Translation of *Misconceptions in Fractions : Richa Goswami*_From_Azim Premji University At Right Angles_March,2018

कक्षा से

भिन्नों के बारे में ग़लतफ़हमियाँ

ऋचा गोस्वामी

मुख्य शब्द : ग़लतफ़हमी, त्रुटि, भिन्न, एक पूर्ण व उसके भाग, लघुत्तम समापवर्त्य, प्रस्तुतीकरण, शिक्षणशास्त्र

प्रस्तावना

गणित, एक कठिन विषय होने के लिए कुख्यात है। पूरे का पूरा बीजगणित डरावना माना जाता है और नापसन्द किया जाता है; कुछ ऐसी ही धारणा भिन्न जैसे विषय को लेकर भी है। ऐसे कई कारण हैं जो गणित को एक कठिन विषय बनाते हैं। इनमें से एक कारण इसके बारे में पहले से बनी धारणा है। शिक्षक, माता-पिता और बच्चे (शिक्षक, माता-पिता के कारण) गणित सीखने-सिखाने की प्रक्रिया इस पूर्व-निर्धारित धारणा के साथ शुरू करते हैं कि यह एक मुश्किल विषय है।

अन्य कारण भी हैं (वे विषय की प्रकृति में निहित हैं) जो अन्य स्कूली विषयों के विपरीत, इसकी समझ और पकड़ को मुश्किल बनाते हैं। यह अध्ययन का एक अत्यधिक अमूर्त क्षेत्र है जो मान्यताओं और तार्किक व्युत्पत्तियों पर आधारित है। तार्किक रूप से व्युत्पन्न विषय सामग्री के कारण इसकी प्रकृति पदानुक्रमिक (hierarchical) है। इसलिए इस विषय में आगे के अध्ययन के लिए पिछली अवधारणाओं का ज्ञान आवश्यक है। उदाहरण के लिए, गुणन की अवधारणा को समझने के लिए, एक शिक्षार्थी को जोड़ की अवधारणा को समझने और उसके साथ सहज होने की आवश्यकता है।

भिन्न प्राथमिक कक्षाओं में शुरू की गई सबसे अमूर्त अवधारणाओं में से एक है। अब तक पेश किए गए अन्य संख्या समुच्चयों (प्राकृत संख्याओं और पूर्ण संख्याओं) के विपरीत, भिन्नात्मक संख्याओं का उपयोग गिनती के लिए नहीं किया जाता है। यह मूल रूप से अनुपात को दर्शाती है। भिन्न के अध्ययन में कठिनाइयों और इसके शिक्षणशास्त्र के बारे में बहुत-से शोध और लेख हैं। इस लेख में, हम बच्चों में पनपने वाली भिन्न सम्बन्धी कुछ ही ग़लतफ़हमियों पर ध्यान केन्द्रित करेंगे।

ग़लतफ़हमियाँ या त्रुटियाँ

ग़लतफ़हमियाँ, त्रुटियाँ, ग़लतियाँ, वैकल्पिक ढाँचे आदि शब्दों का उपयोग अक्सर एक-दूसरे के लिए किया जाता है। यहाँ, मैं इन्हें बेहतर तरीक़े से समझने के लिए दो श्रेणियाँ बनाती हूँ। शब्द 'ग़लतफ़हमियाँ' और 'वैकल्पिक ढाँचे' एक-दूसरे के क़रीब हैं, इसी तरह शब्द 'त्रुटियाँ' और 'ग़लतियाँ' हैं। हालाँकि जिन शब्दों को एक साथ रखा गया है, उनमें छोटे-मोटे अन्तर हो सकते हैं, लेकिन इस लेख के उद्देश्य को ध्यान में रखते हुए मैं फिलहाल उसमें नहीं पड़ूँगी।

