Translation of *How to Prove it : Shailesh Shirali* From Azim Premji University At Right Angles_Vol.6, No.3 November 2017

इसे सिद्ध कैसे करें?

शैलेष शिराली

मुख्य शब्द : *प्रसन्न संख्या, पुनरावृत्ति, चक्र, प्रोग्रामिंग, गणित, पायथन*

इस लेख में हम प्रसन्न संख्याओं (HAPPY NUMBERS) की धारणा पर बात करने जा रहे हैं। चूँकि यहाँ हम संख्या के अंकीय निरूपण पर चर्चा करेंगे, अतः आगे बढ़ने से पहले एक बात स्पष्ट कर दें कि हमारी पूरी चर्चा दाशमिक संख्या प्रणाली पर आधारित होगी।

वर्ग-योग पुनरावृत्ति (SSQ iteration)

कोई एक संख्या लें। उसके अंकों के वर्गों को जोड़ दें। परिणाम स्वरूप प्राप्त संख्या के साथ पुनः इस प्रक्रिया को दोहराएँ अर्थात प्राप्त संख्या के अंकों के वर्गों का जोड़ प्राप्त करें, हर बार प्राप्त नई संख्या के साथ इस प्रक्रिया की पुनरावृत्ति करें। किसी संख्या के अंकों के वर्गों के जोड़ के दोहराव की इस प्रक्रिया को ही हम वर्ग-योग पुनरावृत्ति (SSQ iteration) कह रहे हैं।

उदाहरण स्वरूप 2375 के लिए वर्ग-योग पुनरावृत्ति (SSQ iteration) कुछ इस प्रकार होगी :

$2375 \to 87 \to 113 \to 11 \to 2 \to 4 \to 16 \to 37 \to 58 \to 89 \to 145 \to 42 \to 20 \to 4 \to 16 \to 37 \to 58 \to \cdots \to \cdots$,

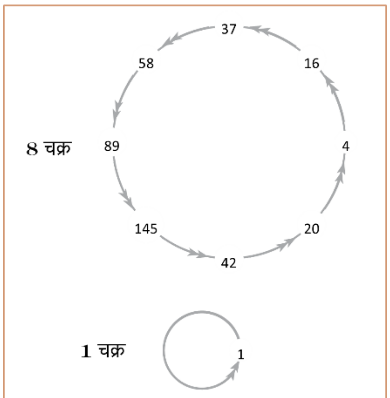
और हम देखते हैं कि यहाँ आकर हम एक चक्र (4, 16, 37, 58,
89, 145, 42, 20) में फँस गए हैं। यहाँ हमें जो चक्रीय क्रम मिल रहा है वह 8 संख्याओं का है। चूँकि इस चक्र में 8 संख्याएँ हैं अतः इसे 8-चक्र कहेंगे।

दूसरी ओर, देखिए कि संख्या 91 शुरू करने पर क्या मिलता है।

$91 \to 82 \to 68 \to 100 \to 1 \to 1 \to 1 \to 1 \to \cdots$

और एक मर्तबा 1 पर पहुँच गए तो उसी पर अटक जाएँगे। इस बार भी हमें चक्रीय-क्रम मिला पर इसमें केवल एक ही संख्या है, अतः इसे हम **1-चक्र** कहेंगे। 1-चक्र की इस एक संख्या को अध्ययन की जा रही पुनरावृत्ति का **स्थिर बिन्दु** कहते हैं।

दोनों चक्रों (प्रक्षेप पथ) को नीचे चित्र में ज़्यादा आकर्षक रूप दिया गया है। (देखें **चित्र-1**)



चित्र - 1

जैसा कि साथ के आलेख में बताया गया है, किसी संख्या के वर्ग-योग पुनरावृत्ति (SSQ iteration) के तहत जिन संख्याओं का अन्त स्थिर बिन्दु 1 में होता है, उन्हें **प्रसन्न संख्या (HAPPY NUMBER)** कहा जाता है।

इस चर्चा में आगे हम यह स्थापित करेंगे कि चाहे वर्ग-योग पुनरावृत्ति (SSQ iteration) की शुरुआत किसी भी संख्या से की जाए, उनमें उपरोक्त दो तरह के चक्र ही मिलते हैं – पहला 8-चक्र और दूसरा 1-चक्र।

इस प्रमेय का प्रमाण कि वर्ग-योग पुनरावृत्ति (SSQ iteration) में केवल और केवल दो स्थितियाँ ही सम्भव हैं।

मान लीजिये n,6-अंकों वाली कोई संख्या है। इसका अधिकतम मान क्या हो सकता है?

