Translation of Getting into Shape_Tengram Time : Sneha Titus & Swati Sircar
From Azimpremji University At Right Angles Vol.4, No.3,November 2015

कक्षा में लो फ्लोर हाई सीलिंग गतिविधि

आकृतियों को जानना

टैनग्राम टाइम

स्नेहा टाइटस और स्वाती सरकार

मुख्य शब्द : *टैनग्राम, त्रिभुज, चतुर्भुज, वर्ग, समान्तर चतुर्भुज, आयत, सर्वांगसमता, समरूपता, सहयोग*

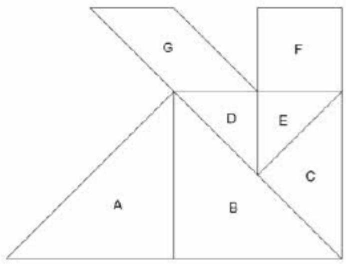
एट राइट एंगल्स के नवम्बर 2014 के अंक में, हमने एक नई शृंखला शुरू की, जो 'लो फ्लोर हाई सीलिंग' गतिविधियों का एक संकलन थी। एक बार संक्षेप में जान लेते हैं कि इन गतिविधियों में क्या होता है। इस तरह की गतिविधि में कार्यों का एक क्रम शामिल होता है। यह कार्य शुरुआत में काफ़ी आसान होते हैं और कक्षा के सभी बच्चों द्वारा इनको हल करने के प्रयास किए जा सकते हैं। हालाँकि, जैसे-जैसे कार्य आगे बढ़ते जाते हैं, वह कठिन होते जाते हैं। इस गतिविधि का उद्देश्य बच्चों के समस्या सुलझाने के कौशल को चुनौती देना और समस्या हल करने के दौरान प्रत्येक बच्चे को अपने अधिकतम प्रयास करने के लिए प्रेरित करना है। इसमें सभी के लिए पर्याप्त कार्य होता है लेकिन स्तर ऊँचा होने के कारण कुछ ही बच्चे कार्य को पूरा कर पाते हैं। उल्लेखनीय बात यह है कि सभी बच्चे कार्य में लगे रहते हैं और सभी कम से कम पूरे कार्य का एक हिस्सा पूरा करने में सक्षम होते हैं। इस शृंखला के पहले भाग (नवम्बर 2014 के अंक में) में हमने पेंटोमिनो और मार्च 2015 में फिबोनाची शृंखला और नियमित पंचभुज को शामिल किया था। इस बार हमारे एक पुराने और पसन्दीदा विषय 'टैनग्राम' की बारी है।

विकिपीडिया इस लोकप्रिय पहेली का वर्णन कुछ इस तरह करता है। **टैनग्राम** (चीनी : 七巧板 ; पिनयिन : *qīqiǎobǎn*; शाब्दिक अर्थ : "कौशल के सात बोर्ड") आकृतियों की विश्लेषण पहेली (dissection puzzle) है जिसमें सात सपाट आकृतियाँ शामिल होती हैं, जिन्हें *टैन* कहा जाता है। इन्हें आकृतियाँ बनाने के लिए एक साथ रखा जाता है। इस पहेली का उद्देश्य सभी सात टुकड़ों का उपयोग करके एक विशिष्ट आकृति (जिसकी केवल एक रूपरेखा या छायाचित्र दिया गया हो) बनाना है, जिसमें टुकड़े एक-दूसरे के ऊपर अतिव्यापित (overlap) नहीं हो सकते हैं। ऐसा माना जाता है कि चीन में सांग राजवंश के दौरान इसका आविष्कार किया गया था, और फिर उन्नीसवीं शताब्दी की शुरुआत में व्यापारिक जहाज़ों द्वारा इसे यूरोप ले जाया गया। कुछ समय के लिए यह यूरोप में बहुत लोकप्रिय हो गया था, और फिर प्रथम विश्व युद्ध के दौरान

