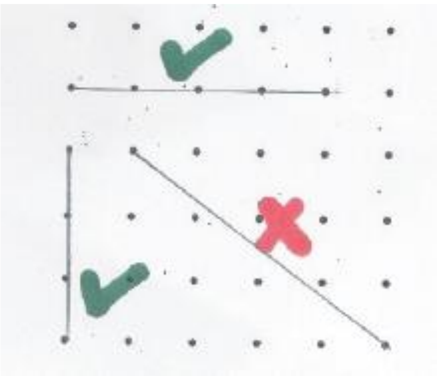
टेयरआउट

डॉट शीट्स के साथ मज़ा

स्वाती सरकार

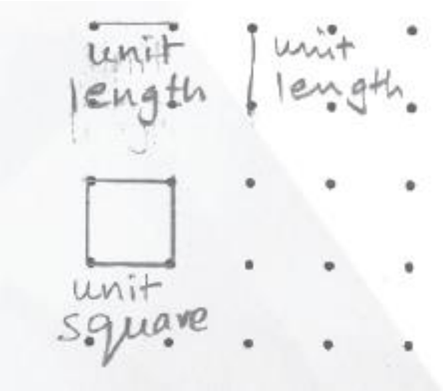
पेज 1 और 2 विद्यार्थियों के लिए वर्कशीट हैं, जबकि पेज 3 और 4 में सुगमकर्ता के लिए दिशानिर्देश हैं। इस बार हम डॉट शीटस् (या चौकोर जाली वाले काग़ज़) का उपयोग करके दिए गए परिमाप या दिए गए क्षेत्रफल के हिसाब से आकृतियों की पड़ताल करेंगे।

इस वर्कशीट में आपको विभिन्न आकृतियाँ बनानी होंगी। प्रत्येक आकृति के कोने (या शीर्ष) एक बिन्दु (या चौकोर जाली वाले काग़ज़ में जहाँ रेखाएँ एक-दूसरे को काटती हैं) होना चाहिए। आप केवल आड़ी (क्षैतिज) रेखाओं और खड़ी (ऊर्ध्वाधर) रेखाओं का उपयोग कर सकते हैं। किसी भी तिरछी रेखा का उपयोग न करें। चित्र-1 देखें।



चित्र-1

आड़ी या खड़ी रेखा पर किन्हीं दो आसन्न बिन्दुओं के बीच के दूरी को इकाई लम्बाई के रूप में लिया जाना चाहिए। इसी प्रकार, शीर्षों के रूप में बिन्दुओं से निर्मित सबसे छोटे सम्भव वर्ग के क्षेत्रफल को एक वर्ग इकाई माना जाना चाहिए। इसी तरह, डॉट शीट्स पर सबसे छोटा रेखाखण्ड और सबसे छोटा वर्ग क्रमश: इकाई लम्बाई और वर्ग इकाई के रूप में माना जाना चाहिए (चित्र-2)।



चित्र-2

कुछ डॉट शीटस् (या चौकोर जाली वाले काग़ज़), एक पेंसिल, एक इरेज़र और बेहतर होगा यदि एक स्केल भी जुटा लें ... अब आप काम करने के लिए पूरी तरह तैयार हैं...

1. 8 वर्ग इकाई क्षेत्रफल वाली आकृतियाँ बनाइए।
   अ. प्रत्येक आकृति का परिमाप ज्ञात कीजिए।
   ब. क्या किसी भी आकृति का परिमाप 14 इकाई है? यदि नहीं, तो ऐसी एक आकृति बनाइए।
   स. क्या आपको एक समान परिमाप वाली अलग-अलग आकृतियाँ मिलीं?
   द. सबसे छोटा परिमाप कितना है?
   इ. सबसे बड़ा परिमाप कितना है?

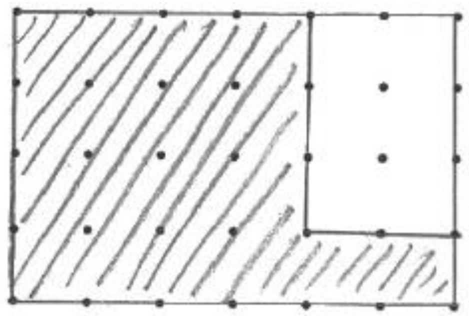
2. 14 इकाई परिमाप वाली आकृतियाँ बनाइए।
   अ. प्रत्येक आकृति का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
   ब. क्या आप 8 वर्ग इकाई क्षेत्रफल वाली कोई आकृति बना सकते हैं जो आपके द्वारा प्रश्न 1.ब में बनाई गई आकृति से भिन्न हो?
   स. क्या आपको एक समान क्षेत्रफल वाली अलग-अलग आकृतियाँ मिलीं?
   द. सबसे छोटा क्षेत्रफल कितना है?
   ई. सबसे बड़ा क्षेत्रफल कितना है?