एक त्रुटि, लापरवाही, प्रतीकों की ग़लत व्याख्या या समझ, उस क्षेत्र विशेष के ज्ञान की कमी या एक ऐसे कार्य का परिणाम है जो बच्चे के वर्तमान स्तर से बहुत अधिक की माँग करता है। दूसरी ओर, ग़लतफ़हमी, का अर्थ है कि एक नियम या कलन (algorithm) के किसी विशेष विचार या विषय की शिक्षार्थी की अवधारणा, गणित में उसके स्वीकृत अर्थ और समझ से मेल नहीं खाती है (बाम्बीं [Barmby] एवं अन्य, 2009)। यह किसी नियम का ग़लत अनुप्रयोग, ज़रूरत से ज़्यादा या कम सामान्यीकरण, या स्थिति की एक वैकल्पिक समझ हो सकती है। उदाहरण के लिए, यह नियम कि "तीन अंकों वाली एक संख्या दो अंकों वाली संख्या से बड़ी है" केवल कुछ मामलों में काम करता है। जब आप 35 और 358 की तुलना करते हैं, तो यह नियम सही जवाब देता है, लेकिन तब नहीं जब आप 35 और 3.58 की तुलना करते हैं।

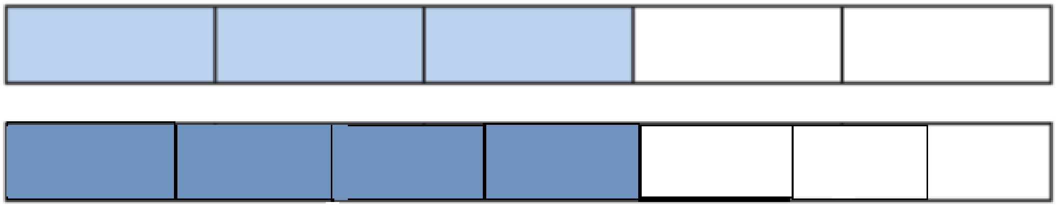
त्रुटियों के विपरीत ग़लतफ़हमियाँ, इस बात का संकेत हैं कि बच्चा क्या जानता है, या बच्चे की समझ का वर्तमान स्तर क्या है। इस प्रकार, विद्यार्थियों की ग़लतफ़हमियों को उजागर करने का प्रयास शिक्षक के दृष्टिकोण से एक बहुत ही उपयोगी गतिविधि है, क्योंकि यह भविष्य के सीखने-सिखाने की प्रक्रिया के लिए एक मार्गदर्शिका है।

भिन्नों के बारे में कुछ ग़लतफ़हमियाँ

गणित से लोगों को दूर करने, डराने के लिए अक्सर भिन्न को एक महत्त्वपूर्ण कारक माना जाता है। जैसी कि ऊपर चर्चा की गई है, संख्याओं के रूप में भिन्न की अमूर्तता को समझ पाना मुश्किल है। संक्रियाओं के कलन का परिचय इस समझ की खाई को और ज़्यादा बढ़ा देता है। जिस समय बच्चों को संख्याओं के रूप में भिन्नों की कल्पना करने के लिए अधिक अनुभवों की आवश्यकता होती है, उस समय संक्रियाएँ करने की जटिल प्रक्रियाएँ शुरू की जाती हैं। नतीजतन, बच्चे अक्सर यह समझे बिना कि यह क्यों किया जा रहा है, प्रक्रिया को याद रखने के प्रयास करते हैं। शिक्षक-प्रशिक्षण का अनुभव दर्शाता है कि अक्सर शिक्षक भी यही करते हैं। चूँकि बच्चे अक्सर प्रक्रियाओं को याद करते हैं, और कारणों को नहीं, वे उन्हें ग़लत स्थितियों में लागू करते हैं। उदाहरण के लिए, विद्यार्थियों और शिक्षकों दोनों को पता है कि भिन्नों को जोड़ने के लिए, आपको हर (denominators) का लघुत्तम समापवर्त्य लेने की आवश्यकता है। क्या यह सही है? हाँ। लेकिन क्या यह पर्याप्त है? नहीं, एक बच्चा जो इसे एक नियम के रूप में जानता है, यह नहीं समझता है कि भिन्नों को जोड़ने और घटाने के

लिए लघुत्तम समापवर्त्य की आवश्यकता क्यों है। परिणामस्वरूप, बच्चों को इस 'नियम' को गुणा करने के लिए उपयोग करते देखना भी आम बात है।

