Translation of *Interpretation of Divisibility Rules : Ankit Patodi* From Azimpremji University At Right Angles March 2021

प्राथमिक कक्षा से

विभाज्यता के नियमों की व्याख्या

अंकित पटोदी

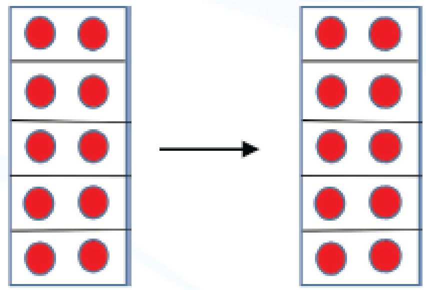
मुख्य शब्द : पैटर्न, विभाज्यता, स्थानीय मान, गुणज, विज़ुअलाइज़ेशन, सामान्यीकरण

विभाज्यता के नियम उच्च प्राथमिक कक्षाओं में पढ़ाए जाते हैं। और जल्दी-से यह पहचानने में मदद करते हैं कि क्या दी गई कोई संख्या 2, 3, 4, 5, 6, 8 और 10 से विभाज्य है। हालाँकि, इन नियमों की अवधारणात्मक समझ या इनके प्रमाण पर शायद ही कभी बात होती है। इसका एक कारण यह हो सकता है कि हम (यानी शिक्षकों) में से अधिकांश इन नियमों के पीछे के तर्क जानते ही न हों। और यदि हम जानते भी हैं, तो हम मान लेते हैं कि इन नियमों के प्रमाण बच्चों की समझ के दायरे से परे हैं क्योंकि इनमें जटिल बीजगणितीय व्यंजक और व्याख्या शामिल है। यह दोनों कारण बच्चों को इन नियमों के पीछे के तर्क को सीखने से दूर रखते हैं।

और इस वजह से, मुझे इन नियमों की व्याख्या को सरल तरीक़े से प्रस्तुत करने की चुनौती महसूस हुई। मैंने इसे शिक्षकों के एक समूह के साथ साझा किया और देखा कि इससे उन्हें अपनी कक्षाओं में और भी मदद मिली। मैंने अपने तर्क को सही ठहराने के लिए कुछ बुनियादी नियमों का उपयोग किया :

नियम 1 : यदि कोई संख्या दूसरी संख्या से विभाज्य है, तो उसके सभी गुणज भी उस संख्या से विभाज्य होंगे। उदाहरण के लिए, यदि 10, 2 से विभाज्य है, तो 10 के सभी गुणज यानी कि 20, 30, 100, 1000 आदि भी 2 से विभाज्य होंगे।

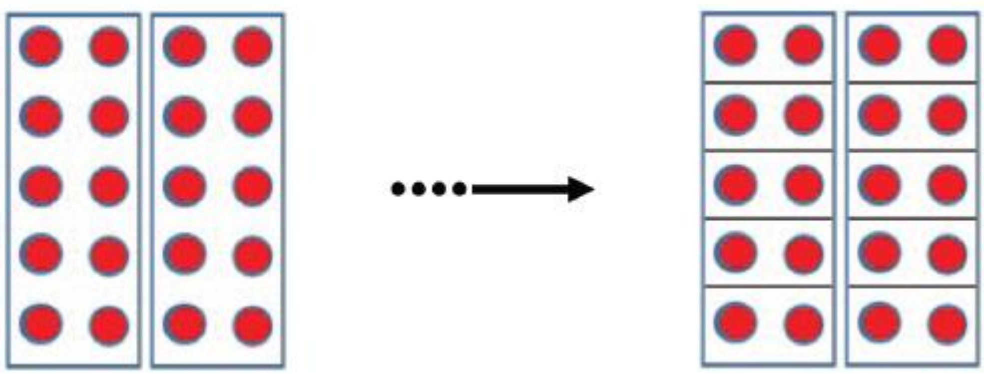
इस नियम को समझने के लिए एक उदाहरण लेते हैं। यदि हम कहते हैं कि 10, 2 से विभाज्य है, तो इसका मतलब है कि जब हम 10 वस्तुओं को 2 के समूहों में विभाजित करते हैं, तो कोई भी वस्तु शेष नहीं बचती है। इसे नीचे दिए गए चित्र-1 में दर्शाया गया है :