एक बार फिर से इसकी प्रसिद्धि बढ़ी। यह दुनिया की सबसे लोकप्रिय विश्लेषण पहेलियों में से एक है। एक चीनी मनोवैज्ञानिक ने टैनग्राम को “दुनिया का सबसे पहला मनोवैज्ञानिक परीक्षण” कहा है, हालाँकि इसे विश्लेषण के बजाय मनोरंजन के लिए बनाया गया था [1]।

टैनग्राम के कार्य कक्षा 6 और उससे ऊपर के बच्चों के लिए उपयुक्त हैं। हमेशा की तरह, प्रत्येक कार्ड (या कार्डों का सेट) एक ऐसा कार्य है जिसमें ऐसे प्रश्नों की शृंखला होती है जिनका निर्माण जटिलता के साथ किया गया है। चूँकि सर्वांगसमता या समरूपता जैसी अवधारणाएँ केवल कक्षा 7 के बाद से ही पढ़ाई जाती हैं, यह सम्भव है कि शिक्षक को टैनग्राम की उन गतिविधियों को चुनना पड़े जो बच्चों के लिए उपयुक्त हों। हालाँकि, यह गतिविधियाँ उच्च कक्षाओं में सिखाई जाने वाली अवधारणाओं के लिए सहज और अनौपचारिक परिचय का एक मंच प्रदान करती हैं।

कार्य 1 : टैनग्राम के 7 टुकड़ों को अलग-अलग पहचानना और उनका वर्णन करना



चित्र-1

टैनग्राम के इस समूह को देखें (चित्र-1)।

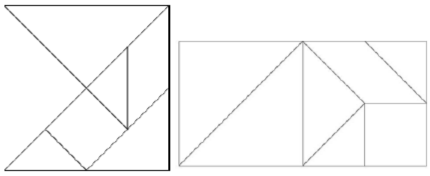
- टैनग्राम के इस समूह के ऊपर ट्रेसिंग पेपर रखकर आउटलाइन बनाएँ। फिर A से लेकर G तक सभी 7 टुकड़ों के कटआउट बना लें।
- इन कटआउट्स को समरूप आकृतियों के समूहों में जमा लें।
- प्रत्येक समूह को नाम दें और उन गुणों का वर्णन करें जो प्रत्येक समूह के सदस्यों में हों।
- यदि किसी समूह में एक से ज़्यादा टुकड़े हों तो इस समूह को सर्वांगसम आकृतियों के उपसमूह के रूप में वर्गीकृत करें। इन आकृतियों के उपसमूहों के बीच के सम्बन्ध का वर्णन करें।
- अपने अवलोकनों को लिखें।

शिक्षकों के लिए : यह टैनग्राम किट का एक आसान परिचय है, उन बच्चों के लिए जो इससे परिचित नहीं हैं। इस काम का उद्देश्य, मुख्य रूप से गणितीय संवाद और दस्तावेज़ीकरण है। बच्चों को इससे 'सर्वांगसम', 'समरूप', 'समूह', 'उपसमूह', 'सदस्य' आदि जैसे शब्दों के बीच समीक्षा और अन्तर करने में मदद मिलती है। बुनियादी कोणों और आकृतियों का ज्ञान और समझ इस काम के लिए एक आवश्यक शर्त है। 'सर्वांगसमता' और 'समरूपता' शब्दों को क्रमश: 'नक़ल' और 'निश्चित अनुपात में बढ़ाने/घटाने' से बदला जा सकता है।

कार्य 2 : टैनग्राम किट को फिर से इकट्ठा करना और किट का एक पूर्ण (whole) की तरह से वर्णन करना

प्रत्येक समूह को दिए गए चित्रों (या तो चित्र 2.1 या चित्र 2.2) में से एक चित्र दिया जा सकता है। उन्हें दूसरे चित्र को देखने की अनुमति नहीं है। विशिष्ट रूप से दिए गए निर्देशों के अलावा बाक़ी के निर्देश दोनों समूहों के लिए समान रहेंगे।

