यह बात सीख पाते हैं।

	तुमने पहले लिखे थे।”	
8.	“यह तालिका अपनी कॉपी में भी बना लो।”	यह निर्देश आँकड़े एकत्र करने और उन्हें दर्ज करने की विधि से एक त्वरित परिचय कराने का काम करता है।

बच्चों द्वारा दी गई टिप्पणियों और उनके द्वारा पूछे गए सवालों के शैक्षणिक पहलू

टिप्पणी संख्या	**उपरोक्त लेख में बच्चों द्वारा की गई टिप्पणी और सवाल**	**शैक्षणिक टिप्पणियाँ**
1.	“हम सभी का हल ‘3’ के आस-पास क्यों आया है?”	क्या इन आँकड़ों में कोई पैटर्न छिपा है और यदि हाँ, तो हमें कैसे पता चलेगा कि वह पैटर्न वास्तव में मौजूद है?
2.	“मेरा हल आवर्ती दशमलव में क्यों आया है?”	पहली नज़र में असम्बद्ध प्रतीत होने वाली विभिन्न अवधारणाओं के बीच सम्बन्ध बनाना।
3.	“अक्का, क्या आपने पहले इन वृत्तों को नापा था और फिर काटा?”	कौन-सा गुणधर्म पहले आता है और कौन-सा अनुवर्ती गुणधर्म (follow-up property) के रूप में आता है : क्या यह वृत्त इस विशेष पैटर्न का पालन करते हैं, या पहले इनकी ‘रचना’ की गई ताकि इस पैटर्न को प्राप्त किया जा सके?
4.	“क्या मेरा भाग सही है?”	मैं कैसे सुनिश्चित करूँ कि मेरा उत्तर सही है? इसमें प्रक्रियात्मक अधिगम से अवधारणात्मक अधिगम की ओर आगे बढ़ना शामिल है।
5.	“क्या हम अपना वृत्त ख़ुद से काट सकते हैं?”	इस बात पर ध्यान दिए बिना कि किसने उस वृत्त की रचना की है, क्या यह पैटर्न किसी भी वृत्त के लिए सही होगा?
6.	“अक्का मेरे भाग को देखो न, यह ख़त्म ही नहीं हो रहा है।”	क्या मेरा जवाब ग़लत है क्योंकि मैंने पहले कभी इस तरह का सवाल नहीं देखा है?

सबिता रघुनाथ, ख़ुद की उम्र “तीन स्कोर्स और एक वर्ष” बताती हैं। उन्होंने 35 वर्षों से अधिक समय तक सीबीएसई, आईसीएसई और स्टेट बोर्ड स्कूलों में दस से सोलह साल के बच्चों को भौतिकी और गणित पढ़ाने का काम किया है। उनका हालिया कार्यकाल सह्याद्रि स्कूल केएफआई में था। उन्होंने आईसीएसई के लिए एक परीक्षक के रूप में भी काम किया है। बच्चों के साथ रहना उन्हें आनन्द देता है। उन्हें सीखना और सिखाना (गणित सहित) बेहद पसन्द है। चुनौती देना, चुनौतियाँ स्वीकारना, प्रयोग करना और कक्षा में मस्ती करना आज भी जारी है। वे मानती हैं कि हम में से हर कोई सीखने में सक्षम है। उनसे raghunath.sabitha@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

स्नेहा भंसाली आयोवा यूनिवर्सिटी में गणित-शिक्षा में पीएचडी की छात्रा हैं। उनका शोध, यह समझने पर केन्द्रित है कि गणित के शिक्षक स्कूल के समग्र माहौल में कैसे सामंजस्य स्थापित करते हैं। उनके अन्य शोध क्षेत्रों में गणित शिक्षक-शिक्षा और गणित-कक्षा में टेक्नोलॉजी का उपयोग शामिल है। उन्होंने प्रामाणिक मूल्यांकन और विकास मानसिकता को ध्यान में रखते हुए पूर्वसेवा प्राथमिक शिक्षकों के लिए गणितीय विषयवस्तु पर दो पाठ्यक्रम तैयार किए हैं। उन्होंने, वंचितों से लेकर मेधावी विद्यार्थियों के समूहों के लिए विभिन्न विषयवस्तुओं पर आधारित कई समर कैम्प डिज़ाइन और आयोजित किए हैं। उनसे bhansali.sneha07@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : प्रमोद मैथिल **पुनरीक्षण एवं कॉपी-एडीटिंग :** कविता तिवारी

सम्पादन : राजेश उत्साही