चित्र-1

अब, मान लें कि हमारे पास 10 के किसी गुणज में वस्तुएँ हैं, हम इन वस्तुओं को इसी तरह से 2 के छोटे-छोटे समूहों में (चित्र-2) विभाजित कर सकते हैं।

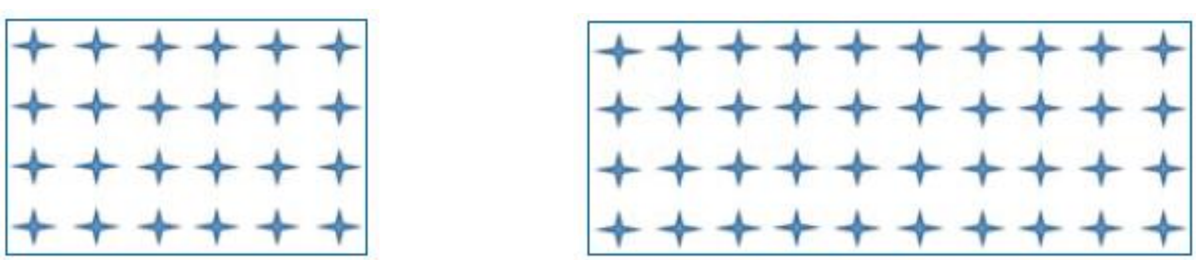
किसी भी संख्या और उसके गुणजों के लिए इस तरह के सम्बन्धों को दर्शाया जा सकता है।



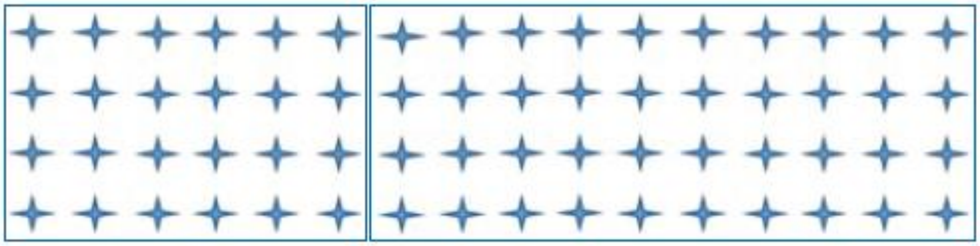
चित्र-2

नियम 2 : यदि दो या दो से अधिक संख्याएँ किसी समान संख्या से विभाज्य हैं, तो उनका योगफल भी उस संख्या से विभाज्य होगा। उदाहरण के लिए, यदि 24 और 40 दोनों अलग-अलग 4 से विभाज्य हैं, तो उनका योगफल अर्थात, 24 + 40 = 64 भी 4 से विभाज्य होगा। इसे काउंटर का उपयोग करके आसानी-से दिखाया जा सकता है (चित्र 3) :

$24 = 4 \times 6$ $\qquad$ $40 = 4 \times 10$



$$64 = 4 \times (6 + 10)$$



चित्र-3

इस सरल निरूपण को तीन या अधिक संख्याओं के संयोजन के लिए सामान्यीकृत किया जा सकता है। स्थानीय मान की अवधारणा विभाज्यता नियमों को समझने में क्या महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाती है यह समझने के लिए हम संख्याओं के कुछ बुनियादी प्रसारित रूपों का उपयोग कर रहे हैं। एक उदाहरण लेते हैं : हमारे पास एक संख्या 13455 है, जिसे हम तेरह हजार चार सौ पचपन कहते हैं। हम स्थानीय मान की अवधारणा का उपयोग करके इस संख्या के कई प्रसारित रूप लिख सकते हैं। तो, 13455 को निम्नलिखित में से किसी भी तरीक़े से लिखा जा सकता है :