इस कार्य के लिए, कक्षा को दो समूहों में बाँटा जा सकता है।



चित्र-2.1 चित्र-2.2

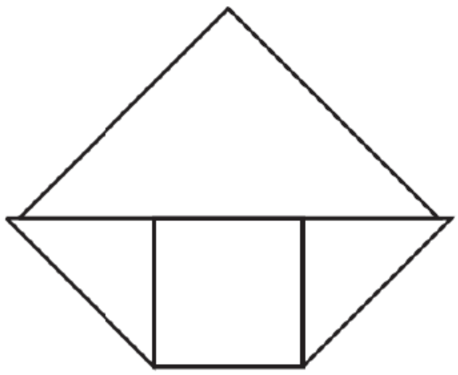
- अपने कटआउट्स को जोड़कर वह चित्र बनाएँ जो आपके समूह को दिया गया है। अन्त में बनने वाले चतुर्भुज को पहचानें। कार्य 1 में दिए अनुसार टुकड़ों को A से लेकर G तक नाम दें।
- A से लेकर G तक के सभी टुकड़ों को जमाकर, चित्र 2.1 या चित्र 2.2 में दिए गए, अपने चतुर्भुज को अपनी नोटबुक में बना लें। अब इसे बनाने के निर्देशों को कुछ इस प्रकार से लिखें कि उन्हें पढ़कर वह व्यक्ति भी इसे फिर से बना सके, जिसने इसे पहले कभी नहीं देखा है।
- समूह 1 से कोई एक बच्चा समूह 2 के किसी एक साथी के साथ काम करते हुए अपने समूह की आकृति के निर्देशों को बोलकर बताए, और देखे कि क्या वह चित्र 2.1 की तरह आकृति बना पाती/पाता है।
- समूह 2 से कोई एक बच्चा अब समूह 1 के उसी साथी के साथ काम करते हुए अपने समूह की आकृति के निर्देशों को उसे बोलकर बताए, और देखे कि क्या वह चित्र 2.1 की तरह आकृति बना पाती/पाता है।
- कार्य 1 में आपने A से लेकर G तक की आकृतियों के ज्यामितीय नामों को पहचाना और उनकी विशेषताओं के बारे में बताया है। अपने साथी के साथ इस बात पर चर्चा करें और लिखें कि दिए गए निर्देशों ने, A से लेकर G तक की आकृतियाँ क्यों बनाईं, और वे टुकड़े साथ में क्यों फिट हुए।

शिक्षकों के लिए : इस कार्य का उद्देश्य बच्चों को यह दिखाना है कि एक वर्ग या आयत बनाने के लिए टैनग्राम के इन 7 टुकड़ों को एक साथ कैसे जोड़ा जाता है। एक बार जब दोनों में से एक भी चतुर्भुज बन जाए तो उनके पास यह देखने का अवसर भी होता है कि इसे मूल 7 टुकड़ों में कैसे बाँटा जा सकता है। जो निर्देश वे लिखते हैं, उनसे बिलकुल वही आकृतियाँ बननी चाहिए जो A से G की हैं। बच्चों को यह सुझाव दिया जा सकता है कि चतुर्भुज या आयत के चारों शीर्षों के साथ-साथ भुजाओं पर नए बिन्दुओं को चिन्हित करने (भ्रम से बचने के लिए H से शुरुआत करें) से निर्देश और अधिक स्पष्ट होंगे। इस कार्य में अपने साथी के गणितीय संचार कौशलों के मूल्यांकन करने का मौक़ा है। कार्य में सुधार के लिए साथियों द्वारा एक-दूसरे को त्वरित फीडबैक और सुधारात्मक उपाय सुझाए जा सकते हैं।

जियोजेब्रा जैसे बेहतरीन गतिशील ज्यॉमितीय सॉफ्टवेयर तक पहुँच रखने वालों के लिए, यह निर्देशों के साथ स्केच बनाने और उसे दर्ज करने के प्रायोगिक अभ्यास के रूप में भी काम कर सकता है। अन्तिम प्रश्न निश्चित रूप से उच्च स्तर की एक कठिन चुनौती है। सभी के द्वारा इसे हल करने का प्रयास नहीं किया जा सकता है। इसके लिए बच्चों को इस तरह के गुणधर्मों का उपयोग करने की आवश्यकता होती है, जैसे कि वर्ग के विकर्ण एक-दूसरे को समकोण पर प्रतिच्छेद करते हैं। परन्तु यह किसी बात को सिद्ध करने के कौशलों को विकसित करने की नींव रखता है। 7 आकृतियों में से प्रत्येक की विशेषताओं को कम्पास बॉक्स या जियोजेब्रा से जाँचने के बाद बच्चे यह समझाकर कि उनके द्वारा दिए गए निर्देशों ने इन आकृतियों का निर्माण क्यों किया अपनी विचार बुद्धि (reasoning), तर्क और ज्यामिति के ज्ञान का अभ्यास कर सकते हैं।