3. निम्नलिखित आकृतियाँ बनाइए :
   अ. एक आकृति जिसका क्षेत्रफल 8 वर्ग इकाई से कम और परिमाप 14 इकाई से कम हो।
   ब. एक आकृति जिसका क्षेत्रफल 8 वर्ग इकाई से अधिक और परिमाप 14 इकाई से अधिक हो।

स. एक आकृति जिसका क्षेत्रफल 8 वर्ग इकाई से कम लेकिन परिमाप 14 इकाई से अधिक हो।

द. एक आकृति जिसका क्षेत्रफल 8 वर्ग इकाई से अधिक लेकिन परिमाप 14 इकाई से कम हो।

4. एक आयत बनाइए जो कम-से-कम 6 इकाई लम्बा और 4 इकाई चौड़ा हो।
इस बड़े आयत के अन्दर एक छोटा आयत इस प्रकार बनाइए कि वे एक कोना साझा करते हों (चित्र-3)। दोनों आयतों के बीच में बने L-आकृति के क्षेत्र को छायांकित कीजिए।



चित्र-3

	क्षेत्रफल	**परिमिति**
बड़ा आयत		
छोटा आयत		
L-आकृति का क्षेत्र		

अ. दोनों आयतों और L-आकृति के क्षेत्र का क्षेत्रफल और परिमाप ज्ञात कीजिए।

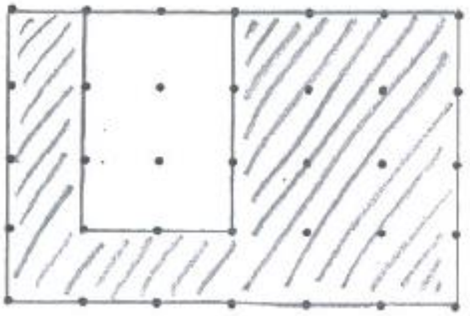
ब. तीनों का क्षेत्रफल आपस में कैसे सम्बन्धित है?

स. तीनों का परिमाप आपस में कैसे सम्बन्धित है?

5. उपरोक्त गतिविधि को आयतों के अन्य जोड़ों के साथ दोहराइए।
अ. क्या आपको इनमें कोई पैटर्न दिखाई देते हैं? कौन-से?
ब. आप इन पैटर्नों की व्याख्या कैसे कर सकते हैं?

6. प्रश्न 4 में दी गई जितनी लम्बाई व चौड़ाई का एक बड़ा आयत। इसी तरह प्रश्न

4 में बनाए गए छोटे आयत जितनी लम्बाई और चौड़ाई का एक छोटा आयत भी। इस बार छोटे आयत को बड़े आयत के अन्दर इस प्रकार बनाइए कि वे अपनी एक भुजा साझा करते हों, पर कोई कोना साझा न करते हों (चित्र-4)। दोनों आयतों के बीच में बने U-आकृति के क्षेत्र को छायांकित कीजिए।



चित्र-4

	क्षेत्रफल	**परिमिति**
बड़ा आयत		
छोटा आयत		
U-आकृति का क्षेत्र		

अ. दोनों आयतों और U-आकृति के क्षेत्र का क्षेत्रफल और परिमाप ज्ञात कीजिए।

ब. तीनों का क्षेत्रफल आपस में कैसे सम्बन्धित है?

स. तीनों के परिमाप आपस में कैसे सम्बन्धित हैं?

7. उपरोक्त गतिविधि को आयतों के अन्य जोड़ों के साथ दोहराइए।

अ. क्या आपको इनमें कोई पैटर्न दिखाई देते हैं, कौन-से?

ब. आप इन पैटर्नों की व्याख्या कैसे कर सकते हैं?