- $10000 + 3000 + 400 + 50 + 5$
- $13000 + 400 + 50 + 5 = 13000 + 455$
- $13400 + 50 + 5 = 13400 + 55$
- $13450 + 5$ इत्यादि।

10 से विभाज्यता

कोई भी संख्या 10 से विभाज्य है यदि उसका अन्तिम अंक 0 है।

यहाँ हम 10 के लिए विभाज्यता नियम को सबसे पहले समझने की कोशिश करेंगे क्योंकि यह नियम अन्य संख्याओं के नियमों की व्याख्या करने के लिए आधार के रूप में कार्य करेगा।

नीचे दी गई संख्याओं को लिखने के तरीक़े पर ग़ौर करें:

1	11	21	31	41	51	61	71	81	91	101	111	121
2	12	22	32	42	52	62	72	82	92	102	112	122
3	13	23	33	43	53	63	73	83	93	103	113	123
4	14	24	34	44	54	64	74	84	94	104	114	124
5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115	125
6	16	26	36	46	56	66	76	86	96	106	116	126
7	17	27	37	47	57	67	77	87	97	107	117	127
8	18	28	38	48	58	68	78	88	98	108	118	128
9	19	29	39	49	59	69	79	89	99	109	119	129
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130

चित्र-4

सभी संख्याएँ इकाई और दहाइयों से बनी होती हैं, जहाँ इकाइयों की संख्या 10 से कम होनी चाहिए लेकिन दहाई की संख्या उतनी बड़ी हो सकती है जितनी हम चाहते हैं। उदाहरण के लिए, 473, 3 इकाई और 47 दहाई से मिलकर बना है, जबकि 6850, 685 दहाई और शून्य इकाई से मिलकर बना है। यदि बच्चों को बण्डलों (दहाई को दर्शाने के लिए) और डण्डियों (इकाई को दर्शाने के लिए) के साथ संख्याएँ बनाने का अनुभव है, तो उनके लिए यह समझना आसान होगा। अब दहाई बेशक दस से विभाज्य होगी, लेकिन इकाई नहीं होगी। तो कोई भी संख्या 10 से विभाज्य केवल तभी होगी यदि उसमें कोई इकाई नहीं हो (यानी, दहाई से परे) और ऐसा तब होता है जब 0 अंक संख्या के इकाई स्थान पर हो (यानी, अन्तिम अंक हो)।

5 और 2 से विभाज्यता

यदि किसी संख्या का अन्तिम अंक 0 या 5 है तो वह संख्या 5 से विभाज्य है।

इसी तरह, *कोई भी संख्या 2 से विभाज्य है यदि उसका अन्तिम अंक 0, 2, 4, 6 या 8 है।*

इन नियमों को देखने का एक तरीक़ा 10 × 10 ग्रिड के माध्यम से हो सकता है।

यहाँ 2 के गुणजों को नीले रंग से, 5 के गुणजों को लाल रंग से और 2 और 5 दोनों के गुणजों को बैंगनी रंग से हाइलाइट किया गया है।

1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	19	29	39	49	59	69	79	89	99
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

चित्र-5

इन दोनों नियमों को उचित ठहराने का एक तरीक़ा नियम 1 और नियम 2 के माध्यम से निकल सकता है। 10 से बड़ी किसी भी संख्या को 10 के गुणज और शेष अन्तिम अंक के योगफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। उदाहरण के लिए :

भाग 2

$$125 = \boxed{120} + \boxed{5} = 12 \text{ x } 10 + 5$$

$$2342 = \boxed{2340} + \boxed{2} = 234 \text{ x } 10 + 2$$

भाग 1

5 से विभाज्यता के मामले में ऐसी किसी भी संख्या के लिए भाग 1 (जो कि 10 का एक गुणज है) हमेशा 5 से विभाज्य होता है (नियम 1) और पूरी संख्या को 5 से विभाज्य होने के लिए, शेष अन्तिम अंक भी 5 से विभाज्य होना चाहिए (नियम 2)। यह तभी सम्भव है जब अन्तिम अंक 5 या 0 हो।

इसलिए, 5 से विभाज्यता के लिए यह शर्त रखी गई है।

क्या आप 2 से विभाज्यता के लिए भी इसी तरह का तर्क दे सकते हैं?