स्पष्ट है 6-अंक की सबसे बड़ी संख्या का मान 999999 होगा। यह सारे 9 अंक से बनी है। अतः अधिकतम सम्भव वर्ग-योग = 81 + 81 + 81 + 81 + 81 + 81 = 6 x 81 = 486 होगा। आप देख पा रहे होंगे कि यह योग मूल संख्या 999999 से काफ़ी छोटा है।

इसी प्रकार 7-अंक वाली संख्या n का अधिकतम सम्भव अंक-वर्ग-योग $=7 \times 9^2 = 7 \times 81$ यानी 567 होगा और मूल संख्या तथा अंक-वर्ग-योग के बीच का अन्तर और भी अधिक होगा।

सामान्यीकरण करने से हम समझ सकते हैं कि *k*-अंकों वाली किसी संख्या n के लिए अधिकतम सम्भव अंक-वर्ग-योग $k \times 9^2 = k \times 81 = 81k$ होगा।

अब हम *k*-अंकों वाली सबसे छोटी संख्या के अंक-वर्ग-योग पर विचार करते हैं। हम जानते हैं कि k-अंकों वाली सबसे छोटी संख्या 10^{K-1} होती है। और यह देखना कठिन नहीं है कि समस्त $k \geq 4$ के लिए $81k < 10^{K-1}$।

k के कुछ मान के लिए $81k$ तथा 10^{K-1} की सूची दी जा रही है :

संख्या में अंकों की संख्या (K)	1	2	3	4	5	6	...
$81k$	81	162	243	324	405	486	...
10^{k-1}	1	10	100	1000	10000	100000	...

$k \geq 4$ के लिए, $81k < 10k-1$ को आगमन विधि द्वारा सिद्ध करना बहुत ही आसान है। अतः इसके विस्तार में न जाकर इसे पाठक के लिए छोड़ा जा रहा है।

उपरोक्त असमानता ($81k < 10^{k-1}$) यह साबित करती है कि अगर कोई संख्या n जिसमें चार या उससे अधिक अंक हैं, तो इसका अंक-वर्ग-योग का मान सदैव n से कम होगा।

इसलिए, कोई संख्या n कितनी भी बड़ी क्यों न हो उस पर अंक-वर्ग-योग की प्रक्रिया बारम्बार लागू करने पर अन्ततः हम 3-अंकीय संख्या से बड़ी संख्या नहीं प्राप्त कर सकते।

किसी भी तीन-अंकीय संख्या का अधिकतम अंक-वर्ग-योग मान 243 होगा। 243 या उससे छोटी संख्या के लिए अधिकतम अंक-वर्ग-योग मान $1 + 9^2 + 9^2 = 163$ है (जो हमें 199 से प्राप्त होता है); और 163 या उससे छोटी संख्याओं के लिए अधिकतम अंक-वर्ग-योग मान $9^2 + 9^2 = 162$ (99 से प्राप्त) है। वक्तव्यों के इस सिलसिले को आगे जारी नहीं रखा जा सकता क्योंकि 99 तो 162 से छोटी है। इसलिए, निष्कर्ष के तौर पर निम्नलिखित कथन दे सकते हैं : "कोई संख्या कितनी भी बड़ी क्यों न हो उस पर अंक-वर्ग-योग पुनरावृत्ति लागू करने पर अन्ततः हम 162 से बड़ी संख्या नहीं प्राप्त कर सकते।"

तो इस पुनरावृत्ति के चक्रों की सूची बनाने के लिए इतना करना पर्याप्त होगा कि यह संक्रिया 1 व 162 के बीच की संख्याओं के साथ क्या परिणाम देती है। यह एक सीमित समुच्चय है, इसलिए हमारा काम अपेक्षाकृत आसान हो गया है। करना सिर्फ़ इतना होगा कि 1 और 162 के बीच की सभी संख्याओं के अंक-वर्ग-योग मान पता करें और उनके प्रक्षेप पथ (जिन्हें कक्षाएँ भी कहते हैं) देखें।

उदाहरण के लिए, 3 का प्रक्षेप पथ : 3,9,81,65,61,37, ... की ओर जाता है। इसे 37 से आगे जारी रखने की आवश्यकता नहीं है, क्योंकि हमें पता है कि 37, 8–अंकीय चक्र पथ का हिस्सा है। और 37 के बाद, हम बस उस 8–अंकीय चक्र पथ का अनिश्चित काल के लिए चक्कर लगाते रहते हैं।
इसी प्रकार 5 का प्रक्षेप पथ : 5,25,29,85,89, ... की ओर जाता है; पहले के मामले की तरह यहाँ भी इसे 89 से आगे जारी रखने की आवश्यकता ही नहीं है, क्योंकि 89 उसी 8-अंकीय चक्र पथ का हिस्सा है।
इस तरह से आगे बढ़ते हुए, हम 1 से लेकर 162 तक की सभी संख्याओं का उसके अंक-वर्ग-योग पुनरावृत्ति (SSQ iteration) से उनके विभिन्न प्रक्षेप पथों का पता लगा सकते हैं और देख सकते हैं कि उनका प्रक्षेप पथ उपरोक्त दो में से कोई एक है।

हम यहाँ सभी संख्याओं की सूची दे सकते थे लेकिन हमें लगता है कि आप स्वयं अंक-वर्ग-योग पुनरावृत्ति तथा उनके विभिन्न प्रक्षेप पथों को खोजें ताकि आप देख सकें कि हमने जो दावा किया है वह सही है।