कार्य 3 : विभिन्न आकृतियों की भुजाओं की लम्बाई का अध्ययन करना और पाइथागोरस प्रमेय का उपयोग करना

- वर्ग की एक भुजा को एक इकाई लम्बा मानते हुए छोटे व सबसे बड़े त्रिभुज की भुजाओं की लम्बाइयाँ ज्ञात करें।
- दो अलग तरीक़ों से बड़े त्रिभुज के कर्ण को बताएँ।
- इस चित्र को ध्यान से देखें, और अपने टैनग्राम के टुकड़ों की मदद से इसे फिर से बनाएँ।



बड़े त्रिभुज का कर्ण वर्ग की भुजाओं के 3 गुने से थोड़ा-सा कम क्यों है?

शिक्षकों के लिए नोट : इस कार्य के लिए एक आवश्यक शर्त पाइथागोरस प्रमेय का ज्ञान, अपरिमेय संख्याओं की समझ और कुशलतापूर्वक इनका उपयोग कर पाने की क्षमता है। बच्चों को $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ पर पहुँचने के लिए निर्देशित किया जाना चाहिए जो कि कर्ण पर पहुँचने के दो अलग-अलग तरीक़ों पर ज़ोर देने का उद्देश्य है। दूसरे भाग में, बच्चों को एक अपरिमेय संख्या के मान का सन्निकटन करने (approximation) का अभ्यास मिलता है, जो कि गणितीय संवाद, विचार बुद्धि और तर्क में भी उपयोग होता है।

कार्य 4.1 : अलग-अलग टुकड़ों से ज्यामितीय आकृतियों को बनाना।

- आप कितने तरीक़ों से एक वर्ग बना सकते हैं, यानी कि
  1. 1 टुकड़े के साथ
  2. दो टुकड़ों के साथ... और इसी तरह से आगे भी।
- प्रत्येक विन्यास का चित्र बनाएँ।

शिक्षकों के लिए : 1, 3, 4, 5 और 7 टुकड़ों से वर्ग बनाने के लिए, प्रत्येक मामले में केवल 1 सम्भावित विन्यास है। 2 टुकड़ों के साथ, 2 विन्यास सम्भव हैं, जहाँ पर वर्ग समान त्रिभुजों (Identical triangles) के सम्बन्धित जोड़े के अनुसार बड़ा या छोटा हो सकता है। इस कार्य को बच्चों के जोड़े बनाकर किया जा सकता है, क्योंकि बच्चे चर्चा से लाभान्वित होंगे और प्रत्येक आकृति के गुणों के बारे में अपनी समझ साझा करने में सक्षम होंगे।

कार्य 4.2

- त्रिभुज, आयत, समान्तर चतुर्भुज, समद्विबाहु समलम्ब चतुर्भुज और समलम्ब चतुर्भुज इनमें से किस आकृति को आप इनका उपयोग करके बना सकते हैं–
  1. किसी भी टुकड़े से
  2. किन्हीं भी 2 टुकड़ों से
  3. किन्हीं भी 3 टुकड़ों से
  4. किन्हीं भी 4 टुकड़ों से
  5. किन्हीं भी 5 टुकड़ों से
  6. किन्हीं भी 6 टुकड़ों से
  7. सभी 7 टुकड़ों से
- प्रत्येक विन्यास का चित्र बनाएँ और निम्न तालिका को भरें।

टुकड़ों की संख्या	1	2	3	4	5	6	7
त्रिभुज	✓						
वर्ग	✓						
आयत	✗						
समान्तर चतुर्भुज							
समलम्ब चतुर्भुज							
समद्विबाहु समलम्ब चतुर्भुज							