4 से विभाज्यता

कोई भी संख्या 4 से विभाज्य है यदि उसके अन्तिम दो अंकों से बनी संख्या 4 से विभाज्य है।

यह 5 और 2 से विभाज्यता के नियमों के समान है। लेकिन यहाँ, संख्या के अन्तिम दो अंक एक महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाते हैं। इसका कारण यह है कि 4, 10 का गुणनखण्ड नहीं है, जबकि यह 100 का एक गुणनखण्ड है। इसलिए, इस स्थिति में, भाग 1 को 100 (10 के बजाय) का गुणज होना चाहिए और भाग 2 एक 2-अंकीय संख्या होनी चाहिए जिसकी विभाज्यता की जाँच की जानी है।

उदाहरण के लिए :

$$464 = 400 + 64 = \overbrace{\boxed{4 \times 100}}^{\text{भाग 1}} + \boxed{64} \rightarrow \text{भाग 2}$$

$$4596 = 4500 + 96 = 45 \times 100 + 96 = \overbrace{\boxed{45 \times 25 \times 4}}^{\text{भाग 1}} + \boxed{96} \rightarrow \text{भाग 2}$$

अब क्या आप इसी तरह के तर्क का इस्तेमाल करके 8 से विभाज्यता के नियम को समझा सकते हैं?

9 और 3 से विभाज्यता

कोई भी संख्या 9 से विभाज्य है यदि उस संख्या के सभी अंकों का योगफल 9 से विभाज्य है। इसी तरह, *कोई भी संख्या 3 से विभाज्य है यदि उस संख्या के सभी अंकों का योगफल 3 से विभाज्य है।*

अब तक, हमने 5, 2 और 4 के विभाज्यता नियमों को उचित सिद्ध करने के लिए भाग 1 में 10 या 100 को एक गुणज के रूप में उपयोग किया है। 9 और 3 के मामले में, भाग 1 को 9, 99, 999, इत्यादि के गुणज के रूप में लिखा गया है। आइए एक उदाहरण देखें :

9 से विभाज्यता की जाँच करने के लिए एक संख्या 873 लेते हैं।

$$873 = 800 + 70 + 3 = 8 \times 100 + 7 \times 10 + 3 = 8 \times (99 + 1) + 7 \times (9 + 1) + 3$$
$$= (8 \times 99 + 8) + (7 \times 9 + 7) + 3 = (8 \times 99 + 7 \times 9) + (8 + 7 + 3)$$

यहाँ भाग 1 $= 8 \times 99 + 7 \times 9$ स्पष्ट रूप से 9 का एक गुणज है। शेष भाग या भाग 2 अर्थात $8 + 7 + 3 = 18$ संख्या 873 के अंकों का योगफल है। (क्या आप समझ पा रहे हैं कि आपको भाग 2 में दी गई संख्या के अंक क्यों मिले हैं?) इसलिए, 873 की 3 या 9 से विभाज्यता की जाँच करने के लिए, हमें केवल यह जाँचने की आवश्यकता है कि क्या इसका अंक-योगफल 18, 3 या 9 से विभाज्य है। चूँकि 18, 9 से विभाज्य है (और इसलिए 3 से भी), अत: संख्या 873, 9 और 3 दोनों से विभाज्य होगी।

इसी तरह $4{,}83{,}720 = 4 \times 100000 + 8 \times 10000 + 3 \times 1000 + 7 \times 100 + 2 \times 10 + 0$
$= 4 \times (99999 + 1) + 8 \times (9999 + 1) + 3 \times (999 + 1) + 7 \times (99 + 1) + 2 \times (9 + 1) + 0$
$= (4 \times 99999 + 8 \times 9999 + 3 \times 999 + 7 \times 99 + 2 \times 9) + (4 + 8 + 3 + 7 + 2 + 0)$