- **समान भागों के महत्त्व का अभाव :** एक भिन्न में हर न केवल उन भागों का प्रतिनिधित्व करता है जिनमें पूर्ण को विभाजित किया गया है, वह यह भी बताता है कि पूर्ण को कई समान भागों में विभाजित किया गया है। एक आम ग़लतफ़हमी केवल भागों की संख्या पर ध्यान केन्द्रित करना है, न कि उनके बराबर होने पर। इस ग़लतफ़हमी को अक्सर 'आधा गिलास दूध' या 'आधी रोटी' जैसे बोलचाल के वाक्यांशों के उपयोग द्वारा प्रचारित किया जाता है। इस तरह के उपयोगों में, गिलास का वास्तव में आधा भरा या ख़ाली होना आवश्यक नहीं है, बल्कि यह महज़ पूर्ण से कम है। यह ग़लतफ़हमी ख़ुद -ब-ख़ुद दिखती है जब विद्यार्थियों को एक भिन्न के सचित्र प्रस्तुतीकरण के लिए कहा जाता है।
- **एक स्थिति को भिन्नों के रूप में दर्शाना और एक भिन्न को प्रस्तुत करना :** एक आम ग़लतफ़हमी यह है कि भिन्न, किसी पूर्ण के भाग को बताती है। यह तब सामने आता है जब एक विषम भिन्न को चित्रों की सहायता से प्रस्तुत करने के लिए कहा जाता है। उदाहरण के लिए, $\frac{3}{5}$ और $\frac{7}{4}$ को दर्शाना :



एक व्यक्ति जो $\frac{3}{5}$ को दर्शाने में सक्षम है, वह जानता है कि हर उन भागों को इंगित करता है, जिनमें पूर्ण को विभाजित किया गया है, लेकिन जब $\frac{7}{4}$ की बात आती है, तो व्यक्ति इस समझ को उलट देता है। क्यों? शायद इसलिए कि 4 में से 7 भागों को दिखाना असम्भव है। इसलिए वह इसे इस तरह से देखता है कि 7 में से 4 होना चाहिए।

नौवीं कक्षा के विद्यार्थियों को दिए गए एक परीक्षण में, निम्नलिखित प्रश्न पूछा गया था, "एक तरबूज़ को 16 भागों में काटा गया। उनमें से, 7 भाग मैंने खाए और 4 भाग मेरे दोस्त ने। हम दोनों के द्वारा कितना तरबूज़ खाया गया? एक भिन्न के रूप में बताएँ।" 20 से अधिक विद्यार्थियों वाली कक्षा में, केवल 2 को ही इस प्रश्न का जवाब मिला और बाक़ियों ने कई तरह की ग़लतियाँ कीं, जिनमें से कुछ भिन्नों के बारे में ग़लतफ़हमियों को इंगित करती हैं।

इस प्रश्न का जवाब देने का प्रयास करते हुए एक बच्चे ने लिखा :

- तरबूज़ : 16
- भाग : 7
- दोस्त : 4
- कुल : 52

एक अन्य बच्चे ने लिखा : 16 + 7 + 4 = 27

यह जवाब दो स्तरों पर समस्याओं को दर्शाते हैं : पहली यह है कि बच्चे एक इबारती सवाल को कैसे पढ़ते और समझते हैं, और दूसरी समस्या संख्या समुच्चयों की संकल्पना के बारे में है, जो इन मामलों में पूर्णांकों तक या शायद केवल पूर्ण संख्याओं तक सीमित लगती है।

इन जवाबों से संकेत मिलता है कि, कुछ बच्चे प्रश्न पढ़ते समय केवल दिए गए संख्यात्मक आँकड़ों को सुनिश्चित करने की कोशिश कर रहे हैं, और फिर उस पर कुछ संक्रिया लागू कर रहे हैं। लागू की जाने वाली संक्रियाओं की अनियमितता (randomness) इस मामले में स्पष्ट है। ऐसा लगता है कि इन बच्चों को यह समझ है कि प्रश्न में लिखी गई अन्य सभी चीज़ें या तो ध्यान भटकाने के लिए हैं, या अर्थहीन तामझाम हैं। वे इस सवाल से यह अनुमान लगाते नहीं दिखाई पड़ते कि कौन-सी संक्रिया लागू करने की आवश्यकता है।