आप इस बात से थोड़े नाख़ुश हो सकते हैं कि हमने प्रमाण देते समय उसके अन्तिम भाग को अधूरा छोड़ दिया है। या सत्यापन की बारीकियों को भी छोड़ दिया है। लेकिन आप

पाएँगे कि यह बात आमतौर पर कम्प्यूटर की मदद से किए जाने वाले सारे प्रमाणों के लिए सही है। ऐसे अधिकांश प्रमाण कुछ ऐसे कथनों के साथ समाप्त किए जाते हैं, “गणना सम्बन्धित बारीक़ियाँ पाठक के लिए छोड़ी जा रही हैं” या फिर “बीजगणितीय सत्यापन पाठक के लिए छोड़ा जा रहा है” आदि। कुछ मामले में गणना के इन हिस्सों को काग़ज़ पर गणना करके पूरा किया जा सकता है।

यदि परिदृश्य काफ़ी जटिल हों तब हमें बीजगणित से सम्बन्धित कम्प्यूटर सॉफ्टवेयर (जैसे- Mathematica) या सामान्यतः इस्तेमाल की जाने वाली कम्प्यूटर प्रोग्रामिंग लैंग्वेज जैसे : पाइथन की ज़रूरत पड़ती है।

कम्प्यूटर की सहायता से प्राप्त प्रमाणों के मामले में यह प्रश्न उत्पन्न हो सकता है, कि "हम कैसे जानते हैं कि हमने जो प्रोग्राम लिखा है उसमें कोई तार्किक त्रुटियाँ नहीं हैं?” या "हम कैसे कह सकते हैं कि हमारे द्वारा इस्तेमाल की जा रही बीजगणित सॉफ्टवेयर त्रुटि रहित है?" जब भी हम कम्प्यूटर से सहायता प्राप्त प्रमाण की बात करते हैं तब इस प्रकार के प्रश्न अनिवार्य रूप से उत्पन्न होते हैं, (कुछ मामलों में इस तरह के प्रश्न वास्तव में उठे भी हैं)। उदाहरण के लिए – चार-रंग प्रमेय (four-colour theorem) को सिद्ध करना, काफ़ी हद तक मशीन द्वारा की जाने वाली महत्त्वपूर्ण एवं विशाल गणनाओं पर निर्भर है। विस्तार से जानकारी के लिए आप सन्दर्भ सूची [5] और [6] को देख सकते हैं)

प्रसन्न संख्याओं के वितरण पर टिप्पणी:

उच्च गति वाले कम्प्यूटर का उपयोग करके की गई विस्तृत संगणना से प्रसन्न संख्याओं के वितरण के बारे में कुछ रोचक तथ्य प्राप्त हुए हैं। आपके लिए प्रसन्न संख्या से सम्बन्धित दो तथ्य नीचे दिये जा रहे हैं :

1. ऐसा प्रतीत होता है कि लगभग सभी सकारात्मक पूर्णांक संख्याओं का 1/7, प्रसन्न संख्याएँ हैं।
2. ऐसा प्रतीत होता है कि सतत प्रसन्न संख्याओं की अधिकतम लम्बाई 5 है। उदाहरण के लिए 44488, 44489, 44490, 44491, 44492 लगातार पाँच संख्याएँ हैं जो प्रसन्न संख्याएँ भी हैं। जिनका अंक-वर्ग-योग पुनरावृत्ति (SSQ iteration) से प्राप्त प्रक्षेप पथ 1-चक्रीय होता है।

References

1. Math forum, ‘Happy number’, http://mathforum.org/library/drmath/view/55856.html
2. Walter Schneider, ‘Happy Numbers’, https://web.archive.org/web/20060204094653/http://www.wschnei.de/digit-related-numbers/happy-numbers.html
3. Shailesh Shirali, *Adventures in Iteration*, Volume I (Universities Press, Hyderabad, India)
4. Wikipedia, ‘Happy number’, https://en.wikipedia.org/wiki/Happy_number
5. Wikipedia, ‘Four color theorem’, https://en.wikipedia.org/wiki/Four_color_theorem

6. Wikipedia, 'Four color theorem - Proof by computer', https://en.wikipedia.org/wiki/Four_color_theorem#Proof_by_computer

शैलेष शिराली सहयाद्री स्कूल (KFI), पुणे के निदेशक और ऋषि वैली स्कूल (आन्ध्र प्रदेश) के सामुदायिक गणित केन्द्र-प्रमुख रह चुके हैं। वे भारत के मैथ-ओलम्पियाड आन्दोलन से जुड़े रहे हैं। उन्होंने हाई स्कूल के विद्यार्थियों के लिए गणित की कई पुस्तकें लिखी हैं। वर्तमान में वे "At Right Angles" पत्रिका के सम्पादक के रूप में कार्य कर रहे हैं।

अनुवाद : मनोज कुमार शराफ़ **अनुवाद पुनरीक्षण :** सुशील जोशी
कॉपी-एडिटर : अनुज उपाध्याय (सभी एकलव्य फ़ाउण्डेशन) **सम्पादन :** राजेश उत्साही