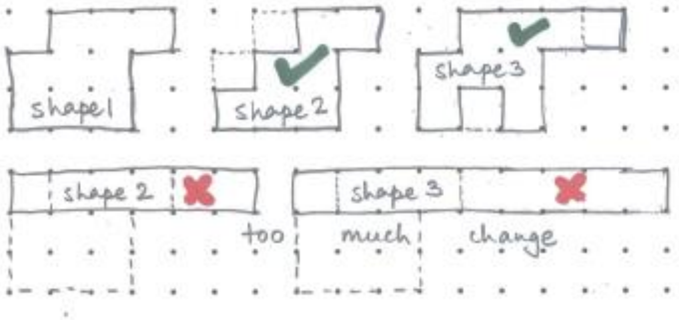
8. एक आकृति बनाइए और उसे आकृति 1 नाम दीजिए। उसे एक नई आकृति का रूप देने के लिए निम्नलिखित तरीक़े से बदलाव कीजिए। बदली हुई आकृति और मूल आकृति में बहुत अधिक अन्तर नहीं होना चाहिए।*

अ. आकृति 2 का परिमाप समान हो, लेकिन क्षेत्रफल कम हो।

ब. आकृति 3 का क्षेत्रफल समान हो, लेकिन परिमाप ज़्यादा हो।

स. आकृति 4 का क्षेत्रफल कम हो, लेकिन परिमाप ज़्यादा हो।

प्रत्येक स्थिति में यह स्पष्ट कीजिए कि आपने आकृति को कैसे बदला।



चित्र-5

* उदाहरण के लिए, चित्र-5 में : ऊपर की पंक्ति में — आकृति 1 में 9 वर्ग हैं, आकृति 2 और आकृति 1 में 2 (9 में से) वर्गों का अन्तर हैं; आकृति 3 और आकृति 1 में भी इतना ही अन्तर हैं। हालाँकि, नीचे की पंक्ति में, आकृति 2 (और आकृति 3) व आकृति 1 में 6 (9 में से) वर्गों का अन्तर है। यह अनुपात आधे से कम होना चाहिए [यानी, $2/9 < 1/2$ लेकिन $6/9 = 2/3 > 1/2$]।

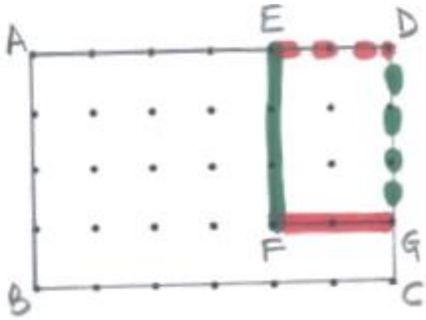
यह वर्कशीट कक्षा 4-5 के बच्चों के साथ की जा सकती है, जब उन्हें परिमाप और क्षेत्रफल के बारे में पढ़ाया जा चुका हो। इस गतिविधि के लिए इन दो मापों की समझ ज़रूरी है, न कि इनके सूत्र।

केवल खड़ी और आड़ी रेखाओं के उपयोग का प्रतिबन्ध बनाई गई आकृतियों के क्षेत्रफल और परिमिति को ज्ञात करना आसान बनाता है। किसी आकृति की सीमा रेखा (border) की केवल इकाई लम्बाई की गिनती करके परिमाप की गणना की जा सकती है। इसी प्रकार, आकृति के भीतर बन रहे वर्गों को गिनकर क्षेत्रफल ज्ञात किया जाता है। चूँकि डॉट शीटस् में रेखाएँ नहीं होतीं, इसलिए चौकोर जाली वाले काग़ज़ की तुलना में, इसमें बनाई गई आकृतियों का परिमाप ज्ञात करना आसान होता है।

यह वर्कशीट खोजबीन और अवलोकन करने के मौक़े देती है। यह हमें पैटर्न खोजने और उन्हें समझाने के लिए प्रोत्साहित करती है। अन्तिम भाग, हमें अब तक की सीख का उपयोग करके आगे की आकृतियों को बनाने के लिए प्रेरित करता है। इस वर्कशीट का उपयोग यह आकलन करने के लिए किया जा सकता है कि क्या बच्चे परिमाप और क्षेत्रफल के बीच अन्तर कर पा रहे