दूसरी ग़लतफ़हमी जो उपरोक्त जवाबों से स्पष्ट होती है, वह संख्या समुच्चयों की संकल्पना के बारे में है। कई बच्चों के लिए संख्या-प्रणाली धनात्मक पूर्णांकों या पूर्ण संख्याओं तक सीमित है। ऊपर-नीचे यानी दो तलों में (double decker) लिखी जाने वाली संख्याओं (भिन्न) को संख्या-प्रणाली के एक भाग के रूप में नहीं देखा जाता है। इसलिए ऐसी ग़लतफ़हमियों वाले बच्चे भिन्नात्मक संख्याओं के साथ काम करने का प्रयास तभी करेंगे जब उन्हें भिन्नात्मक संख्याओं (यानी, डबल-डेकर संख्याओं) के रूप में प्रस्तुत किया जाए। लेकिन वे स्थितियों या चित्रों को p/q रूप में प्रस्तुत नहीं कर पाएँगे। इस ग़लतफ़हमी का एक और उदाहरण एक जवाब में पाया गया जहाँ बच्चे ने $\frac{11}{16}$ (जो तरबूज़ के खाए गए हिस्से के बारे में बताता है) के बजाय 11 तरबूज़ (जो 7 और 4 का योग है) लिखा।

कुछ जवाबों से पता चलता है कि भिन्न की समझ चरणों में उभरती है। तो पहला चरण है जब भिन्न के p/q रूप से उनका कोई परिचय नहीं है। और दूसरा चरण है जब बच्चा इस रूप से परिचित तो होता है, लेकिन फिर भी वह स्थिति को भिन्न के रूप में सही ढंग से बता पाने में असमर्थ होता है। उपरोक्त प्रश्न के दो जवाब, जैसे कि $\frac{16}{5}$ और $\frac{7}{4}$, इस विशेष ग़लतफ़हमी को इंगित करते हैं। पहले जवाब में बच्चे ने अंश (हर के बजाय) के रूप में 16 (भागों की कुल संख्या) को लिखा है, और दूसरे मामले में, दो संख्याएँ, जो तरबूज़ के भागों को इंगित करती हैं, p/q के रूप में लिखी गई हैं।

- यह मानना कि भिन्नों में, अंश और हर को अलग-अलग पूर्ण संख्याओं के रूप में पेश किया जा सकता है।

  बच्चों को अंश और हर को अलग-अलग पूर्ण संख्याओं के रूप में मानकर, भिन्नों को जोड़ते या घटाते हुए देखना आम बात है। उपर्युक्त प्रश्न में ही एक बच्चा जिसने 7/16 + 4/16 के रूप में शामिल दो भिन्नों को सही ढंग से प्रस्तुत किया था, उसने अन्तिम जवाब को 11/32 के रूप में लिखा।

- **सरलीकरण से सम्बन्धित ग़लतफ़हमियाँ :** उभयनिष्ठ गुणनखण्डों द्वारा ऊपर और नीचे की संख्याओं को भाग देने को अक्सर आमतौर पर उभयनिष्ठ गुणनखण्डों या संख्याओं को काटने के तौर पर देखा जाता है, जो निम्न जवाबों की ओर ले जाते हैं :

  $$\frac{7}{16}+\frac{4}{16}=\frac{7+4}{16}=\frac{7+1}{4}=\frac{8}{4}=2$$

  बच्चों के जवाब से उभरा एक अन्य मुद्दा यह है कि कलन का अनुसरण करना और जवाब प्राप्त करना, इन बातों का प्रश्न के साथ कोई नज़दीकी सम्बन्ध नहीं है। नतीजतन, जवाब की अर्थहीनता बच्चे को परेशान नहीं करती है।

- **असमान हर वाली भिन्नों को जोड़ने या घटाने के दौरान, एक उभयनिष्ठ हर को खोजने में असफल होना :** विद्यार्थी अक्सर यह नहीं समझ पाते हैं कि भिन्नों को जोड़ने या घटाने से पहले उन्हें समान बनाना क्यों ज़रूरी है। उदाहरण के लिए,

  $$\frac{2}{3}+\frac{4}{7}=\frac{6}{10} \text{ या } \frac{1}{6}+\frac{2}{3}=\frac{3}{9}$$