शिक्षकों के लिए : वर्ग को छोड़कर अन्य आकृतियों के लिए, टुकड़ों की समान संख्या के साथ एक से ज़्यादा विन्यास सम्भव हैं। इस कार्य को एक समूह-कार्य के रूप में भी दिया जा सकता है क्योंकि समय की कमी एक बच्चे को सभी विकल्पों के बारे में चर्चा करने से रोक सकती है। बच्चों को अक्सर प्रत्येक आकृति के गुणधर्मों का सहज ज्ञान से (न कि ख़ाली बाहरी तौर पर) उपयोग करने के लिए कहा जाता है। यह तालिका उन्हें व्यवस्थित रूप से अपने निष्कर्ष निकालने में मदद करती है।

कार्य 5 : यह साबित करना कि कुछ विन्यास असम्भव हैं।

कार्य 4 में, आप किन आकृतियों को 6 टुकड़ों से नहीं बना पाए?

इस बात को साबित करें कि 6 टुकड़ों को किसी भी तरह से जोड़कर इन आकृतियों को बना पाना असम्भव है।

शिक्षकों के लिए : अनुमान लगाना और फिर उसे साबित करना एक परिष्कृत गणितीय कौशल है।

अनुमान : टैनग्राम सेट के किन्हीं भी 6 टुकड़ों के साथ एक वर्ग या एक समकोण समद्विबाहु त्रिभुज बनाना सम्भव नहीं है।

प्रमाण : मान लेते हैं कि वर्ग की भुजा इकाई लम्बाई की है। 7 टुकड़ों का क्षेत्रफल निम्न तालिका में दिया गया है।

टुकड़ा	**भुजा**	**क्षेत्रफल**
वर्ग	1	1
सबसे छोटे त्रिभुज	$1,1,\sqrt{2}$	½
मध्यम त्रिभुज	$\sqrt{2},\sqrt{2},2$	1
सबसे बड़े त्रिभुज	$2,2,2\sqrt{2}$	2
समान्तर त्रिभुज	$1,\sqrt{2}$	1

कुल क्षेत्रफल $= 1 + 2 \times ½ + 1 + 2 \times 2 + 1 = 8$ वर्ग इकाइयाँ। निम्नलिखित तालिका में हम विभिन्न मामलों की गणना करते हैं जहाँ 7 टुकड़ों में से एक को छोड़कर कोई आकृति बनाई जाती है।

बचे हुए टुकड़े	**बचे हुए 6 टुकड़ों के साथ बनी किसी भी आकृति का क्षेत्रफल**
सबसे बड़ा त्रिभुज	8-2 =6
मध्यम त्रिभुज, वर्ग, समान्तर चतुर्भुज	8-1 = 7
सबसे छोटा त्रिभुज	8 - ½ = 7 ½

इस प्रकार, यदि किसी वर्ग को बनाने के लिए 6 टुकड़ों के किसी भी संयोजन का उपयोग किया जाता है, तो उसका क्षेत्रफल 6, 7 या 7½ होगा। और इसकी भुजा √6, √7 या √(7½) = ½ √30 होगी।

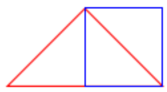
लेकिन टैनग्राम सेट के टुकड़ों के साथ, केवल a + b √2 प्रकार की भुजा हो सकती है, जहाँ पर a, b = 0, 1, 2, 3...   (1)

इस तरह से यह 6, 7 या 7½ क्षेत्रफल वाले वर्गों के होने को अपने आप ही निरस्त कर देता है। चूँकि न तो √6 और न ही √7 या √30 को उपरोक्त (1) रूप से व्यक्त किया जा सकता है। इससे हम निष्कर्ष निकालते हैं कि किन्हीं भी 6 टुकड़ों के साथ एक वर्ग बनाना सम्भव नहीं है।

त्रिभुज का मामला भी एकदम ऐसा ही है। किसी त्रिभुज को समकोण समद्विबाहु त्रिभुज साबित करने से पहले यह देख लेते हैं कि कोई त्रिभुज बनाया जा सकता है या नहीं।