हैं। इससे उन्हें यह समझने में मदद मिलेगी कि विभिन्न आकृतियों के एक समान परिमाप (प्रश्न -2) या एक समान क्षेत्रफल (प्रश्न-1) या दोनों (प्रश्न-2ब) हो सकते हैं। यह इस ग़लतफ़हमी को तोड़ती है कि यदि परिमाप बढ़ाया जाए, तो क्षेत्रफल बढ़ना चाहिए और इसका उल्टा भी (प्रश्न-3स, 3द)। यह उन्हें यह पता लगाने में भी मदद करती है कि (i) परिमाप को घटाए बिना (प्रश्न-4, प्रश्न-5) और (ii) परिमाप को बढ़ाकर (प्रश्न-6, प्रश्न-7) क्षेत्रफल को कैसे कम किया जाए। उन्हें पैटर्न की जाँच करने और उन्हें समझाने के लिए ख़ास तौर से कहा गया है (प्रश्न-5 और प्रश्न-7)। अन्त में, उन्हें अपनी सीख का उपयोग करके दिए गए विशिष्ट निर्देशों (प्रश्न-8) के अनुसार नई आकृतियाँ बनाने के लिए कहा गया है।

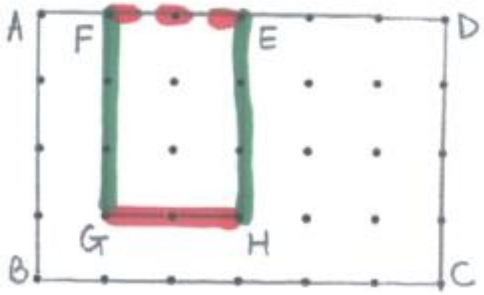
1. पहला प्रश्न बच्चों को यह अवलोकन करने का मौक़ा देता है कि विभिन्न आकृतियों का क्षेत्रफल समान हो सकता है, लेकिन यह सम्भव है कि उनके परिमाप अलग-अलग हों । सभी आकृतियाँ वास्तव में ऑक्टोमिनो हैं, यानी कि, 8 वर्गों को मिलाकर बनाए गए बहुभुज। ऑक्टोमिनो के लिए सबसे बड़ा और सबसे छोटा सम्भावित परिमाप क्रमशः 18 इकाई और 12 इकाई है।
2. दूसरा प्रश्न समान परिमाप वाले बहुभुजों की पड़ताल करता है। इसलिए डॉट शीटस् (या चौकोर जाली वाले काग़ज़) पर इसे करना अपेक्षाकृत कठिन कार्य है। इस स्थिति में, अधिकतम और न्यूनतम सम्भावित क्षेत्रफल क्रमश: 12 वर्ग इकाई और 6 वर्ग इकाई हैं । दूसरे शब्दों में, यह आकृतियाँ 6-12 वर्गों के साथ बनाई जा सकती हैं।
3. तीसरा प्रश्न यह जाँचने के बारे में है कि क्या बच्चों में परिमाप और क्षेत्रफल को अधिकतम/न्यूनतम करने के बारे में कोई सहज समझ विकसित हुई है। जहाँ पहले दो भागों (अ और ब) को हल करना आसान है, वहीं बाद के हिस्से (स और द) उन्हें इस समझ को विकसित करने में मदद करते हैं।
4. चौथा प्रश्न बच्चों को यह पता लगाने में मदद करता है कि कैसे दिए गए किसी आयत में L-आकृति का एक क्षेत्र बनाना उस आयत के क्षेत्रफल को कम करता है चूँकि एक छोटे आयत को घटाया जाता है —जबकि परिमाप को समान रखा जाता है।
5. पाँचवाँ प्रश्न चौथे प्रश्न को एक पायदान ऊपर ले जाता है। इसका लक्ष्य बच्चों को यह दिखाना है कि L-आकृति का क्षेत्र बनाना हमेशा क्षेत्रफल को कम करेगा लेकिन परिमाप को हमेशा स्थिर रखेगा। उन्हें यह समझाने के लिए प्रोत्साहित किया जाना चाहिए कि परिमाप अपरिवर्तित क्यों रहता है। इससे उन्हें यह देखने में मदद मिलेगी कि बड़े आयत ABCD और L-आकृति ABCGFE का परिमाप समान है क्योंकि ED और DG क्रमश: FG और EF से बदल जाते हैं। चूँकि ED = FG और EF = DG छोटे आयत EFGD की सम्मुख भुजाएँ हैं, इसलिए इस अदला-बदली के कारण परिमाप में कोई परिवर्तन नहीं होता है (चित्र-6)।



चित्र-6

6. उपरोक्त को ही आगे बढ़ाते हुए, छटवां प्रश्न अक्सर उत्पन्न होने वाली एक असहज स्थिति पर विचार करता है जहाँ परिमाप के बढ़ने पर क्षेत्रफल कम हो जाता है। यह बच्चों को दिए गए किसी आयत में U-आकृति का क्षेत्र बनाने से परिचित कराता है जिससे क्षेत्रफल में उसी तरह का परिवर्तन होता है जैसा कि प्रश्न 4 में हुआ था।