फिर से भाग 1 स्पष्ट रूप से 9 से विभाज्य है और भाग 2 में अंक-योगफल $= 4 + 8 + 3 + 7 + 2 = 24$ है, जो 9 से विभाज्य नहीं है लेकिन 3 से विभाज्य है। इसलिए 483720, 9 से विभाज्य नहीं है, लेकिन यह 3 से विभाज्य है।

दूसरी ओर, $5273 = (5 \times 999 + 2 \times 99 + 7 \times 9) + (5 + 2 + 7 + 3)$ और भाग 2 या संख्या का अंक-योगफल $= 5 + 2 + 7 + 3 = 17$, 3 से विभाज्य नहीं है जबकि भाग 1 स्पष्ट रूप से विभाज्य है। तो संख्या 5273, 3 या 9 से विभाज्य नहीं होगी।

अब आपको क्या लगता है कि 6 से विभाज्यता के लिए नियम क्या होना चाहिए? और 12 के लिए? और 15 के लिए? और 20 के लिए?

संक्षेप में प्रस्तुत करने के लिए कुछ महत्त्वपूर्ण बिन्दु

प्रत्येक विभाज्यता नियम के लिए संख्या को भाग 1 और भाग 2 में इस प्रकार तोड़ने का सुझाव है

(i) भाग 1 सम्बन्धित संख्या से विभाज्य होता है, आमतौर पर नियम 1 से

(ii) भाग 2 मूल संख्या की तुलना में बहुत छोटा है

(iii) विभाज्यता के लिए हमें केवल भाग 2 की जाँच करने और नीचे दिखाए अनुसार पूरी संख्या के लिए नियम 2 को लागू करने की आवश्यकता है :

संख्या	**भाग 1**	**भाग 2**
2, 5, 10	10m (10 के गुणज)	इकाई स्थान पर शेष अन्तिम अंक
4	100m (100 के गुणज)	अन्तिम 2 अंकों वाला शेष हिस्सा
8	1000m (1000 के गुणज)	अन्तिम 3 अंकों वाला शेष हिस्सा
3 और 9	9m (9 के गुणज)	अंक-योगफल

इस प्रकार, हमने 2, 3, 4, 5, 6 (विस्तार करते हुए), 8, 9 और 10 से विभाज्यता पर चर्चा की है, हालाँकि हमने किसी भी संख्या के लिए बीजगणितीय रूप से नियमों को सिद्ध नहीं किया है। यह विज़ुअलाइज़ेशन युवा विद्यार्थियों के दिमाग़ को यह समझने के लिए पर्याप्त रूप से प्रेरित करेंगे कि इस तरह के नियम/परीक्षण क्यों काम करते हैं।

अंकित पटोदी अज़ीम प्रेमजी फ़ाउण्डेशन में स्रोत व्यक्ति हैं। उन्होंने कम्प्यूटर साइंस में बीई और अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय, बेंगलूरु से एमए (डेवलपमेंट) किया है। अंकित गणित से सम्बन्धित मुद्दों पर छत्तीसगढ़ के विभिन्न ज़िलों में सरकारी शिक्षकों के साथ काम करते हैं। वे गणित की अवधारणात्मक समझ के साथ-साथ, गणित-शिक्षण में इस्तेमाल होने वाली शैक्षणिक रणनीतियों पर आधारित कार्यशालाओं का संचालन भी करते हैं। वे 5 वर्ष से अधिक समय से बच्चों के साथ गणित पढ़ते-पढ़ाते आ रहे हैं और गणित में ग़लतफ़हमियों-धारणाओं (मिसकन्सेप्शन) को दूर करने के लिए शैक्षणिक संसाधनों की खोज करने और उन्हें डिज़ाइन करने में रुचि रखते हैं। उनसे ankit.patodi@azimpremjifoundation.org पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : प्रमोद मैथिल
पुनरीक्षण एवं कॉपी-एडीटिंग : कविता तिवारी
सम्पादन : राजेश उत्साही