किसी भी त्रिभुज में 2 कोण न्यून कोण होने चाहिए।

किसी भी टैनग्राम के टुकड़े में एकमात्र सम्भव न्यून कोण 45° है।



∴ टैनग्राम के टुकड़ों से बने किसी भी त्रिभुज में 45° के दो न्यून कोण होना चाहिए और इसलिए तीसरा कोण 180° − (45°+ 45°) = 90° होना चाहिए।

∵ यह एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज होना चाहिए।

इसका क्षेत्रफल = ½ × आधार × ऊँचाई = $½x^2$ = 6, 7 या 7½ होगा। इसका अर्थ है कि x को √12, √14 या √15 होना चाहिए। जैसा कि हमने देखा कि टैनग्राम सेट के टुकड़ों के साथ यह सम्भव नहीं है।

इसलिए हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि किन्हीं भी 6 टुकड़ों के साथ एक त्रिभुज बनाना सम्भव नहीं है।

निष्कर्ष

टैनग्राम को हमेशा कक्षा के लिए मज़ेदार और व्यावहारिक गतिविधियों के रूप में प्रस्तुत किया गया है। और यही वह उद्देश्य है जो हमने लो फ्लोर हाई सीलिंग कार्यों के इस सेट के साथ लिया है। लेकिन बच्चों के तार्किक और संवाद कौशल को विकसित करने के उद्देश्य से, प्रमाण

की एक अतिरिक्त परत को जोड़कर हमने स्तर को ऊँचा उठा दिया है। हमेशा की तरह, शिक्षक को बच्चों की चर्चाओं को सुगम बनाना चाहिए, लेकिन बच्चों को अपनी विचारधारा विकसित करने का समय दें– वे आपको आश्चर्यचकित और प्रसन्न करने में कोई कसर नहीं छोड़ेंगे!

References:

1. https://en.wikipedia.org/wiki/Tangram (downloaded on September 13, 2015)

स्वाती सरकार अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय के विश्वविद्यालय संसाधन केन्द्र की वरिष्ठ व्याख्याता और स्रोत व्यक्ति हैं। गणित उनका दूसरा प्यार है (पहला चित्रांकन है)। उन्होंने भारतीय सांख्यिकीय संस्थान से बीस्टैट-एमस्टैट और वाशिंगटन विश्वविद्यालय, सिएटल से गणित में एमएस किया है। वह पाँच वर्षों से अधिक समय से बच्चों और शिक्षकों के साथ गणित पर काम कर रही हैं। सभी तरह की व्यावहारिक और क्रियाशील गतिविधियों, विशेषकर ओरिगेमी में उनकी गहरी दिलचस्पी है। उनसे swati.sircar@apu.edu.in पर सम्पर्क किया जा सकता है।

स्नेहा टाइटस पिछले बीस वर्षों के पूर्णकालिक गणित-शिक्षण कार्य को छोड़कर अब वे सभी उम्र के बच्चों में तर्क सीखने के प्रति प्रेम पैदा करने और गणित की प्रासंगिकता को समझाने के अपने कैरियर लक्ष्य को पाने की कोशिश कर रही हैं। वह अज़ीम प्रेमजी फाउंडेशन के विश्वविद्यालय संसाधन केन्द्र में काम करती हैं। साथ ही ग्रामीण और शहरी स्कूलों के गणित-शिक्षकों के साथ बतौर सलाहकार काम करती हैं। वह वर्तमान तकनीक, मीडिया से सम्बन्धित प्रासंगिक संसाधनों के साथ-साथ खेलों, पहेलियों और कहानियों को शामिल करते हुए छोटे शिक्षण मॉड्यूल के माध्यम का उपयोग करके कार्यशालाएँ आयोजित करती हैं, जो शिक्षकों और बच्चों दोनों को सक्षम और प्रेरित करेंगी। उनसे sneha.titus@azimpremjifoundation.org पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : निदेश सोनी
अनुवाद पुनरीक्षण एवं कॉपी एडिटर : कविता तिवारी
सम्पादन : राजेश उत्साही