7. सातवाँ प्रश्न पाँचवें प्रश्न के समान ही है। यह बच्चों को यह अनुमान लगाने के लिए प्रेरित करता है कि किसी आयत में U-आकृति का क्षेत्र बनाने से क्षेत्रफल हमेशा कम होना चाहिए जबकि परिमाप बढ़ना चाहिए। बच्चों को यह देखने और इस पर चर्चा करने के लिए प्रोत्साहित किया जाना चाहिए कि कैसे U-आकृति का क्षेत्र बनाने से छोटे आयत की दो अतिरिक्त भुजाएँ FG और EH परिणामी U-आकृति ABCDEHGF में जुड़ जाती हैं, जिस वजह से परिमाप बढ़ जाता है (चित्र-7)। ध्यान दें कि आयत ABCD में FE को U-आकृति में GH द्वारा बदला जाता है।



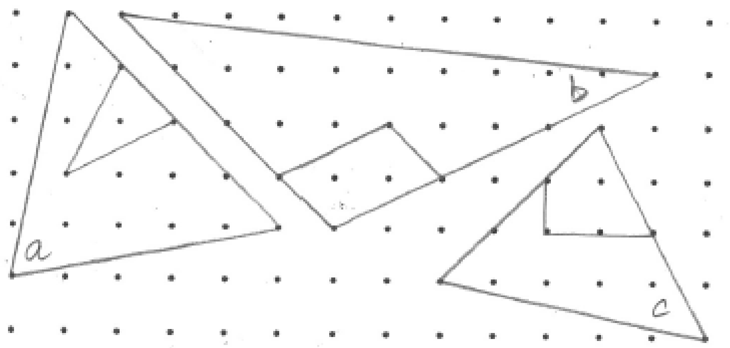
चित्र-7

8. प्रश्न 8 में इस सीख को आगे ले जाते हैं और बच्चों से कहते हैं कि वे एक आकृति बनाने में इसका उपयोग करें और दिए गए विशिष्ट निर्देशों के अनुसार उसमें बदलाव करें। बच्चों के लिए एक आयत से शुरुआत करना स्वाभाविक हो सकता है। यह 8अ और 8स के लिए ठीक रहेगा यदि न्यूनतम लम्बाई कम-से-कम 2 इकाई हों। लेकिन 8ब के लिए यह शायद ठीक नहीं हो। तो, शुरुआत एक ज़्यादा दिलचस्प आकृति से करना चाहिए। पहला भाग (अ) L-आकृति के क्षेत्र बनाने का प्रत्यक्ष अनुप्रयोग है, दूसरा भाग (ब) L को U में बदलकर प्राप्त

किया जा सकता है और आख़िरी भाग U-आकृति के क्षेत्र बनाने का उपयोग करके प्राप्त किया जा सकता है।

यदि इस वर्कशीट का उपयोग उच्च कक्षाओं के लिए किया जाता है, तो तिरछी रेखाओं के उपयोग की अनुमति दी जा सकती है। अनायताकार (non-rectangular) आकृतियों को काटकर L-आकृति और U-आकृति के क्षेत्र बनाने के बुनियादी पहलुओं को सामान्यीकृत किया जा सकता है। यह ज़रूरी नहीं है कि शुरुआती आकृति आयताकार हो। नीचे तिरछी रेखाओं से बने बहुभुजों को काटकर L-आकृति और U-आकृति के क्षेत्र बनाने के कुछ उदाहरण दिए गए हैं। क्या L-आकृति का क्षेत्र बनाने से परिमाप हमेशा समान रहेगा? यदि नहीं, तो ऐसा कब होगा? चित्र 8 में तीन स्थितियाँ दी गई हैं :

अ. U-आकृति का क्षेत्र बनाना
ब. L आकृति का क्षेत्र बनाना जहाँ परिमाप में कोई परिवर्तन नहीं हुआ - क्यों?
स. L आकृति का क्षेत्र बनाना, जब परिमाप में परिवर्तन हुआ - बढ़ा या घटा?
कारण सहित बताओ।



चित्र-8

प्रस्तुति : स्वाती सरकार
अनुवाद : प्रमोद मैथिल
पुनरीक्षण एवं कॉपी-एडीटिंग : कविता तिवारी
सम्पादन : राजेश उत्साही