  कारण और आवश्यकता को समझे बिना, लघुत्तम समापवर्त्य लेने का प्रक्रियात्मक ज्ञान और आगे बढ़ना अपनी स्वयं की ग़लतफ़हमियाँ पैदा करता है, जैसा कि निम्नलिखित उदाहरण में देखा गया है :

  $$\frac{7}{16}+\frac{4}{16}=\frac{1+7+1+4}{16}=\frac{8+5}{16}=\frac{13}{16}$$

  यहाँ शिक्षार्थी ने लघुत्तम समापवर्त्य लिया, जो 16 है और फिर 1 (जो लघुत्तम समापवर्त्य को हर द्वारा विभाजित करके प्राप्त किया गया है) के साथ गुणा करने के बजाय इसे दोनों अंशों में जोड़ा है, इस प्रकार एक ग़लत जवाब प्राप्त होता है।

- **समान भिन्नों के गुणन में हर को अपरिवर्तित छोड़ते हुए :** योग के नियम का गुणा पर अतिसामान्यीकरण करना निम्न जवाबों की ओर ले जाता है :

  $$\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$$

  यह ग़लतफ़हमी मूल रूप से समान भिन्नों को जोड़ने के कलन का एक अति-सामान्यीकरण है।

- **भिन्नों के भाग के सवालों को हल करने के लिए संख्याओं को पलटकर (अंश को हर व हर को अंश के रूप में लिखकर) गुणा करने की प्रक्रिया को समझने में असफलता :** ऐसा लगता है कि भिन्न संख्याओं के भाग की प्रक्रिया बच्चों के लिए कई समस्याएँ पैदा करती है। निम्न जवाब उसमें से एक को इंगित करता है :

$$\frac{7}{4} \div \frac{3}{2} = \frac{7}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{21 \times 8}{12} = \frac{168}{12}$$

यहाँ बच्चे ने भाजक को पलट तो दिया, लेकिन उसके बाद, उन्हें सीधे-सीधे गुणा करने के बजाय, त्रियक गुणा किया, और उसके बाद अंश की दोनों संख्याओं का गुणा किया।

पलटने से पहले से संख्याओं को काटना भाग से सम्बन्धित एक और ग़लतफ़हमी है, जो शायद गुणन प्रक्रिया का एक अति-सामान्यीकरण है। उदाहरण के लिए,

$$\frac{2}{3} \div \frac{6}{7} = \frac{2}{1} \div \frac{2}{7} = \frac{2}{1} \times \frac{7}{2} = \frac{1}{1} \times \frac{7}{1} = \frac{7}{1}$$

शिक्षकों के लिए

ग़लतफ़हमियों का अध्ययन उपयोगी और दिलचस्प दोनों है। यह किसी एक बच्चे के सीखने के पैटर्न का ख़ुलासा करता है, लेकिन बहुत सम्भव है कि यह सिर्फ़ उस तक सीमित न हो, और इस प्रकार यह एक ज़रिया बन जाता है यह समझने का कि बच्चे कैसे सीखते हैं।

चिह्नित ग़लतफ़हमियों पर चर्चा करने से न केवल उस बच्चे को, बल्कि सभी बच्चों को मदद मिलेगी। समझ विकसित करने की प्रक्रिया के तौर पर ग़लतफ़हमियों की स्वीकृति हमें ऐसे शिक्षार्थियों को विकसित करने में मदद करेगी, जो अपने सीखने और सीखने की प्रक्रिया के बारे में आश्वस्त हैं। स्पष्ट है कि ऐसा करने के लिए यह ज़रूरी होगा कि शिक्षक न सिर्फ़ किसी सवाल को हल करने की सही प्रक्रिया पर चर्चा करें, बल्कि वे चर्चा करने और त्रुटियों के विश्लेषण करने की एक संस्कृति विकसित करें।

ऋचा गोस्वामी ने 2008 से 2015 तक विद्या भवन शिक्षा केन्द्र, उदयपुर के साथ काम किया है। उन्होंने टाटा सामाजिक विज्ञान संस्थान, मुम्बई से प्राथमिक शिक्षा में स्नातकोत्तर किया है, और वर्तमान में 'गुणवत्तापूर्ण शिक्षा पर अभिभावकों की धारणा' विषय पर पीएचडी कर रही हैं। उनसे goswami84@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : निदेश सोनी **पुनरीक्षण एवं कॉपी-एडीटिंग :** कविता तिवारी
सम्पादन : राजेश उत्साही